ЖЭТФ, 2011, том 140, вып. 5 (11), стр. 835–843

ФЕРМИОН-ФЕРМИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В РАЗБАВЛЕННОЙ БОЗЕ-КОНДЕНСИРОВАННОЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ

Т. И. Могилюк*

Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия

Поступила в редакцию 19 ноября 2010 г.

Рассматривается смесь однокомпонентного бозе-газа и двухкомпонентного ферми-газа при температурах, при которых бозе-газ почти полностью находится в конденсированном состоянии. В такой смеси два фермиона могут взаимодействовать друг с другом, обмениваясь бозонами из конденсата или надконденсата. Вычисляются потенциал взаимодействия, изменение эффективной массы, затухание и спектр фермионов в такой квантовой ферми–бозе-смеси.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время проводится значительное число исследований явления бозе-эйнштейновской конденсации после ее реализации в атомных газах щелочных металлов Rb [1], Li [2] и Na [3]. Обзор экспериментов и теории можно найти в [4]. Возможность значительно охладить газ фермионов в область квантового вырождения, продемонстрированная в газах ^{40}K [5] и ^{6}Li [6], дает толчок для будущих направлений к достижению фермионным газом перехода в сверхтекучее состояние, подобное сверхпроводимости БКШ. Разреженный ферми-газ в случае отрицательной длины рассеивания обладает сверхтекучим фазовым переходом, связанным с куперовским синглетным спариванием при некоторой критической температуре [7]

$$T_c = \frac{\gamma}{\pi}\left(\frac{2}{e}\right)^{7/3}\epsilon_F \exp\left(-\frac{1}{\lambda}\right),$$

где ϵ_F — энергия Ферми, $\ln\gamma = 0.577$ — постоянная Эйлера. Константа связи λ, выраженная в единицах ферми-импульса p_F и длины рассеяния a, равна $\lambda = 2p_F|a|/\pi$. (Здесь и дальше $\hbar = 1$ и $k_B = 1$.) Прямое s-рассеяние фермионов может быть реализовано с использованием атомов в различных сверхтонких состояниях.

Смесь разбавленного ферми-газа и конденсированного бозе-газа также представляет интерес. Действительно, вырожденные ферми–бозе-смеси могут дать альтернативный и дополнительный подход к ферми-сверхтекучести, где эффективное фермион-фермион взаимодействие осуществляется через обмен бозонами. Такое косвенное взаимодействие аналогично электрон-электронному взаимодействию через обмен фононами в обычном металле. В случае притяжения между ферми-атомами открывается возможность для перехода ферми-компоненты в сверхтекучее состояние. Реализация такой возможности рассматривалась в работе [8]. Хорошо известным примером такой возможности, хотя до сих пор еще не реализованным экспериментально, является разбавленный жидкий раствор ^{3}He в сверхтекучем ^{4}He [9, 10]. В свою очередь, случай разбавленной газовой ферми–бозе-смеси очень интересен и с теоретической точки зрения, поскольку позволяет проводить аналитические вычисления благодаря возможности использовать приближение разреженного газа. Исследование физических свойств квантовой ферми–бозе-смеси должно опираться на детальное понимание взаимодействий между атомами, которые характеризуются следующими затравочными параметрами: длинами s-рассеяния двух бозонов, бозона и фермиона, двух фермионов. Если все фермионы в смеси находятся в одинаковом спиновом состоянии, то прямое фермион-фермионное взаимодействие можно не рассматривать, так как прин-

*E-mail: 5taras@mail.ru

цип Паули запрещает s-рассеяние между одинаковыми фермионами и остается p-рассеяние, которое в полностью спин-поляризованном ферми-газе имеет порядок $(p_F a)^3$ по газовому параметру. Эти вопросы анализировались для раствора ^{3}He–^{4}He [10] и для атомарных газов [11, 12]. В неполяризованном или частично-поляризованном ферми-газе фермион-фермионное взаимодействие, возникающее в порядке $(p_F a)^2$ по газовому параметру, может приводить к p-спариванию по механизму Кона–Латтинжера. Этот механизм спаривания на примере объемного и двумерного растворов ^{3}He–^{4}He рассмотрен в обзоре [13].

Типичные примеры газовых ферми–бозе-смесей, которые исследуются в последнее время, — это ^{40}K–^{87}Rb [14, 15], ^{6}Li–^{23}Na [16]. Отношение скорости звука в бозонной подсистеме к скорости Ферми в этих смесях обычно невелико, $c/v_F = 0.05$–$0.5 < 1$. Отношение фермионной плотности n_F к бозонной n_B составляет примерно 0.5 [17]. Для смеси ^{40}K–^{87}Rb длина рассеяния бозонов $a_{BB} \approx 100a_0$, а фермиона на бозоне $a_{FB} \sim -200a_0$, где a_0 — боровский радиус. Сейчас появляется возможность в смеси ^{40}K–^{87}Rb регулировать в широких пределах длину a_{FB} фермион-бозонного рассеяния с помощью метода резонанса Фешбаха [18]. Здесь мы не будем касаться вопросов, связанных с расслоением смеси [19].

2. МОДЕЛЬ. ЭФФЕКТИВНОЕ ФЕРМИОН-ФЕРМИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Рассмотрим однородную смесь ферми- и бозе-газов при температуре значительно ниже температуры бозе-эйнштейновской конденсации, при которой бозе-компонента находится в конденсированном состоянии. Как и в металле, в этой смеси два фермиона могут косвенно взаимодействовать друг с другом при помощи обмена фононами. В неидеальном бозе-газе существуют два типа частиц, составляющих соответственно конденсатную и надконденсатную части. Первый тип косвенного взаимодействия, присущий бозе-газу, связан с обменом конденсат-надконденсатными частицами. Это приводит к короткодействующим силам типа потенциала Юкавы. Второй тип, связанный с обменом надконденсат-надконденсатными частицами, существует также и в нормальном неконденсированном состоянии. По сравнению с первым, второй тип взаимодействия слабее, но имеет дальнодействующий характер и медленно убывает на бесконечности.

Наше рассмотрение мы начинаем с действия в представлении Мацубары, заданном на мнимом времени τ на отрезке $(0, 1/T)$. Действие для всей системы состоит из трех членов (объем системы $v = 1$):

$$S = S_B + S_F + S_i. \tag{1}$$

Здесь S_B — действие, связанное с бозе-подсистемой,

$$S_B = \int dx\, \Phi^* \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\Delta}{2m} - \mu_B + g\Phi^*\Phi \right) \Phi, \tag{2}$$

где Φ — бозонное поле, Δ — оператор Лапласа, μ_B — химический потенциал бозонов, $x = (\mathbf{r}, \tau)$ и $\mathbf{r}$ — пространственная координата. Как обычно, $g = 4\pi a_{BB}/m$ — константа взаимодействия между бозонами, m — масса бозе-атома.

Действие S_F, ответственное за ферми-подсистему, дается выражением

$$S_F = \int dx \sum_\sigma \Psi_\sigma^* \times \\ \times \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\Delta}{2M} - \mu_F + g_f \Psi_{-\sigma}^* \Psi_{-\sigma} \right) \Psi_\sigma, \tag{3}$$

где Ψ_σ — фермионное поле, μ_F — химический потенциал фермионов, M — их масса, σ — спин ферми-частицы. Рассматриваем простейший случай $\sigma = 1/2$.

Наконец, введем член, связанный со взаимодействием V между фермионами и бозонами,

$$S_i = \int dx\, dx' \sum_\sigma \Phi^*(x) \Psi_\sigma^*(x') \times \\ \times u(x - x') \Psi_\sigma(x') \Phi(x) \equiv \int dx\, \Phi^*(x) V(x) \Phi(x). \tag{4}$$

Для удобства обозначим взаимодействие между ферми- и бозе-атомами как $u(x - x') = u(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \delta(\tau - \tau')$, для того чтобы сделать интегрирование по времени симметричным.

Для изучения свойств системы мы должны рассчитать статистическую сумму

$$Z = \int \mathcal{D}^2\Psi\, \mathcal{D}^2\Phi\, e^{-S}. \tag{5}$$

Схема вычислений полностью аналогична методам, используемым в работах [20–22]. Следуя методу Боголюбова разделения переменных операторов бозе-поля на конденсатную и надконденсатную части, выделим не зависящую от пространственной координаты часть c_0 бозонного поля Φ,

$$\Phi(x) = c_0(\tau) + \phi(x). \tag{6}$$

Для получения эффективного фермионного действия мы должны проинтегрировать по всем переменным бозонного поля. Интегрирование проведем в два этапа. Сначала проинтегрируем по надконденсатной переменной поля $\phi(x)$. Тогда статистическая сумма примет вид

$$Z = \int \mathcal{D}^2\Psi \exp(-S_F) \int \mathcal{D}^2 c_0 \, \exp(-S_0 - S_\phi) = \\ = \int \mathcal{D}^2\Psi \exp\bigl(-S_{eff}[\Psi^*, \Psi]\bigr), \tag{7}$$

где

$$S_0 = \int d\tau \, c_0^* \left(\frac{\partial}{\partial\tau} + V(0) - \mu_B + \frac{g}{2}c_0^* c_0\right) c_0, \\ V(0) = \int d\mathbf{r} \, V(\tau, \mathbf{r}), \tag{8}$$

$$S_\phi = \mathrm{Tr}\ln(\widehat{G}^{-1} + \widehat{V}) - \mathrm{Tr}\frac{1}{2}A^+(\widehat{G}^{-1} + \widehat{V})^{-1}A, \tag{9}$$

$$\exp(-S_{eff}) = \int \mathcal{D}^2\Phi \exp(-S),$$

операция взятия следа также подразумевает и интегрирование по координате и времени, матрица взаимодействия диагональна,

$$\widehat{V} = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & \bar{V} \end{pmatrix} \tag{10}$$

и

$$A^+ = \left(c_0^* V, \, c_0 V\right), \quad A = \begin{pmatrix} V c_0 \\ V c_0^* \end{pmatrix} \tag{11}$$

($\bar{V} = V^\dagger$ в отсутствие магнитного поля; это обозначение справедливо и для величин G и Σ).

Обратная и прямая матрицы функции Грина даются выражениями [23]

$$\widehat{G}^{-1} = \begin{pmatrix} G_0^{-1} + \Sigma_{11} & \Sigma_{20} \\ \Sigma_{02} & \bar{G}_0^{-1} + \bar{\Sigma}_{11} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$\widehat{G} = \begin{pmatrix} G & F \\ F^* & \bar{G} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Здесь F и F^* — аномальные бозонные функции Грина, а G_0 определяется соотношением

$$G_0^{-1}(x) = \frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\Delta}{2m} + V(x) - \mu_B. \tag{14}$$

Собственно-энергетические части в приближении малой плотности равны [23, 24]

$$\Sigma_{11} \approx 2gc_0^* c_0, \quad \Sigma_{02} \approx gc_0^* c_0^*, \quad \Sigma_{02} \approx gc_0 c_0. \tag{15}$$

Для оценки интегрирования по конденсатной части бозонного поля используем квазиклассическое приближение метода перевала для конденсата, т. е. не учитываем флуктуации конденсата в силу макроскопичности его чисел заполнения,

$$c_0^* \approx c_0 \approx \sqrt{n_0}, \tag{16}$$

где n_0 — плотность частиц в конденсате.

В дальнейшем мы исследуем только первый и второй порядки разложения эффективного действия по фермион-бозонному взаимодействию V. Раскладывая S_ϕ по V, имеем

$$S_\phi \approx \mathrm{Tr}\ln\widehat{G}^{-1} + \mathrm{Tr}(\widehat{G}\widehat{V}) - \\ - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\widehat{G}\widehat{V}\widehat{G}\widehat{V}) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A^+\widehat{G}A). \tag{17}$$

Первый член не зависит от фермионных переменных и имеет смысл изменения общего уровня энергии. Второй член разложения равен

$$\int dx \left[G(x, x)V(x) + \bar{G}(x, x)\bar{V}(x)\right] = \\ = \int dx \, dx' \sum_\sigma \Psi_\sigma^*(x') \times \\ \times \bigl[G(x, x) + \bar{G}(x, x)\bigr] u(x - x')\Psi_\sigma(x'). \tag{18}$$

Таким образом, первый порядок разложения по V приводит к перенормировке химического потенциала фермионов:

$$-\int dx' \left[G(x', x') + \bar{G}(x', x')\right] u(x' - x) = \\ = -\bigl[G(0) + \bar{G}(0)\bigr] u(0), \tag{19}$$

пропорциональной константе взаимодействия и плотности $n' = n - n_0$ надконденсатных бозе-частиц.

Преобразуя третье и четвертое слагаемые в выражении (17), находим

$$-\int \frac{dx}{2} dx' \bigl[G_{xx'}V_{x'}G_{x'x}V_x + F_{xx'}\bar{V}_{x'}F^*_{x'x}V_x + \\ + F^*_{xx'}V_{x'}F_{x'x}\bar{V}_x + \bar{G}_{xx'}\bar{V}_{x'}\bar{G}_{x'x}\bar{V}_x\bigr] - \\ - \int \frac{dx}{2} dx' \bigl[c_0^* V_{x'} G_{x'x} V_x c_0 + c_0 \bar{V}_{x'} F^*_{x'x} V_x c_0 + \\ + c_0 V_{x'} F_{x'x} \bar{V}_x c_0^* + c_0 \bar{V}_{x'} \bar{G}_{x'x} \bar{V}_x c_0^*\bigr].$$

Далее, учитывая приближение (16) и определение (4) для V, преобразуем эти члены к следующему виду:

$$\frac{1}{2}\int dx\,dx' \sum_{\sigma\sigma'} \Psi^*_\sigma(x)\Psi^*_{\sigma'}(x') \times \times U_{eff}(x-x')\Psi_{\sigma'}(x')\Psi_\sigma(x). \quad (20)$$

Таким образом, во втором порядке разложения по V возникает эффективное фермион-фермионное взаимодействие

$$U_{eff}(x-x') = -\int u(x,y) \times \times \Pi(y,y')u(y',x')\,dy\,dy' \quad (21)$$

(выражение для $\Pi(y,y')$ выписано ниже). В случае точечного взаимодействия $u(\mathbf{r}) = u(0)\delta(\mathbf{r})$. Когда величина $u(0)$ связана с длиной a_{BF} s-рассеяния через приведенную массу бозона и фермиона $m^* = mM/(m+M)$ согласно $u(0) = 2\pi a_{BF}/m^*$, выражение для эффективного взаимодействия упрощается:

$$U_{eff} = -u^2(0)\Pi(x-x'). \quad (22)$$

В фурье-представлении оператор $\Pi(\mathbf{r},\tau)$, описывающий корреляции флуктуаций плотность–плотность в бозе-конденсированной среде, дается выражением

$$\begin{aligned}\Pi(k,\omega_n) &= \Pi_{cn}(k,\omega_n) + \Pi_{nn}(k,\omega_n) = \\ &= n_0\Big[G_{\omega_n}(k) + \bar{G}_{\omega_n}(k) + F_{\omega_n}(k) + F^*_{\omega_n}(k)\Big] + \\ &+ T\sum_{\epsilon_m}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\Big[G_{\epsilon_m}(p)G_{\epsilon_m-\omega_n}(p-k) + \\ &+ \bar{G}_{\omega_m}(p)\bar{G}_{\epsilon_m-\omega_n}(p-k) + F_{\epsilon_n}(k)F^*_{\epsilon_m-\omega_n}(p-k) + \\ &+ F^*_{\epsilon_n}(k)F_{\epsilon_m-\omega_n}(p-k)\Big], \end{aligned} \quad (23)$$

где $\omega_n = \epsilon_n = 2\pi nT$. Выражения для фурье-компонент функций Грина слабонеидеального бозе-газа можно найти в работах [23, 24]. Вычисление конденсат-надконденсатной части, которая имеется только в бозе-конденсированной среде, не сложно:

$$\Pi_{cn}(k,\omega_n) = 2n_0\frac{\eta_k}{\omega_n^2+\epsilon_k^2}. \quad (24)$$

Здесь обозначено

$$\eta_k = \frac{k^2}{2m}, \quad \epsilon_k = \sqrt{\eta_k^2 + 2\Delta\eta_k}, \quad \Delta = mc^2, \quad (25)$$

ϵ_k — спектр возбуждений Боголюбова и c — скорость звука в бозонной подсистеме. Подчеркнем, что поляризационный оператор исчезает в высокочастотном пределе $\omega_n \to \infty$. Статическое выражение дает короткодействующий потенциал Юкавы:

$$\Pi_{cn}(r) = \frac{mn_0}{\pi r}e^{-r/\xi}, \quad (26)$$

где $\xi = 1/2\sqrt{m\Delta}$ — длина когерентности.

Вычисление в выражении (23) второго слагаемого, которое также существует в неконденсированной бозе-среде, более затруднительно. Эта добавка становится существенной на больших расстояниях или при малых длинах волн из-за дальнодействующего характера взаимодействия. Для простоты рассмотрим статическое поведение поляризационного оператора при нулевой температуре $T = 0$,

$$\Pi_{nn}(k,0) = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3} \times \times \left(1 - \frac{(\eta_p+\Delta)(\eta_{p-k}+\Delta)+\Delta^2}{\epsilon_p\epsilon_{p-k}}\right)\frac{1}{\epsilon_k+\epsilon_{p-k}}, \quad (27)$$

с асимптотическим поведением

$$\Pi_{nn}(k,0) = \frac{\Delta^2}{2\pi^2c^3}\begin{cases}\ln(2/k\xi)+\pi-4, \\ k\xi \ll 1, \\ 6/3k\xi^2,\ k\xi \gg 1.\end{cases} \quad (28)$$

Соответствующее пространственное поведение дается выражениями

$$\Pi_{nn}(r) = \frac{\Delta^2}{(2\pi c)^3}\begin{cases}1/r^3, & r \gg \xi, \\ 2/3\xi^2 r, & r \ll \xi.\end{cases} \quad (29)$$

Дальнодействующая часть взаимодействия, отвечающая обмену двумя надконденсатными бозонами, слабее по газовому параметру, чем короткодействующая часть, связанная с обменом конденсатным и надконденсатным бозонами. Их отношение на характерном расстоянии $r \sim \xi$ порядка

$$\frac{\Pi_{nn}(r\sim\xi)}{\Pi_{cn}(r\sim\xi)} \sim \sqrt{n_0 a_{BB}^3} \ll 1.$$

Влияние конечной температуры проявляется только на больших расстояниях $r \gg c/T$ и приводит к более медленному убыванию величины $\Pi_{nn}(r)$, пропорциональному T/r^2. В физическом смысле дальнодействующая часть фермион-фермионного взаимодействия аналогична силе Казимира между двумя атомами, обменивающимися фотонами.

3. ЭФФЕКТИВНАЯ МАССА ФЕРМИОНА В СЛУЧАЕ ВЫРОЖДЕННОЙ ФЕРМИ-КОМПОНЕНТЫ

Фермион-фермионное взаимодействие возникает вследствие испускания и поглощения бозонов. Рассмотрим следующую ситуацию. Фермионы образуют достаточно разреженный газ в конденсированном бозе-газе. При достаточно малой концентрации фермионов их взаимодействием друг с другом мы можем пока пренебречь. В то же время каждый отдельный фермион, двигаясь в газе бозонов, поляризует вокруг себя бозевскую подсистему. Фермион, одетый таким поляризованным бозонным облаком, подобен полярону в случае электрон-фононного взаимодействия.

Фермион-фермионное взаимодействие имеет вид

$$U_{eff}(\omega, k) = -u^2(k)\Pi(\omega, k), \tag{30}$$

где $\Pi(\omega, k) = \Pi_{cn}(\omega, k) + \Pi_{nn}(\omega,\, k)$ — поляризационный оператор бозе-конденсированной среды. Ниже мы рассмотрим влияние большего короткодействующего слагаемого Π_{cn}. В низшем порядке по взаимодействию имеются две диаграммы. Им отвечают выражения, соответствующие первой и второй диаграммам, соответственно

$$-2iu^2(0)\Pi_{cn}(0,0)\int G_0(\omega, p_1)\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \tag{31}$$

и

$$-2i\int u^2(k)G_0\,(\epsilon-\omega, p-k)\Pi_{cn}(\epsilon, k)\frac{d^4k}{(2\pi)^4}, \tag{32}$$

где поляризационный оператор $\Pi_{cn}(\omega, k)$ дается выражением, имеющим сходство с функцией Грина для фононов в металле,

$$\Pi_{cn}(\omega, k) = -2n_0\,\frac{\eta_k}{\omega^2-\epsilon_k^2+i\delta}, \tag{33}$$

где $\delta \to 0$. Первая диаграмма обращается в нуль, потому что равен нулю поляризационный оператор $\Pi_{cn}(\omega, k)$ при нулевом импульсе k, как и для случая электрон-фононного взаимодействия. Вторая диаграмма дает ненулевой вклад

$$\Sigma_{cn}(\epsilon, \mathbf{p}) = -\frac{i}{(2\pi)^4}\iint u^2(k)\;\times \\ \times\, G_0(\epsilon-\omega, \mathbf{p}-\mathbf{k})\Pi_{cn}(\omega, \mathbf{k})\,d\omega\,d^3k. \tag{34}$$

Ниже для простоты мы проводим вычисления для случая равных масс бозона и фермиона, $m = M$. При температуре существенно ниже фермиевской фермионы находятся в вырожденном состоянии и необходимо учитывать то, что фермионы не могут переходить в заполненные состояния. Одночастичная функция Грина для фермионов в вырожденном ферми-газе имеет вид

$$G_0(\epsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{\epsilon-\xi_\mathbf{p}+i\delta\,\mathrm{sign}\,\xi_\mathbf{p}}, \tag{35}$$

где $\xi_\mathbf{p}$ — энергия фермиона, отсчитанная от химического потенциала, т. е. $\xi_\mathbf{p} = \eta_\mathbf{p} - \mu$.

Итак, в вырожденном случае собственно-энергетическая часть функции Грина для фермиона имеет вид

$$\Sigma_{cn}(\epsilon, \mathbf{p}) = \frac{2n_0 i}{(2\pi)^4}\int\frac{\eta_\mathbf{k}}{\omega^2-\epsilon_\mathbf{k}^2+i\delta}\,d\omega\,d^3k\;\times \\ \times\,\frac{u^2(k)}{\epsilon-\omega-\xi_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}+i\delta\,\mathrm{sign}\,\xi_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}}. \tag{36}$$

Поправка к собственно-энергетической части при энергиях ϵ, малых по сравнению с химическим потенциалом, и импульсах, близких к импульсу Ферми, имеет вид

$$\mathrm{Re}\,\Sigma_{cn}(\epsilon, p_F) - \Sigma_{cn}(0, p_F) = -b\epsilon, \tag{37}$$

где $\Sigma_{cn}(0, p_F)$ определяет перенормировку химического потенциала фермионов, а коэффициент b зависит от отношения скорости Ферми v_F к скорости звука c.

Обозначим $\beta = M/m$, $\alpha = v_F/c$. При $\beta \ll 1$

$$b \approx \frac{n_0u^2(0)M}{\pi^2c}\begin{cases}\dfrac{\ln\left[1+(\alpha\beta)^2\right]}{2\alpha\beta}, & \alpha \gg \ln\dfrac{1}{\beta},\\[2mm] \beta\ln\dfrac{1}{\beta}, & \alpha \ll \ln\dfrac{1}{\beta},\end{cases} \tag{38}$$

при $\beta = 1$

$$b \approx \frac{n_0u^2(0)M}{\pi^2c}\begin{cases}\dfrac{\ln\alpha}{\alpha}, & \alpha \gg 1,\\[2mm] \dfrac{1}{3}, & \alpha \ll 1,\end{cases} \tag{39}$$

при $\beta \gg 1$

$$b \approx \frac{n_0u^2(0)M}{\pi^2c}\begin{cases}\dfrac{\ln\alpha\beta}{\alpha\beta}, & \alpha \gg 1,\\[2mm] \dfrac{1}{\beta}, & \alpha \ll 1.\end{cases} \tag{40}$$

Множитель перед фигурными скобками выражается через газовый параметр и отношение длин рассеяния:

$$\frac{mn_0}{2\pi^2c}\,u^2(0) = \sqrt{\frac{n_0a_{BB}^3}{\pi}}\,\left(\frac{a_{BF}}{a_{BB}}\right)^2. \tag{41}$$

Перенормированная функция Грина вблизи ферми-поверхности равна

$$G(\epsilon, p) = \frac{1}{\epsilon-\Sigma-\xi_p} = \frac{1}{(1+b)\epsilon-\xi_p+i\gamma(\epsilon)}, \tag{42}$$

где $\gamma(\epsilon)$ — мнимая часть собственно-энергетической части. Амплитуда функции Грина, даваемая вычетом в полюсе, есть $Z = 1/(1+b)$. Закон дисперсии фермионных возбуждений определяется соотношением

$$\epsilon = \frac{\xi_p}{1+b}. \tag{43}$$

Перенормировка массы возбуждений находится из выражения $M^* = M(1+b)$ и соответствует увеличению эффективной массы фермиона. При больших скоростях Ферми, $v_F \gg c$, перенормировка массы убывает как $(c/v_F)\ln(v_F/c)$. В обратном пределе, $v_F \ll c$, перенормировка массы тем больше, чем меньше скорость Ферми по отношению к скорости звука. В этом случае медленно движущийся фермион более эффективно поляризует бозонную подсистему.

Поправка к массе фермиона, обусловленная прямым взаимодействием фермионов, имеет вид [23, 24]

$$\frac{M^*}{M} = 1 + \frac{8(7\ln 2 - 1)}{15}(p_F a_{FF})^2 > 1. \tag{44}$$

Считая, что амплитуды имеют один порядок величины, $a_{BB} \sim a_{BF} \sim a_{FF} \sim a$, легко видеть, что, пока импульс Ферми удовлетворяет неравенству

$$\frac{p_F^3}{n_0} \lesssim \left(\frac{\pi}{n_0 a^3}\right)^{1/4},$$

вклад от взаимодействия с бозонами преобладает и является основным. Фактически это имеет место при всех возможных концентрациях фермионов. Мнимая часть собственно-энергетической части вблизи ферми-поверхности равна

$$\begin{aligned}\gamma(\epsilon) = -\frac{n_0 u^2(0)}{4\pi} \times \\ \times \int_0^\infty dk \frac{k^2\eta_k}{\epsilon_k} \int_{-1}^{1} dt\, \mathrm{sign}\left[\frac{p_F k}{M}\left(\frac{k}{2p_F} - t\right)\right] \times \\ \times \delta\left\{\epsilon - \frac{p_F k}{M}\left(\frac{k}{2p_F} - t\right) - \right. \\ \left. -\epsilon_k\, \mathrm{sign}\left[\frac{p_F k}{M}\left(\frac{k}{2p_F} - t\right)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{45}$$

Опустив вычисления, выпишем результат в двух предельных случаях:

$$\begin{aligned}\gamma(\epsilon) = -\,\mathrm{Im}\,\Sigma(\epsilon, p_F) = \frac{n_0 c M^2 \alpha^6 \beta}{64\pi} u^2(0) \times \\ \times \frac{1 + v_F/c + (v_F/c)^2/3}{(1+v_F/c)^3}\,\frac{\epsilon|\epsilon|^2}{\mu^3},\end{aligned} \tag{46a}$$

при

$$|\epsilon| \ll \frac{4\mu v_F}{c}\sqrt{1 + \left(\frac{M v_F}{mc}\right)^2},$$

и

$$\gamma(\epsilon) = \frac{n_0 u^2(0) M^{3/2}}{\sqrt{2}\pi (M/m+1)^{3/2}}\sqrt{\epsilon} \tag{46b}$$

при

$$|\epsilon| \gg \frac{4\mu v_F}{c}\sqrt{1 + \left(\frac{M v_F}{mc}\right)^2}.$$

Если считать, что энергия $\Delta = mc^2$ играет роль дебаевской частоты ω_D, то при малых энергиях зависимость затухания фермиона от энергии в бозе-смеси такая же, как и для электронов в металле, т. е. порядка ϵ^3. При энергиях, превышающих Δ или ω_D, имеется различие. Для электронов при $\epsilon \gg \omega_D$ затухание не зависит от энергии [23, 24]. В типичных смесях ^{40}K–^{87}Rb, ^{6}Li–^{23}Na для отношения скорости звука к фермиевской скорости имеем $c/v_F \sim 0.05$–$0.5 < 1$.

Сравним фермион-фермионное затухание, равное примерно ϵ^2/μ [24] с затуханием (46). Приравняв ϵ^2/μ выражению для $\gamma(\epsilon)$ при $|\epsilon| \ll 4\mu\alpha\sqrt{1+(\alpha\beta)^2}$, получим

$$\epsilon_0 \equiv \frac{16\mu(1+\alpha)^3}{\alpha^4\beta^3\sqrt{\pi n_0 a_{BB}^3}(a_{BF}/a_{BB})^2(1+\alpha+\alpha^2/3)}. \tag{47}$$

При $\epsilon < \epsilon_0$ преобладает фермион-фермионное затухание частиц. Полагая $M = m$ $(\beta = 1)$, $a_{FB} = a_{BB}$, $\sqrt{n_0 a_{BB}^3} \ll 1$ и приравнивая ϵ_0 в (47) химическому потенциалу μ, можно получить, что в области относительно умеренного затухания квазичастиц $|\epsilon| \lesssim \mu$ при $\alpha = v_F/c \gg (n_0 a_{BB}^3)^{-1/6}$ затухание $\gamma(\epsilon)$ преобладает. В случае $|\epsilon| \gg 4\mu\alpha\sqrt{1+(\alpha\beta)^2}$ затухание вдали от ферми-поверхности будет сильным и приближение слабозатухающих квазичастиц будет некорректно.

4. ЭФФЕКТИВНАЯ МАССА ФЕРМИОНА ДЛЯ НЕВЫРОЖДЕННОЙ ФЕРМИ-КОМПОНЕНТЫ

Рассмотрим теперь случай предельно низкой концентрации ферми-компоненты, так что газ фермионов можно считать невырожденным. При малой концентрации фермионов их взаимодействием друг с другом можно пренебречь и рассматривать движение фермиона как движение отдельной частицы.

Тем не менее, двигаясь в окружении бозевской компоненты, фермион возмущает бозевскую среду и вызывает сопутствующую поляризацию. Такой окруженный бозонами фермион во многом аналогичен хорошо известному в полупроводниках полярону.

По сравнению с предыдущим случаем в формуле для собственно-энергетической части

$$\Sigma_{cn}(\epsilon, \mathbf{p}) = -i \iint u^2(k)\, G_0(\epsilon-\omega, \mathbf{p}-\mathbf{k}) \times \times \Pi_{cn}(\omega, \mathbf{k})\, \frac{d\omega\, d^3k}{(2\pi)^4} \quad (48)$$

мы можем использовать функцию Грина свободного фермиона,

$$G_0(\epsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{\epsilon - \mathbf{p}^2/2M + i\,\delta}. \quad (49)$$

Обозначая $\delta\epsilon = \epsilon - p^2/2M$ и вводя скорость фермиона $v = p/M$, для вещественной части функции Σ_{cn} получим

$$\Sigma'_{cn} = \frac{n_0}{4\pi^2 v} \int_0^\infty dk\, u^2(k)\, \frac{k\eta_k}{\epsilon_k} \times \times \ln\left|\frac{\epsilon_k + k^2/2M - vk - \delta\epsilon}{\epsilon_k + k^2/2M + vk - \delta\epsilon}\right|. \quad (50)$$

Начнем со случая $v \ll c$ и изучим поведение собственно-энергетической части $\Sigma_{cn}(\epsilon, \mathbf{p})$ вблизи массовой поверхности $\epsilon = \mathbf{p}^2/2M$. В этом случае, разлагая под интегралом логарифм, для собственно-энергетической части имеем разложение

$$\Sigma'_{cn}(\epsilon, \mathbf{p}) \approx \Sigma_{cn}(0) - \alpha_1\, \delta\epsilon - \alpha_2\, \frac{\mathbf{p}^2}{2M}. \quad (51)$$

Здесь

$$\Sigma_{cn}(0) = -\frac{n_0}{2\pi^2} \int_0^\infty dk\, u^2(k)\, \frac{k^2\eta_k}{\epsilon_k\left(\epsilon_k + k^2/2M\right)},$$

$$\alpha_1 = \frac{n_0}{2\pi^2} \int_0^\infty dk\, u^2(k)\, \frac{k^2\eta_k}{\epsilon_k\left(\epsilon_k + k^2/2M\right)^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{n_0}{3\pi^2 M} \int_0^\infty dk\, u^2(k)\, \frac{k^4\eta_k}{\epsilon_k\left(\epsilon_k + k^2/2M\right)^3}.$$

В первом интеграле при $k \to \infty$ подынтегральное выражение ведет себя как $u^2(k)\, dk$, т. е. расходится при $u^2(k) = \mathrm{const}$. Обозначим через Λ характерный импульс, на котором спадает фермион-бозонное взаимодействие. Из общих соображений считаем, что Λ порядка обратного боровского радиуса и $\Lambda \gg 1/\xi$. В остальных двух интегралах подынтегральные выражения быстро убывают уже на импульсах $k \gtrsim 1/\xi$, и в них можно положить $u(k) = u(0)$.

Дисперсионное соотношение для фермиона дается уравнением $G_0^{-1} - \Sigma = 0$. Соответственно для перенормировки массы фермиона приближенно имеем

$$\frac{M}{M^*} = 1 - \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1} \approx 1 - \alpha_2 < 1. \quad (52)$$

Величины α_1 и α_2 малы в силу малости газового параметра

$$\sqrt{n_0 a_{BB}^3}\left(\frac{u^2(0)}{2\pi^2}\, \frac{mn_0}{c}\right)^{-1} = \sqrt{\frac{n_0 a_{BB}^3}{\pi}}\left(\frac{a_{FB}}{a_{BB}}\right)^2.$$

Поэтому можно ограничиться приближением $M^* \approx \approx M(1+\alpha_2)$.

Перенормировка массы в трех предельных случаях такова:

$$M^* \approx M\left(1 + \frac{nu^2(0)m\pi}{\pi^2 c}\, \frac{\pi}{3\beta}\right), \quad \beta \gg 1,$$

$$M^* \approx M\left(1 + \frac{nu^2(0)m\pi}{\pi^2 c}\, \frac{8}{45}\right) \times \times \left(1 + \frac{2}{7}(\beta-1) - \frac{3}{7}(\beta-1)^2\right), \quad \beta \approx 1, \quad (53)$$

$$M^* \approx M\left(1 + \frac{nu^2(0)m\pi}{\pi^2 c}\, \frac{4}{3}\beta^2 \ln\frac{1}{\beta}\right), \quad \beta \ll 1.$$

Здесь $\alpha = v/c$, $\beta = M/m$.

Перейдем к вычислению мнимой части собственно-энергетической функции $\Sigma_{cn}(\epsilon, p)$:

$$\Sigma''_{cn}(\epsilon, p) = -\frac{Mn_0}{4\pi p} \times \times \int_0^\infty dk\, u^2(k)\, \frac{k\eta_k}{\epsilon_k} \int_{(p-k)^2/2M+\epsilon_k-\epsilon}^{(p+k)^2/2M+\epsilon_k-\epsilon} \delta(x)\, dx. \quad (54)$$

Рассмотрим сначала характеризующую затухание частицы мнимую часть собственно-энергетической части $\Sigma_{cn}(\epsilon, p)$ на массовой поверхности $\epsilon = p^2/2m$. В этом случае вычисления несложные:

$$\Sigma''_{cn}\left(\epsilon = \frac{p^2}{2m}, p\right) = -\frac{n_0\alpha\beta u^2(0) v M^2}{\pi} \times \times \int_0^\infty dx \frac{x^2\theta\left(1 - x - 1/\alpha\sqrt{1+(\alpha\beta)^2}\right)}{\sqrt{1+(\alpha\beta x)^2}}. \quad (55)$$

Корень уравнения, стоящего в аргументе тета-функции, равен

$$x_0 = \frac{\sqrt{1+\beta^2(\alpha^2-1)} - \alpha}{\alpha(\beta^2-1)}.$$

Частный случай равных масс, $\beta = 1$, $x_0 = = (\alpha^2-1)/2\alpha^2$, можно получить сразу или же предельным переходом из общего результата:

$$
\Sigma''_{cn}\left(\epsilon=\frac{p^2}{2m},p\right)=-\frac{n_0u^2(0)M^2c}{2\pi\alpha\beta^2}\times
\times\begin{cases}0, & \alpha<1,\\ \dfrac{\beta(\alpha(\beta^2+1)\sqrt{1+\beta^2(\alpha^2-1)}-2(\alpha\beta)^2+\beta^2-1)}{(\beta^2-1)^2}-\ln\dfrac{\alpha\beta+\sqrt{1+\beta^2(\alpha^2-1)}}{\beta+1}, & \alpha>1.\end{cases}
\tag{56}
$$

Рассматривая предельные случаи, можно получить

$$
\Sigma''_{cn}\left(\epsilon=\frac{p^2}{2m},p\right)=-\frac{n_0u^2(0)M^2c}{2\pi}\times
\times\begin{cases}0, & \alpha<1,\\ \dfrac{2}{3}\beta(\alpha-1)^3, & \alpha-1\ll 1\,,\\ \dfrac{1}{(\beta+1)^2}\alpha, & \alpha-1\gg 1\,,\end{cases}
$$

или, возвращаясь к размерным параметрам,

$$
\Sigma''_{cn}\left(\epsilon=\frac{p^2}{2m},p\right)=
=\begin{cases}0, & v<c,\\ -\dfrac{n_0u^2(0)M^3}{3\pi mc^2}(v-c)^3, & \dfrac{v-c}{c}\ll 1\,,\\ -\dfrac{n_0u^2(0)M^2m^2}{2\pi(M+m)^2}v, & \dfrac{v-c}{c}\gg 1.\end{cases}
$$

Частный случай $\beta=1$ лучше выписать отдельно:

$$
\Sigma''_{cn}\left(\epsilon=\frac{p^2}{2m},p\right)=-u^2(0)\frac{m\Delta n_0}{8\pi v}\times
\times\begin{cases}0, & \alpha<1,\\ \left(\dfrac{v^2}{c^2}-\dfrac{c^2}{v^2}-4\ln\dfrac{v}{c}\right), & \alpha>1.\end{cases}
\tag{57}
$$

Таким образом, фермион со скоростью, меньшей скорости звука, в первом приближении по газовому параметру $n_0a_{BB}^3$ не может рождать возбуждений в бозонной подсистеме и движется без затухания. Этот результат полностью коррелирует с критерием Ландау для критической скорости. Затухание, которое возникает при $v>c$, полностью аналогично черенковскому излучению заряженной частицы при ее движении со скоростью, большей скорости света в среде. Сравним затухание (57) с фермион-фермионным затуханием. Время рассеяния фермионов оценим как a/v_T, где v_T — тепловая скорость фермионов. Тогда, приравняв $\hbar v_T/a$ выражению (57), можно получить, что при

$$
v\gg\max\left(\frac{hv_T}{amc\sqrt{n_0a^3)}},2c\right)
$$

и

$$
2c\gg v\gg c\sqrt[3]{\frac{hv_T}{amc^2\sqrt{n_0a^3}}}
$$

будет преобладать затухание, связанное с обменом бозе-частицами.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовалось фермион-фермионное взаимодействие в разбавленной газовой ферми–бозе-смеси при температурах ниже точки бозе-эйнштейновской конденсации, когда бозевская компонента находится в конденсированном состоянии. Показано, что фермион-фермионное взаимодействие имеет косвенный характер и возникает в результате обмена бозе-частицами между двумя фермионами в конденсированном или надконденсированном состояниях.

Обмен конденсатной и надконденсатной частицами дает короткодействующий вклад в фермион-фермионное взаимодействие, который имеет вид потенциала Юкавы с радиусом взаимодействия, равным корреляционной длине конденсированного бозе-газа. Обмен двумя надконденсатными частицами ведет к более слабому вкладу во взаимодействие, имеющему дальнодействующий характер в силу степенного убывания с ростом расстояния между фермионами. В пределе больших расстояний характер взаимодействия определяется звуковым спектром надконденсатных частиц и аналогичен по существу взаимодействию Казимира между двумя атомами в квантовой электродинамике, возникающему в результате обмена фотонами.

Изучено влияние бозонной подсистемы на спектр фермионов. Найдена собственно-энергетическая часть в наинизшем приближении по газовому параметру бозонной подсистемы в пределах как вырожденного, так и невырожденного ферми-газа для случая равных масс бозона и фермиона.

Вычислена перенормировка массы фермионных возбуждений в зависимости от отношения скорости ферми-частиц к скорости звука в бозонной подсистеме. Рассмотрен вклад в перенормировку массы и затухание только от Π_{cn}. Вклад Π_{nn} в эти величины не рассматривался, так как он много меньше Π_{cn} по газовому параметру. Тем не менее вклад Π_{nn} подправит ответ: в частности, при $v < c$ может дать малое, но конечное значение. Эффективная масса фермиона всегда увеличивается, указывая на поляронный эффект. Поляронный эффект тем больше, чем меньше скорость фермиона по отношению к скорости звука. Поправка к массе, связанная с прямым фермион-фермионным взаимодействием, оказывается малой по сравнению с поправкой, обусловленной обменом бозонами, пока концентрация бозонов превосходит концентрацию фермионов.

Вычислено затухание ферми-частиц вблизи ферми-поверхности. Затухание, вносимое фермион-бозонным взаимодействием, всегда меньше энергии квазичастиц. В невырожденном газе фермионов затухание определяется излучением фермионом бозонного возбуждения — фонона. Затухание носит пороговой характер и возникает при достижении фермионом скорости звука, что не противоречит критерию Ландау. В этом смысле процесс аналогичен черенковскому излучению фотонов при движении в среде сверхсветовых электронов.

Согласно теореме Мигдала, поправка к вершине электрон-фононного взаимодействия порядка ω_D/ϵ_F, поэтому при малости скорости звука по сравнению со скоростью Ферми, $c/v_F \ll 1$, ей можно пренебречь. В типичных ферми–бозе-смесях, используемых в настоящее время, последнее условие выполняется. Можно ли пренебречь вершинной поправкой при $c/v_F \gg 1$ в работе не исследовано.

Автор благодарен С. Н. Бурмистрову за постановку задачи и обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. H. Andersen, J. P. Ensher, M. R. Matthews et al., Science **269**, 198 (1995).
2. C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hullet, Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995).
3. K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).
4. C. J. Pethick and H. Smith, *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gase*, Cambridge (2002).
5. B. DeMarco, S. B. Papp, and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **86**, 5409 (2001).
6. F. Schreck, G. Ferrari, K. L. Corwin et al., Phys. Rev. A **64**, 011402 (2001).
7. Л. П. Горьков, Т. К. Мелик-Бархударов, ЖЭТФ **13**, 1018 (1961).
8. Wang Daw-wei, Phys. Rev. Lett. **96**, 140404 (2006).
9. J. Bardeen, G. Baym, and D. Pines, Phys. Rev. **156**, 207 (1967).
10. Е. П. Башкин, А. Э. Меерович, УФН **130**, 279 (1980).
11. D. V. Efremov and L. Viverit, Phys. Rev. B **65**, 134519 (2002).
12. M. Yu. Kagan, I. V. Brodsky, D. V. Efremov, and A. V. Klaptsov, Phys. Rev. A **70**, 023607 (2004).
13. М. Ю. Каган, УФН **164**, 77 (1994).
14. S. Inouye, J. Goldwin, M. L. Olsen et al., Phys. Rev. Lett. **93**, 183201 (2004).
15. F. Ferlaino, C. D'Errico, G. Roati et al., Phys. Rev. A **73**, 040702 (2006).
16. C. A. Stan, M. W. Zwierlein, C. H. Schunk et al., Phys. Rev. Lett. **93**, 143001 (2004).
17. G. Roati, F. Riboli, G. Modugno, and M. Inguscio, Phys. Rev. Lett. **89**, 150403 (2002).
18. G. Modugno, arXiv:cond-mat/0702277.
19. C. Ospelkaus, S. Ospelkaus, K. Sengstock, and K. Bongs, Phys. Rev. Lett. **96**, 020401 (2006).
20. M. J. Bijlsma, B. A. Heringa, and H. T. Stoof, Phys. Rev. A **61**, 053601 (2000).
21. R. A. Barankov and S. N. Burmistrov, Phys. Rev. A **67**, 013611 (2003).
22. F. Matera, Phys. Rev. A **68**, 043624 (2003).
23. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической механике*, Физматгиз, Москва (1962).
24. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, Физматгиз, Москва (2001).