

СТРУКТУРНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ И РЕЖИМЫ КОЛЛАПСОВ В 3D-ТЕЧЕНИЯХ НА СКЛОНЕ

*В. П. Гончаров**

*Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова Российской академии наук
109017, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 19 марта 2011 г.

В рамках гамильтоновской версии 3D-модели «мелкой воды» на склоне изучены механизмы и структурные элементы неустойчивости, развитие которой приводит к коллапсу фрагментов течения. Исследование показало, что от своего 2D-аналога 3D-модель отличается более разнообразным набором коллапсирующих решений. В частности, наряду с решениями, описывающими радиально-симметричный (изотропный) коллапс, существуют решения, описывающие неізотропный коллапс, в ходе которого площадь контакта коллапсирующего фрагмента со склоном сжимается не в точку, а в отрезок.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как и для любой другой нелинейной системы, для гравитационных течений принципиальным является вопрос о возможных финальных режимах, на которые они выходят в результате развития гидродинамической неустойчивости. В зависимости от модели и начальных данных существуют различные механизмы и сценарии развития неустойчивостей. Две из них — неустойчивости Рэлея–Тейлора (НРТ) и Рихтмайера–Мешкова (НРМ), важны для понимания неустойчивостей, возникающих на границе раздела, и играют ключевую роль во многих естественных процессах и приложениях. Кавитация, инерционный термоядерный синтез, физика высоких плотностей энергии, астро- и геофизика — вот далеко не полный их перечень [1].

Формирование особенностей за конечное время или коллапс — достаточно универсальный механизм проявления неустойчивостей в нелинейно-дисперсионных системах [2–4]. Это демонстрируют многие гидродинамические модели, в том числе и те, которые связаны с изучением эволюции границ раздела [5–8].

Основная цель данной работы — обобщить на трехмерный случай решения, описывающие режимы и структурные элементы коллапса в плоской модели гравитационного течения на склоне. Согласно теории [9], в плоской модели в зависимости от на-

чальных условий возможны два механизма развития неустойчивости и, соответственно, два сценария коллапса. Для сценария НРМ особенности на границе раздела формируются по закону $(t_0 - t)^{-1/3}$, если же реализуется сценарий НРТ, — то по закону $(t_0 - t)^{-2/7}$, где t — текущее время, а t_0 — время коллапса. Есть все основания ожидать, что в 3D-модели, где в игру включается еще одно дополнительное измерение, существуют и другие, более быстрые, сценарии коллапсов.

2. 3D-МОДЕЛЬ ГРАВИТАЦИОННОГО ТЕЧЕНИЯ НА СКЛОНЕ

Рассмотрим слой или конечный объем несжимаемой однородной жидкости со свободной поверхностью, полагая, что движение жидкости безвихревое, происходит в поле сил тяжести с ускорением g и снизу ограничено склоном постоянной крутизны с углом наклона ϑ к горизонту. Эту модель будем рассматривать в декартовой системе координат, движущейся с ускорением $g \sin \vartheta$ вниз вдоль склона таким образом, что координаты $\mathbf{r} = (x_1, x_2)$ лежат в плоскости склона, а ось x_3 направлена перпендикулярно склону.

Подробный вывод уравнений, описывающих эволюцию свободной границы такого течения в приближении нелинейной дисперсии, можно найти в работе [9], а краткий вывод приведен в Приложении. Уравнения движения формулируются в терми-

*E-mail: v.goncharov@rambler.ru

нах двух канонически сопряженных переменных, одной из которых (обобщенной координатой) является форма поверхности $q(\mathbf{r}, t)$, а второй (обобщенным импульсом) $p(\mathbf{r}, t)$ — гидродинамический потенциал на этой поверхности. Если масштабы времени T и пространства L выбраны так, что $LT^{-2} = g \cos \vartheta$, то после приведения зависимых и независимых переменных к безразмерному виду уравнения движения можно записать как

$$\partial_t q = \frac{\delta H}{\delta p} = -\nabla \cdot \left(q \nabla p + \nabla \left(\frac{q^3}{3} \Delta p \right) \right), \quad (1)$$

$$\partial_t p = -\frac{\delta H}{\delta q} = -\frac{1}{2} (\nabla p)^2 + \frac{q^2}{2} (\Delta p)^2 - q, \quad (2)$$

где гамильтониан модели H определяется выражением

$$H = \frac{1}{2} \int \left(q (\nabla p)^2 - \frac{q^3}{3} (\Delta p)^2 + q^2 \right) d\mathbf{r}. \quad (3)$$

Отметим, что система уравнений (1), (2) галилеево-инвариантна,

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} - \mathbf{c}t, \quad p \rightarrow p - \mathbf{c} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{c}^2 t / 2,$$

и обладает симметриями относительно масштабного преобразования

$$q \rightarrow \alpha^2 q, \quad p \rightarrow \alpha^3 p, \quad t \rightarrow \alpha t, \quad \mathbf{r} \rightarrow \alpha^2 \mathbf{r}.$$

Здесь \mathbf{c} и α — параметры преобразований.

Кроме гамильтониана H , в силу симметрий сохраняются еще три интеграла:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \int q \nabla p d\mathbf{r}, \\ M &= \int q \left(x_1 \frac{\partial p}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) d\mathbf{r}, \\ Q &= \int q d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (4)$$

Сохранение полного импульса \mathbf{P} и момента M связано соответственно с трансляционной инвариантностью и изотропностью H , а полный объем Q сохраняется в силу инвариантности H относительно калибровочного преобразования $p \rightarrow p + \text{const}$.

3. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Как известно [10], автомодельные решения представляют собой промежуточные асимптотики невырожденных задач и весьма полезны при изучении

финальных стадий сильнонелинейных процессов, когда система «забывает» о деталях, связанных с начальными данными, и ее поведение определяется интегралами задачи.

Для классификации автомодельных режимов 3D-модели склоновых течений исходный гамильтониан (3) представим в виде линейной комбинации,

$$H = I_1 + I_2 - I_3, \quad (5)$$

трех положительных интегралов

$$I_1 = \frac{1}{2} \int q (\nabla p)^2 d\mathbf{r},$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int q^2 d\mathbf{r}, \quad I_3 = \frac{1}{6} \int q^3 (\Delta p)^2 d\mathbf{r}.$$

В дальнейшем при анализе будем предполагать, что автомодельные решения реализуются как асимптотики, на которых, в зависимости от режима, можно пренебречь вкладом одного из интегралов I_1 , I_2 , I_3 в гамильтониане (5). Отметим, что пренебрежение интегралом I_3 превращает уравнения (1), (2) в традиционные уравнения мелкой воды [11], в которых нелинейная дисперсия не учитывается.

Законы сохранения (4) накладывают ограничения. Поэтому автомодельные решения следует искать в специальном виде. Во-первых, для того чтобы обеспечить закон сохранения полного объема Q , решение для формы поверхности q будем искать в виде

$$q = \frac{1}{\beta_1 \beta_2} \hat{q} \left(\frac{x_1}{\beta_1}, \frac{x_2}{\beta_2} \right),$$

где $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ — некоторые функции времени, а \hat{q} — структурная функция, зависящая только от автомодельных переменных.

Во-вторых, в отличие от q , переменная p автомодельной не предполагается, но обе считаются далее четными функциями аргументов x_1 и x_2 . Требование четности автоматически обеспечивает тождество

$$\mathbf{P} \equiv 0, \quad M \equiv 0.$$

Таким образом, для таких решений имеет место условие сохранения нулевого импульса и нулевого момента.

3.1. Режимы НРМ

В этих режимах интеграл I_2 исключается, поэтому главный вклад обеспечивают интегралы I_1, I_3 . В результате уравнения движения принимают вид

$$\partial_t q = \frac{\delta H}{\delta p} = -\nabla \cdot \left(q \nabla p + \nabla \left(\frac{q^3}{3} \Delta p \right) \right), \quad (6)$$

$$\partial_t p = -\frac{\delta H}{\delta q} = -\frac{1}{2} (\nabla p)^2 + \frac{q^2}{2} (\Delta p)^2, \quad (7)$$

где

$$H = I_1 - I_3 = \frac{1}{2} \int \left(q (\nabla p)^2 - \frac{1}{3} q^3 (\Delta p)^2 \right) dr.$$

Возможны три физических постановки, которые приводят к режиму НРМ. Первая реализуется в невесомости ($g = 0$). Вторая — в отсутствие составляющей силы тяжести ($\vartheta = \pi/2$), прижимающей слой к склону (модель с вертикальным склоном). Третья — в присутствии силы тяжести, но при условии, что начальные данные таковы, что в процессе развития неустойчивости доминирующим оказывается эффект интенсификации вихревой пелены ($I_1 \approx I_3 \gg I_2$).

В качестве автоматической подстановки для q рассмотрим выражение

$$q = \frac{3Q}{2\pi\beta_1\beta_2} \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{\beta_1} \right)^2 - \left(\frac{x_2}{\beta_2} \right)^2}, \quad (8)$$

которое описывает каплю — жидкий полуэллипсоид, сосредоточенный на компактном носителе $0 \leq x_1 \leq \beta_1, 0 \leq x_2 \leq \beta_2$.

Прямая подстановка в уравнения (6), (7) показывает, что выражение (8) оказывается точным решением, если

$$p = \frac{\alpha_1}{\beta_1} x_1^2 + \frac{\alpha_2}{\beta_2} x_2^2 + p_0, \\ \dot{p}_0 = 2 \left(\frac{3Q}{2\pi\beta_1\beta_2} \right)^2 \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \right)^2,$$

а переменные α_i и β_i ($i = 1, 2$) как функции времени удовлетворяют канонически сопряженным уравнениям

$$\dot{\beta}_i = \frac{\partial H'}{\partial \alpha_i} = 2\alpha_i - \frac{2}{\beta_i} \left(\frac{3Q}{2\pi\beta_1\beta_2} \right)^2 \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \right), \quad (9)$$

$$\dot{\alpha}_i = -\frac{\partial H'}{\partial \beta_i} = -\frac{2}{\beta_i} \left(\frac{3Q}{2\pi\beta_1\beta_2} \right)^2 \times \\ \times \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \right) \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} + \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right). \quad (10)$$

Эти уравнения описывают систему с двумя степенями свободы и гамильтонианом

$$H' = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \left(\frac{3Q}{2\pi\beta_1\beta_2} \right)^2 \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \right)^2, \quad (11)$$

который связан с исходным гамильтонианом H соотношением

$$H' = \frac{5}{2} \frac{H}{Q}.$$

Плоская модель [9] следует из уравнений (9), (10), если одну из полуосей капли (например, β_2) и соответственно объем Q устремить к бесконечности, соблюдая при этом условие $3Q(2\pi\beta_2)^{-1} \rightarrow 1$. Если же объем Q конечен, пространственный масштаб L для приведения задачи к безразмерному виду с самого начала удобно выбрать так, что $3Q(2\pi)^{-1} = 1$. В этом случае уравнения движения (9), (10) записываются в виде

$$\dot{\beta}_i = 2\alpha_i - \frac{2}{\beta_i\beta_1^2\beta_2^2} \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \right), \\ \dot{\alpha}_i = -\frac{2}{\beta_i\beta_1^2\beta_2^2} \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \right) \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} + \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right). \quad (12)$$

Изотропные решения. В этом случае, полагая $\beta_i = 2^{1/6}\beta$ и $\alpha_i = 2^{1/6}\alpha$ ($i = 1, 2$), уравнения движения (12) приводим к виду

$$\dot{\beta} = \frac{\partial H''}{\partial \alpha} = 2\alpha(1 - \beta^{-6}), \\ \dot{\alpha} = -\frac{\partial H''}{\partial \beta} = -6\alpha^2\beta^{-7}. \quad (13)$$

В зависимости от знака гамильтониана

$$H'' = 2^{-4/3} H' = \alpha^2(1 - \beta^{-6})$$

эти уравнения имеют три ветви решений.

1. Если $H'' < 0$ и соответственно $0 < \beta < 1$, то из уравнений (13) следует решение, которое описывает изотропный коллапс. В этом режиме асимптотически при $t \rightarrow t_0$, где t_0 — время коллапса, переменные β и α стремятся к нулю по законам

$$\beta \propto 2^{1/4} |H''|^{1/8} (t_0 - t)^{1/4}, \\ \alpha \propto 2^{3/4} |H''|^{7/8} (t_0 - t)^{3/4}. \quad (14)$$

Сравнение асимптотик (14) с законами коллапса в двумерной модели, где $q \propto (t_0 - t)^{-1/3}$ [9], показывает, что в $3D$ -модели происходит ускорение коллапса:

$$q \propto \beta^{-2} \sim (t_0 - t)^{-1/2}.$$

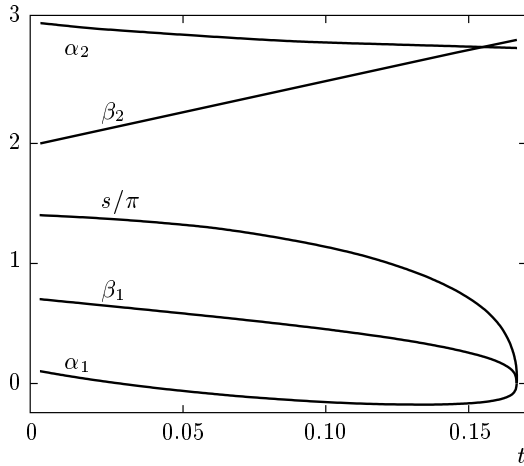


Рис. 1. Неизотропный коллапс в режиме НРМ. Расчет проводился для начальных значений $\beta_1(0) = 0.7$, $\beta_2(0) = 2$, $\alpha_1(0) = 0.1$, $\alpha_2(0) = 3$

2. Если $H'' = 0$, то реализуется решение

$$\beta = 1, \quad \alpha = -\frac{1}{6}(t_0 - t)^{-1},$$

описывающее стационарную каплю, на поверхности которой по закону $(t - t_0)^{-1}$ происходит интенсификация вихревой пелены.

3. Если $H'' > 0$ и соответственно $\beta > 1$, то реализуется решение, которое описывает радиально-симметричное растекание капли. Из уравнений (13) легко видеть, что в этом режиме асимптотически при $t \rightarrow \infty$

$$\beta \propto 2H''^{1/2}t, \quad \alpha \propto H''^{1/2}.$$

Неизотропные решения. Уравнения (12) допускают решения, нарушающие радиальную симметрию.

1. Прежде всего рассмотрим сценарий неизотропного коллапса, в котором площадь контакта $s = \pi\beta_1\beta_2$ стремится к нулю за счет одностороннего сжатия по одной из полуосей, например β_1 , в то время как другая полуось β_2 остается конечной (рис. 1). В результате эллиптическая площадь контакта коллапсирующего фрагмента жидкости сжимается не в точку, а в отрезок.

Анализ решений неизотропного коллапса в окрестности точки $t = t_0$ приводит к следующим асимптотикам для β_1 и α_1 :

$$\beta_1 \approx b_1(t_0 - t)^{1/3} + \frac{72a_1^2 - b_1^8}{10b_1^5b_2^2}(t_0 - t), \quad (15)$$

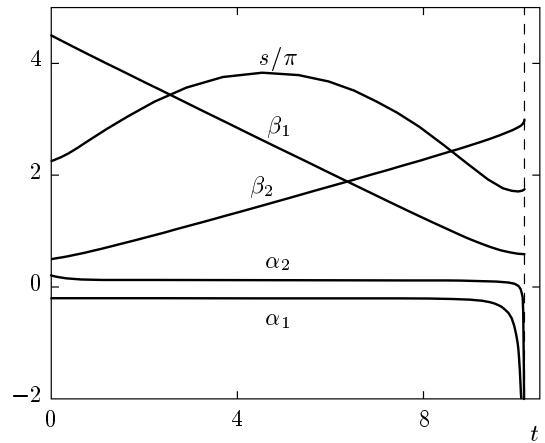


Рис. 2. Неизотропная интенсификация вихревой пелены в режиме НРМ. Расчет проводился для начальных значений $\beta_1(0) = 4.5$, $\beta_2(0) = 0.5$, $\alpha_1(0) = -0.2$, $\alpha_2(0) = 0.2$

$$\alpha_1 \approx a_1(t_0 - t)^{1/3} + \frac{1}{6}b_1^5b_2^2(t_0 - t)^{2/3} + \frac{a_1(72a_1^2 - b_1^8)}{10b_1^6b_2^2}(t_0 - t), \quad (16)$$

а также для β_2 и α_2 :

$$\beta_2 \approx b_2 + \frac{b_1^2}{2b_2}(t_0 - t)^{2/3} + 2\frac{a_1b_2}{b_1}(t_0 - t),$$

$$\alpha_2 \approx -\frac{a_1b_2}{b_1} - \frac{a_1b_1}{2b_2}(t_0 - t)^{2/3} + \frac{1}{18}b_1^6b_2(t_0 - t).$$

Здесь a_1, b_1, b_2 — константы, определяемые начальными условиями и связанные посредством гамильтониана (11) соотношением

$$H' = \frac{b_2^2}{b_1^2} \left(a_1^2 - \frac{b_1^8}{36} \right).$$

Сравнение асимптотик (15), (16) с законами коллапса в 2D-модели [9] показывает, что их степенные показатели совпадают и равны 1/3. Различие же заключается в том, что если в 2D-модели такой коллапс требует отрицательности величины H' , то в 3D-модели, согласно примеру на рис. 1, он может протекать и при $H' > 0$.

2. Как показывают численные эксперименты, существуют начальные данные, которые приводят к решениям, описывающим неизотропную интенсификацию вихревой пелены на поверхности жидкой капли. На рис. 2 приведен пример, в котором капля вытягивается по одной из полуосей и сужается по другой, демонстрируя при этом вначале рост площади контакта s (уменьшение амплитуды), а затем

ее уменьшение (увеличение амплитуды). Завершается процесс стабилизацией формы капли и степенным ростом интенсивности вихревой пелены на ее поверхности.

3. Решения, описывающие неизотропное растекание, также возможны. В этом случае при $t \rightarrow \infty$ увеличение полуосей происходит по линейному закону $\beta_i \approx v_i t$ с разными, но постоянными скоростями $v_i = 2\alpha_i$. Поскольку при этом в силу закона сохранения справедливо соотношение

$$v_1^2 + v_2^2 = 4H',$$

растекание, как финальная стадия, возможно только для тех начальных условий, для которых $H' > 0$. Отметим, что поскольку $q \propto (\beta_1\beta_2)^{-1}$, в 3D-модели амплитуда растекающейся капли убывает по закону $q \propto t^{-2}$, что существенно быстрее чем в 2D-модели, где $q \propto t^{-1}$.

3.2. Режимы НРТ

В этом случае главными в гамильтониане (5) модели являются интеграл I_2 и один из интегралов I_1 или I_3 . В зависимости от выбора интегральной пары для баланса возможны два сценария развития НРТ на финальной стадии.

Режим растекания. Поскольку в этом режиме $q \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, основной вклад обеспечивается интегралами I_1 и I_2 . Поэтому в качестве гамильтониана H рассмотрим величину

$$H = I_1 + I_2 = \frac{1}{2} \int (q (\nabla p)^2 + q^2) \, d\mathbf{r}.$$

Соответствующие уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \partial_t q &= \frac{\delta H}{\delta p} = -\nabla \cdot (q \nabla p), \\ \partial_t p &= -\frac{\delta H}{\delta q} = -\frac{1}{2} (\nabla p)^2 - q. \end{aligned} \tag{17}$$

Подстановка

$$\begin{aligned} q &= \frac{2Q}{\pi\beta_1\beta_2} \left(1 - \left(\frac{x_1}{\beta_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{\beta_2}\right)^2 \right), \\ p &= \frac{\alpha_1}{\beta_1} x_1^2 + \frac{\alpha_2}{\beta_2} x_2^2 + p_0 \end{aligned}$$

позволяет легко убедиться, что эти выражения являются решениями уравнений (17), если, с одной стороны, выполняется условие

$$\dot{p}_0 = -\frac{2Q}{\pi\beta_1\beta_2},$$

а, с другой, параметры β_i и α_i как функции времени удовлетворяют канонически сопряженным уравнениям

$$\dot{\beta}_i = \frac{\partial H'}{\partial \alpha_i} = 2\alpha_i, \quad \dot{\alpha}_i = -\frac{\partial H'}{\partial \beta_i} = \frac{2Q}{\pi\beta_1\beta_2\beta_i} \tag{18}$$

с гамильтонианом

$$H' = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \frac{2Q}{\pi\beta_1\beta_2}.$$

При $t \rightarrow \infty$ из уравнений (18) следует тот же закон растекания, что и для режима НРМ. Увеличение полуосей происходит по линейному закону $\beta_i \approx v_i t$ с постоянными скоростями $v_i \approx 2\alpha_i$. Отметим также, что режим растекания возможен только для тех начальных условий, для которых $H > 0$.

Режим коллапса. Для процессов, связанных с «обострением» переменной q , естественно предположить, что основной вклад в гамильтониан обеспечивается старшими по q интегралами I_2, I_3 . В этом случае в качестве гамильтониана H рассмотрим величину

$$H = I_2 - I_3 = \frac{1}{2} \int \left(q^2 - \frac{q^3}{3} (\Delta p)^2 \right) \, d\mathbf{r}.$$

После замены $\mu = \Delta p$ соответствующие уравнения движения для этого режима принимают вид

$$\begin{aligned} \partial_t q &= \Delta \frac{\delta H}{\delta \mu} = -\Delta \left(\frac{q^3}{3} \mu \right), \\ \partial_t \mu &= -\Delta \frac{\delta H}{\delta q} = \Delta \left(\frac{1}{2} q^2 \mu^2 - q \right). \end{aligned} \tag{19}$$

Ограничимся изучением автомодельных решений с радиальной симметрией

$$q = \lambda^{-2}(t) \hat{q}(\varrho), \quad \mu = \lambda(t) \hat{\mu}(\varrho), \tag{20}$$

где \hat{q} и $\hat{\mu}$ — структурные функции, зависящие от автомодельной переменной $\varrho = \mathbf{r}^2/2\lambda^2(t)$, а $\lambda(t)$ — некоторая масштабная функция.

Подстановка выражений (20) в уравнения движения (19) позволяет, с одной стороны, найти

$$\lambda = (t_0 - t)^{1/5},$$

а с другой, сформулировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения структурных функций \hat{q} и $\hat{\mu}$:

$$\begin{aligned} \hat{q} &= -\frac{5}{3} \partial_\varrho (\hat{q}^3 \hat{\mu}), \\ \hat{\mu} - 2\varrho \hat{\mu}' &= 5 \partial_\varrho \varrho \partial_\varrho (2\hat{q} - \hat{q}^2 \hat{\mu}^2). \end{aligned} \tag{21}$$

Поскольку система (21) обладает симметриями относительно масштабного преобразования

$$\hat{q} \rightarrow \alpha^2 \hat{q}, \quad \hat{\mu} \rightarrow \alpha^{-1} \hat{\mu}, \quad \varrho \rightarrow \alpha^3 \varrho$$

(α — параметр преобразования), все интересующие нас решения могут быть получены из одного единственного эталонного решения, которое локализовано в интервале $0 \leq \varrho \leq a$ и удовлетворяет краевым условиям

$$\hat{q}(0) = 1, \quad \hat{q}_\varrho(0) = 0, \quad \hat{\mu}(0) = m, \quad \hat{q}(a) = 0. \quad (22)$$

Здесь m и a — подлежащие определению параметры.

Можно показать, что в окрестности точки $\varrho = a$, где функция \hat{q} обращается в нуль, существуют две ветви решений. В одном случае имеет место решение

$$\hat{q} \approx 3 \frac{2^{2/3}}{5^{4/3}} (a - \varrho)^{2/3}, \quad \hat{\mu} \approx \frac{5^{2/3}}{2^{4/3}} (a - \varrho)^{-1/3} \quad (23)$$

со слабой степенной особенностью для функции $\hat{\mu}$ в точке $\varrho = a$, а в другом —

$$\hat{q} \approx \left(\frac{2}{5}\right)^2 \frac{(a - \varrho)^2}{3c^2}, \quad \hat{\mu} \approx \frac{9}{2} \left(\frac{5}{2}\right)^3 c^4 (a - \varrho)^{-3} \quad (24)$$

с более сильной особенностью в этой точке (c — произвольная константа).

Чтобы выбрать адекватную задаче ветвь решений, примем во внимание тот факт, что на рассматриваемых автомодельных решениях

$$H = A\lambda^{-2},$$

где константа A определяется интегралом

$$A = \frac{1}{2} \int_0^a \partial_\varrho (\varrho \Phi) d\varrho = \frac{1}{2} \varrho \Phi \Big|_0^a,$$

$$\Phi = \hat{q}^2 - \frac{2}{3} \hat{q}^3 \hat{\mu}^2 + \frac{5}{3} \hat{q}^3 \hat{\mu} \partial_\varrho (2\hat{q} - \hat{q}^2 \hat{\mu}^2).$$

Поскольку $\partial_t \lambda \neq 0$, закон сохранения $\partial_t H = 0$ гарантирует только первая ветвь (выражения (23)), для которой $A = 0$ и, соответственно, $H = 0$. Вторая ветвь (выражения (24)), для которой $A = -ac^2/2$, закон сохранения не обеспечивает.

Для численного решения вместо задачи (21) с двухточечными краевыми условиями (22) удобно рассмотреть эквивалентную одноточечную краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} \hat{q} &= -\partial_\varrho (\hat{q}^3 \hat{\mu}), \\ \frac{3}{5} \hat{\mu} &= 2\partial_\varrho \varrho \left(\frac{4}{5} \hat{\mu} + \hat{q}_\varrho (1 + 2\hat{q} \hat{\mu}^2) \right), \\ \hat{q}(0) &= 1, \quad \hat{q}_\varrho(0) = 0, \quad \hat{\mu}(0) = m \end{aligned}$$

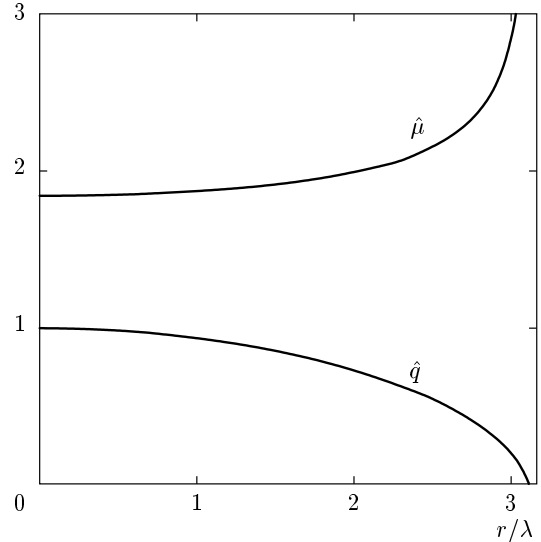


Рис. 3. Структурные функции \hat{q} и $\hat{\mu}$ для радиально симметричного коллапса в режиме НРТ

и решать ее методом «пристрелки», используя m в качестве пристрелочного параметра. Изменяя этот параметр, мы выходим при $m = 1.84215$ на эталонное решение (рис. 3), для которого $a = 4.84504$.

4. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ КОЛЛАПСА В РЕЖИМЕ НРТ

Пусть задан ограниченный объем жидкости. Тогда центр инерции, характеризующий перемещение этого объема как целого, определяется вектором

$$\mathbf{r}_0 = Q^{-1} \int \mathbf{r} q d\mathbf{r}.$$

Отметим, что на основании уравнений движения $\partial_t \mathbf{r}_0 = Q^{-1} \mathbf{P}$ движение центра инерции является равномерным и прямолинейным.

В качестве индикатора коллапса рассмотрим зависящую от времени положительно определенную величину

$$R = Q^{-1} \int (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 q d\mathbf{r} = Q^{-1} \int \mathbf{r}^2 q d\mathbf{r} - \mathbf{r}_0^2.$$

Тестирование на автомодельном решении (8) показывает, что $R = (\beta_1^2 + \beta_2^2)/5$, и, следовательно, величина R обращается в нуль одновременно с β_1 и β_2 . Таким образом, использование R в качестве критерия целесообразно только при наличии изотропного коллапса.

Рассмотрим теперь вопрос о критерии коллапса для пространственно-локализованных распределений q , полагая что начальные условия таковы, что их эволюция протекает в рамках уравнений (19), описывающих режим НРТ.

В основе этих уравнений, с одной стороны, лежит неравенство $I_1 \ll I_2$, а с другой стороны, —

$$P^2 \leq 2QI_1,$$

поэтому легко сделать вывод, что в режиме НРТ могут находиться относительно «медленные» течения, у которых кинетическая энергия $P^2/2Q$, связанная с перемещением центра инерции, мала по сравнению с потенциальной энергией I_2 .

Из уравнений движения (19) следует, что

$$R_t = -\frac{4}{3} \int q^3 \mu \, d\mathbf{r}, \tag{25}$$

$$R_{tt} = -4 \int \left(q^3 \mu^2 (\nabla q)^2 + \frac{2}{3} q^4 \mu (\nabla q \cdot \nabla \mu) + \frac{1}{3} q^5 (\nabla \mu)^2 + q^2 (\nabla q)^2 \right) d\mathbf{r}.$$

Использование этих равенств, а также оценок

$$R_t^2 = \frac{4}{9} \left(\int \mathbf{r} \nabla (q^3 \mu) \, d\mathbf{r} \right)^2 \leq 4R \int (q^3 \mu^2 (\nabla q)^2 + \frac{2}{3} q^4 \mu (\nabla q \cdot \nabla \mu) + \frac{1}{9} q^5 (\nabla \mu)^2) \, d\mathbf{r},$$

$$I_2^3 \leq \frac{5^2}{2^7} RQ \int q^2 (\nabla q)^2 \, d\mathbf{r}, \quad I_2 \geq \max(H, 0)$$

позволяет найти мажорирующее неравенство

$$RR_{tt} + R_t^2 \leq -C\theta(H). \tag{26}$$

Здесь $C = 2^9 5^{-2} Q^{-1} H^3$ — константа, а $\theta(H)$ — та-та-функция: $\theta(H) = 1$, если $H > 0$, и $\theta(H) = 0$, если $H \leq 0$.

Неравенство (26) заменой $R^2 = A$ приводится к виду $A_{tt} \leq -2C\theta(H)$ и легко интегрируется:

$$A \leq -C\theta(H) (t_0 - t)^2 - B (t_0 - t). \tag{27}$$

Константы интегрирования B и t_0 определяются начальными условиями. Соотношение (27) подразумевает, что коллапсу соответствуют решения, на которых A на финальной стадии с ростом t убывает и в некоторый момент $t = t_0 > 0$ достигает значения $A = 0$.

Если $H > 0$, изотропный коллапс в режиме НРТ наступает всегда. Если же $H \leq 0$, достаточным критерием коллапса является условие отрицательности B , что влечет за собой условие $R_t(0) < 0$. Таким образом, принимая во внимание выражение (25), можно сделать вывод, что при $H \leq 0$ изотропный коллапс в режиме НРТ наступает лишь при условии

$$\int q^3 \Delta p \, d\mathbf{r} \geq 0,$$

которое должно соблюдаться для начальных данных, т. е. в момент времени $t = 0$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обобщим основные результаты работы. Прежде всего отметим, что в рамках 3D-модели не только нашли подтверждение, но и получили дополнительную аргументацию решения, описывающие режимы неустойчивости в плоской модели [9]. В частности, выяснилось, что коллапсы в плоской модели — это идеализация, которой в 3D-модели соответствуют решения, коллапсирующие не в точку, а в отрезок.

Итоговая классификация коллапсов, вызывающих обострение поверхности раздела $q \propto (t_0 - t)^\gamma$, представлена в таблице. Показатели коллапсов для режима НРМ приведены во второй колонке, а для режима НРТ — в третьей. Из таблицы видно, что самым быстрым является изотропный коллапс в режиме НРМ, а самым медленным — неизотропный коллапс в режиме НРТ.

Установлено, что, так же как и в 2D-моделях, в 3D-моделях коллапсы развиваются на локализованных фрагментах течения с нулевым импульсом. При этом, в отличие от своих плоских аналогов, неизотропно коллапсирующие 3D-фрагменты могут развиваться при любом знаке интеграла H .

Для находящихся в режиме НРТ течений общего вида установлен интегральный критерий изотропно-го коллапса, который при $H \leq 0$ накладывает ограничение на класс начальных данных.

Таблица. Показатели коллапсов в режимах НРМ и НРТ

Тип коллапса	Режим	
	НРМ	НРТ
Неизотропный	$\gamma = -1/3$	$\gamma = -2/7$
Изотропный	$\gamma = -1/2$	$\gamma = -2/5$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-05-00274а), Программы президиума РАН «Фундаментальные проблемы нелинейной динамики» и гранта Президента РФ (НШ-4166.2006.5).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Уравнения (1), (2) — это по существу уравнения движения Захарова [12] с учетом специфики рассматриваемой здесь модели. Все, что нужно для их вывода, — гамильтониан, который, как известно [13], совпадает с полной энергией с точностью до казимиров — аддитивных и сохраняющихся величин, не дающих вклада в уравнения движения.

В случае несжимаемой жидкости единичной плотности, ограниченной сверху свободной границей $x_3 = q$, а снизу плоским склоном $x_3 = 0$, полная энергия и, следовательно, гамильтониан выражаются через интеграл

$$H = \int d\mathbf{r} \int_0^q dx_3 \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + x_3 g \cos \vartheta \right), \quad (28)$$

где \mathbf{v} — гидродинамическая скорость, g — ускорение сил тяжести, угол ϑ — крутизна склона. Отметим, что движение жидкости рассматривается в системе декартовых координат (x_1, x_2, x_3) , движущейся с ускорением $g \sin \vartheta$ вниз вдоль склона таким образом, что координаты $\mathbf{r} = (x_1, x_2)$ лежат в плоскости склона. Поэтому вклад в потенциальную энергию дает только нормальная компонента силы тяжести $g \cos \vartheta$, прижимающая жидкость к склону.

Для потенциальных движений несжимаемой жидкости гамильтониан (28) можно переформулировать в терминах всего двух поверхностных переменных, $q(\mathbf{r}, t)$ и

$$p(\mathbf{r}, t) = -\varphi|_{x_3=q} \quad (29)$$

(φ — гидродинамический потенциал), характеризующих границу раздела.

Принимая во внимание, что

$$\mathbf{v} = \left(\nabla \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right),$$

где ∇ — двумерный градиент в плоскости склона, из выражения (28) после интегрирования получим

$$H = \frac{1}{2} \int \left(p \left(\nabla q \cdot \nabla \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right)_{x_3=q} + q^2 g \cos \vartheta \right) d\mathbf{r}. \quad (30)$$

Чтобы исключить φ , на основании условий несжимаемости, непроницаемости склона и соотношения (29), которое будем трактовать как краевое условие, сформулируем краевую задачу:

$$\left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \varphi = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} = 0, \quad \varphi|_{x_3=q} = -p, \quad (32)$$

где Δ — двумерный лапласиан в плоскости склона.

С учетом первого краевого условия в (32), общее решение задачи (31) ищем в виде фурье-разложения

$$\varphi = \int \text{ch}(x_3|\mathbf{k}|) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} A_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}. \quad (33)$$

Разлагая функцию $\text{ch}(x_3|\mathbf{k}|)$ в формальный ряд теории возмущений,

$$\text{ch}(x_3|\mathbf{k}|) = 1 + \frac{x_3^2 \mathbf{k}^2}{2!} + \frac{x_3^4 \mathbf{k}^4}{4!} \dots,$$

легко показать, что решение (33) можно записать как

$$\varphi = \left(1 - \frac{x_3^2}{2!} \Delta + \frac{x_3^4}{4!} \Delta^2 \dots \right) A = \cos(x_3 \Delta^{1/2}) A.$$

Подставляя это решение во второе краевое условие в (32), получаем псевдодифференциальное уравнение для функции A :

$$\cos(q \Delta^{1/2}) A = -p. \quad (34)$$

При решении уравнения (34) в первом приближении нелинейной дисперсии [14] следует учитывать члены не старше второго порядка по производным $\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2$. Руководствуясь этим правилом и разлагая псевдодифференциальный оператор $\cos(q \Delta^{1/2})$ в ряд теории возмущений, из уравнения (34) нетрудно найти приближенное решение

$$A = - \left(1 + \frac{q^2}{2} \Delta \right) p,$$

а затем и приближенный гамильтониан модели

$$H = \frac{1}{2} \int \left(q (\nabla p)^2 - \frac{q^3}{3} (\Delta p)^2 + q^2 g \cos \vartheta \right) d\mathbf{r}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Иногамов, А. Ю. Демьянов, Э. Е. Сон, *Гидродинамика перемешивания*, Изд-во МФТИ, Москва (1999).
2. E. A. Kuznetsov and V. E. Zakharov, *Lect. Notes in Phys.* **542**, 3 (2000).
3. Е. А. Кузнецов, *Изв. вузов, радиофизика* **56**, 342 (2003).
4. J. Eggers and M. A. Fontelos, *Nonlinearity* **22**, R1 (2009).
5. E. A. Kuznetsov, D. M. Spector, and V. E. Zakharov, *Phys. Lett. A* **182**, 387 (1993).
6. Н. А. Иногамов, *ЖЭТФ* **107**, 1596 (1995).
7. B. W. Zeff, B. Kleber, J. Fineberg, and D. P. Lathrop, *Nature* **403**, 401 (2000).
8. Н. М. Зубарев, *ЖЭТФ* **134**, 779 (2008).
9. В. П. Гончаров, В. И. Павлов, *ЖЭТФ* **138**, 137 (2010).
10. Г. И. Баренблатт, *Подобие автомодельность, промежуточная асимптотика*, Гидрометеиздат, Ленинград (1982).
11. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, Москва (1977).
12. В. Е. Захаров, *ПМТФ* № 2, 86 (1968).
13. В. П. Гончаров, В. И. Павлов, *Гамильтонова вихревая и волновая динамика*, Геос, Москва (2008).
14. P. Rosenau, *Notices of the AMS* **55**, 738 (2005).