

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ВЫРОЖДЕННОГО ЗАМАГНИЧЕННОГО ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА

*В. В. Скобелев**

*Московский государственный индустриальный университет
115280, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 13 апреля 2011 г.

С использованием численных методов найдены энергия Ферми, давление, внутренняя энергия, а также энтропия и теплоемкость полностью вырожденного релятивистского электронного газа в магнитном поле. Показано, что поле максимально допустимой в белых карликах величины порядка 10^9 Гс в 1.06 раз увеличивает давление в центральной области, где концентрация электронов имеет порядок 10^{33} см $^{-3}$ и примерно в 1.03 раза — равновесный радиус, что, очевидно, экспериментально не наблюдаемо. Поле порядка 10^8 Гс и меньше практически не влияет на величину давления и на другие термодинамические функции. Показано также, что вклад вырожденного электронного газа в суммарное давление в нейтронных звездах пренебрежимо мал по сравнению с вкладом нейтронного газа даже в магнитном поле с максимально возможной для них индукцией порядка 10^{17} Гс. Сформулированы условия запрета β -распада нейтронов в сверхсильном магнитном поле. Приводится дополнительная аргументация существования таких магнитных полей у нейтронных звезд малых размеров, согласно которой пульсары с малыми периодами являются наиболее вероятными кандидатами на наличие сверхсильных магнитных полей.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1], основной вклад в давление в белых карликах дает вырожденный релятивистский электронный газ. С другой стороны, эти астрофизические объекты могут обладать достаточно сильными магнитными полями (до 10^9 Гс [2]). Поэтому представляет интерес исследовать влияние магнитного поля на давление P , химический потенциал μ (или на энергию Ферми $E_F = \mu|_{T=0}$), объемную плотность энергии U , а также энтропию S , теплоемкость C , отнесенные к единице объема.

Для дальнейшего существенно, что волновая функция уравнения Дирака для электрона в магнитном поле [3] содержит экспоненциальный множитель (ось z направлена вдоль поля)

$$\exp \left[i(p_3 z - p_2 y) - \frac{1}{2} \left(x\sqrt{\gamma} - \frac{p_2}{\sqrt{\gamma}} \right)^2 \right]. \quad (1)$$

Здесь $\gamma = |eB|$, p_3 — импульс вдоль поля, p_2 — ква-

зиимпульс, определяющий, согласно (1), положение центра волнового пакета на первой оси:

$$X = p_2/\gamma, \quad (2)$$

так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_2 = \int_0^{L_1} \gamma dX = \gamma L_1, \quad (3)$$

где L_1 — нормировочная длина по первой оси ($L_{2,3}$ — по второй и третьей).

В отсутствие магнитного поля значение термодинамических функций определяется из соотношений [4]

$$n_e = 2 \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} f_e p^2 dp, \quad (4a)$$

$$P = 2 \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{3} \int_0^{\infty} f_e \frac{p^2}{\varepsilon} p^2 dp, \quad (4b)$$

$$U = 2 \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} f_e \varepsilon p^2 dp, \quad (4c)$$

*E-mail: v.skobelev@inbox.ru

где $\varepsilon = \sqrt{p^2 + m^2}$, n_e — концентрация,

$$f_e = \left[\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{T}\right) + 1 \right]^{-1} \quad (5)$$

— функция распределения.

Для случая полностью вырожденного ($T = 0$) электронного газа интегрирование приводит к следующим выражениям [5]:

$$E_F = \sqrt{m^2 + p_F^2}, \quad (6a)$$

$$p_F = (3\pi^2 n_e)^{1/3},$$

$$P = \frac{m^4}{24\pi^2} f(z), \quad z = \frac{p_F}{m}, \quad (6b)$$

$$f(z) = z(2z^2 - 3)\sqrt{z^2 + 1} + 3\text{Arsh } z,$$

$$U = \frac{m^4}{24\pi^2} g(z), \quad (6c)$$

$$g(z) = 3z(2z^2 + 1)\sqrt{z^2 + 1} - 3\text{Arsh } z.$$

При переходе к случаю наличия магнитного поля следует учесть следующее.

В функции распределения энергия теперь равна

$$\varepsilon \rightarrow E = \sqrt{m_n^2 + p_3^2}, \quad (7)$$

$$m_n = \sqrt{m^2 + 2\gamma n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Далее, сумма по состояниям имеет вид

$$\begin{aligned} N = \sum f_e &\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2 \frac{L_2}{2\pi} \frac{L_3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_e dp_3 = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2 \frac{L_1 L_2 L_3}{(2\pi)^2} 2\gamma \int_0^{\infty} f_e dp_3, \quad (8) \end{aligned}$$

где мы учли соотношение (3). Таким образом, концентрация равна

$$n_e = \frac{\gamma}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} f_e dp_3. \quad (8a)$$

Аналогичные формулы для давления и объемной плотности внутренней энергии имеют вид

$$P = \frac{\gamma}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} f_e \frac{p_3^2}{E} dp_3, \quad (8b)$$

$$U = \frac{\gamma}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} f_e E dp_3. \quad (8c)$$

Стоит отметить, что формула (8b) не содержит множитель $1/3$, в отличие от формулы (4b) для «свободного» случая, что связано с отсутствием квантования «движения электрона» только вдоль направления магнитного поля. Корректность этого утверждения будет очевидна из дальнейшего изложения (см. разд. 2, формулы (11), (11a), (11b), (12), (12a), (15)).

2. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ВЫРОЖДЕННОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В случае релятивистского вырожденного электронного газа удобно использовать асимптотическое разложение [4] в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(u) du}{\exp(u - u_0) + 1} &= \\ &= \int_0^{u_0} \varphi(u) du + \frac{\pi^2}{6} \varphi'(u_0) + \dots, \quad (9) \end{aligned}$$

где первое слагаемое отвечает полностью вырожденному ферми-газу, а остальные и часть первого слагаемого, которая зависит от температуры при разложении u_0 в ряд по ней, описывают температурные поправки. Перейдем в выражениях (8) к новым переменным [6]

$$u = \sqrt{\tilde{p}_3^2 + \alpha^2} - \alpha, \quad u_0 = \beta - \alpha, \quad (10)$$

где

$$\tilde{p}_3 = p_3/T, \quad \alpha = m_n/T, \quad \beta = \mu/T.$$

После взятия интегралов по u для полностью вырожденного электронного газа в магнитном поле, положив в формулах (8) $f_e \rightarrow 1$ с областью интегрирования и суммирования $E < E_F$, получим следующие уравнения для термодинамических функций:

$$x = \sum_{n=0}^{n_{max}} \sqrt{y - n}. \quad (11)$$

Это соотношение в неявном виде определяет функцию $y(x)$, где безразмерный параметр «концентрация/поле» равен

$$x = \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} n_e \lambda_C^3 \left(\frac{B_0}{B}\right)^{3/2}, \quad (11a)$$

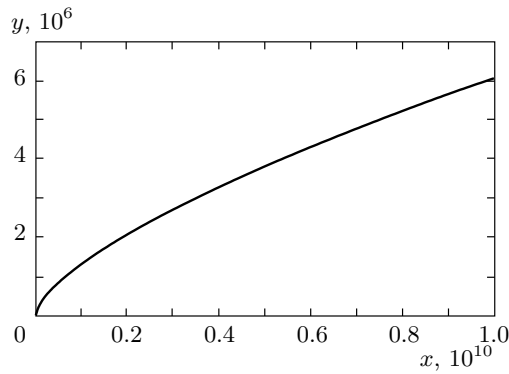


Рис. 1. Зависимость энергетического параметра y (11b) от параметра «концентрация/поле» x (11a)

а безразмерный энергетический параметр на уровне Ферми —

$$y = \frac{E_F^2 - m^2}{2\gamma}. \quad (11b)$$

Здесь λ_C — комптоновская длина волны электрона, $B_0 = m^2/e = 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс — швингеровское поле.

Давление и объемная плотность внутренней энергии определяются соотношениями

$$P, U = \frac{\gamma m^2}{2\pi^2} \varepsilon_{\mp}, \quad (12)$$

$$\varepsilon_{\mp} = \sum_{n=0}^{n_{max}} \left\{ \sqrt{2\varepsilon} \sqrt{(1+2\varepsilon y)(y-n)} \mp (1+2\varepsilon n) \ln \left(\frac{\sqrt{1+2\varepsilon y} + \sqrt{2\varepsilon} \sqrt{y-n}}{\sqrt{1+2\varepsilon n}} \right) \right\}, \quad (12a)$$

$\varepsilon = \gamma/m^2$. Значение $n_{max} = E(y)$, если y дробная величина или нуль, $n_{max} = E(y) - 1$ в остальных случаях ($E(y)$ — наибольшая целая часть y).

Следует отметить, что при уменьшении магнитного поля $\gamma \rightarrow 0$ спектр становится квазинепрерывным и в формулах (11), (12) можно перейти от суммирования к интегрированию:

$$\sum_{n=0}^{n_{max}} \rightarrow \int_0^y dn.$$

При этом с учетом вида n_{max} и формул (11) получается результат (6а) для релятивистской энергии Ферми и импульса Ферми, как и должно быть.

Очевидно, что «кинетическая энергия» на уровне Ферми может быть выражена через y :

$$K_F = E_F - m = m \left(\sqrt{1+2\varepsilon y} - 1 \right). \quad (13)$$

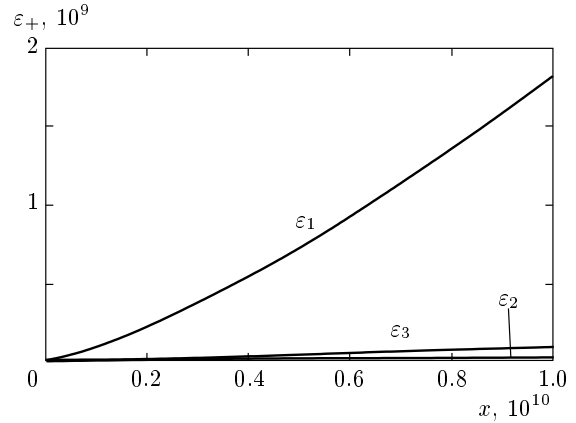


Рис. 2. Зависимости функции ε_+ (12а), через которую выражается объемная плотность внутренней энергии U (12), от параметра «концентрация/поле» x (11а) при различных значениях ε_i

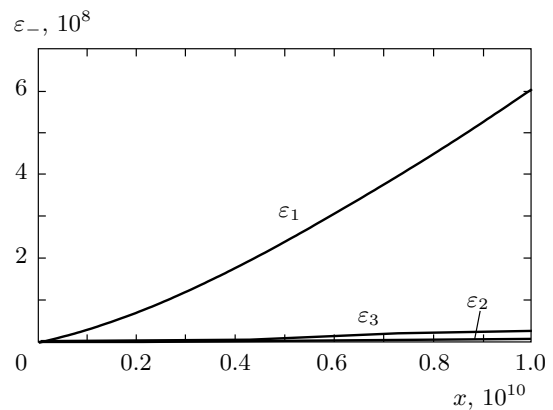


Рис. 3. Зависимости функции ε_- (12а), через которую выражается давление P (12), от параметра «концентрация/поле» x (11а) при различных значениях ε_i

Уравнение (11) в неявном виде определяет функцию $y(x)$, а с учетом (11а), (11b) и (13) — энергию Ферми в зависимости от величины поля и концентрации. График этой функции представлен на рис. 1. Уравнение же (12а) определяет зависимость ε_{\mp} от параметра x «концентрация/поле», т. е. зависимость давления и объемной плотности энергии (12) от концентрации и величины поля. Графики функций ε_+ , ε_- представлены соответственно на рис. 2, 3 для следующих значений полевого параметра ε :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 2.27 \cdot 10^{-5} \quad (B = 10^9 \text{ Гс}), \\ \varepsilon_2 &= 2.27 \cdot 10^{-7} \quad (B = 10^7 \text{ Гс}), \\ \varepsilon_3 &= 2.27 \cdot 10^{-6} \quad (B = 10^8 \text{ Гс}). \end{aligned}$$

При выбранном масштабе графики функций ε_{\pm} для ε_2 практически сливаются с осью x . Для удобства численных расчетов приведем также значения параметров и функций, изображенных на графиках, для случая $B = 10^9$ Гс, $n_e = 10^{33}$ см $^{-3}$ (см. также далее разд. 3 и формулу (17b)):

$$\begin{aligned} x &\approx 3.7 \cdot 10^9, & y &\approx 3.1 \cdot 10^6, \\ \varepsilon_+ &\approx 4.8 \cdot 10^8, & \varepsilon_- &\approx 1.6 \cdot 10^8, & \tilde{S} &\approx 44 \cdot 10^3. \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим также, что из соотношений для Ω -потенциала

$$\Omega = -PV, \quad (14a)$$

$$N = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{T,V} \quad (14b)$$

находим, что при нулевой температуре

$$n = \left(\frac{\partial P}{\partial E_F} \right)_V = \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial E_F}, \quad (15)$$

причем из формулы (11b) следует, что

$$\frac{\partial y}{\partial E_F} = \frac{1}{m\varepsilon} \sqrt{1 + 2\varepsilon y}.$$

Как можно проверить, наши результаты (11), (12) удовлетворяют соотношению (15), что подтверждает адекватность выражения (8b) для давления.

Приведем также выражение для энтропии единицы объема вырожденного электронного газа, которое может быть рассчитано с использованием еще одного дифференциального соотношения для Ω -потенциала:

$$S = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{\mu,V}, \quad (16)$$

и вытекающего из формул (14a) и (16) выражения для энтропии единицы объема:

$$S = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\mu,V}. \quad (17)$$

Определяя температурную поправку к давлению по формулам (8b), (9), (10), получаем для энтропии на единицу объема:

$$S = \frac{m\sqrt{\gamma} T}{3\sqrt{2}} \tilde{S}, \quad (17a)$$

$$\tilde{S} = \sum_{n=0}^{n_{max}} \sqrt{\frac{1 + 2\varepsilon y}{y - n}}. \quad (17b)$$

Для теплоемкости

$$C = \frac{dU}{dT} \quad (18)$$

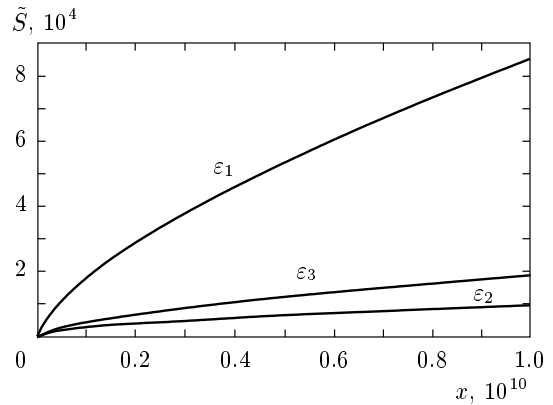


Рис. 4. Зависимости «безразмерной энтропии» \tilde{S} (17b), через которую выражается энтропия S (17a), от параметра «концентрация/поле» x (11a) при различных значениях ε_i

после нахождения температурных поправок к U формально получается тот же результат (17). Равенство $C = S$ имеет место и в отсутствие магнитного поля [4]. Усредненный по нефизическим осцилляциям, связанным с выбором шага по x , график функции $\tilde{S}(x)$ представлен на рис. 4.

3. ОБСУЖДЕНИЕ

3.1. Белые карлики

Как видно из формул (12), (17) и из графиков, все три термодинамических функции P , U , S увеличиваются с ростом концентрации при данном значении поля, что вполне естественно. Что касается зависимости от поля при фиксированной концентрации, то здесь анализ затруднен тем обстоятельством, что поле фигурирует в параметрах x , ε_i , а также в явном виде входит в формулы (12), (17a). Далее нас будет интересовать в основном полевая зависимость давления, что связано с возможностью экспериментальной проверки, так как давление влияет на величину равновесного радиуса. Анализируя результаты численных расчетов и графики ε_- , можно сделать вывод, что давление в целом незначительно возрастает с увеличением поля.

Сравним теперь «безразмерные давления» $\tilde{P} = P/m^4$ вырожденного электронного газа в центре белых карликов в отсутствие магнитного поля (\tilde{P}_0) и в магнитном поле с индукцией 10^9 Гс (\tilde{P}_9). Для этого учтем, что при плотности в центре порядка 10^9 г/см 3 концентрация электронов составляет величину порядка 10^{33} см $^{-3}$, что соответствует зна-

чениям импульса Ферми (6а) $p_F \approx 12m$, функции $f(z) \approx 4 \cdot 10^4$ и безразмерного давления

$$\tilde{P}_0 = \frac{f(z)}{24\pi^2} \approx 173.$$

Значение \tilde{P}_9 при данных значениях параметров находим из формул (12), (14) и графика для ε_1 на рис. 3: $\tilde{P}_9 \approx 183$. Таким образом,

$$\tilde{P}_9/\tilde{P}_0 \approx 1.06. \quad (19)$$

В магнитных полях 10^8 Гс или меньше давление практически равно \tilde{P}_0 .

Оценим теперь значение энергии Ферми в центральной области звезды при значениях параметров $n_e \sim 10^{33} \text{ см}^{-3}$, $B \sim 10^9$ Гс. В этом случае $x \approx 3.7 \cdot 10^9$, а из приведенных численных данных и графика имеем $y \approx 31.3 \cdot 10^5$. Используя соотношение (11б), находим релятивистскую энергию Ферми

$$E_F = \sqrt{1 + 2\varepsilon y} \approx 11.9m,$$

т. е. «кинетическая энергия» (13) на уровне Ферми $K_F \approx 10.9m$. Как нетрудно убедиться, учитывая соотношения (6а), (13), значения этих величин в отсутствие магнитного поля при той же концентрации на десятки доли численного коэффициента больше. Таким образом, магнитные поля белых карликов также практически не меняют энергию Ферми вырожденного электронного газа. Исходя из формул (12), (12а), (17а), (17б), графиков и численных данных, можно убедиться, что безразмерная внутренняя энергия $\tilde{U} = U/m^4$ и безразмерная энтропия $\tilde{S}' = S/m^3$ в магнитном поле 10^9 Гс (индекс «9») и в отсутствие магнитного поля (индекс «0») связаны следующим образом (в отсутствие магнитного поля [5] $S = (m^2/3) T z \sqrt{z^2 + 1}$):

$$\tilde{U}_9 \approx 1.05\tilde{U}_0, \quad \tilde{S}'_9 \approx 1.04\tilde{S}'_0. \quad (20)$$

Таким образом, внутренняя энергия и энтропия, как и давление, несущественно увеличиваются с ростом поля. Отметим также, что $P_9 \approx U_9/3$, так как $\varepsilon_- \approx \varepsilon_+/3$ (это следует из численных данных (14) и формулы (12)), как и должно быть в рассматриваемом практически ультрарелятивистском случае $z \approx 12$.

Согласно оценке [7], равновесный радиус звезды $R \approx \sqrt{P}$, так что приходим к выводу: магнитное поле 10^9 Гс примерно в 1.03 раза увеличивает радиус белых карликов. При уменьшении поля на порядок и более увеличения радиуса практически нет. Учитывая достаточно грубый характер приведенной выше

оценки [7], можно считать, что в пределах погрешностей при допустимых в белых карликах значениях магнитного поля их радиус вообще не меняется.

Представляло бы интерес выполнение численных расчетов для значения плотности $\rho \sim 10^6 \text{ г/см}^3$ и, соответственно, электронной концентрации $n_e \sim 10^{30} \text{ см}^{-3}$, которые имеют место в поверхностных слоях белых карликов, однако в данной работе мы не ставим такой задачи.

Таким образом, в рамках проведенных расчетов приходим к выводу, что экспериментальное подтверждение существования магнитных полей величиной до 10^9 Гс в белых карликах весьма проблематично.

3.2. Нейтронные звезды

Поскольку давление вырожденного электронного газа растет с увеличением поля, представляет интерес оценить его вклад в суммарное давление в нейтронных звездах, в которых индукция магнитного поля может достигать величины 10^{17} Гс [8]. Учтем при этом, что вклад в сумму по n в (8а), (8б) даст лишь основной уровень Ландау $n = 0$, если в соответствии с выражением для энергии (7) выполняется условие

$$p_F^2 < 2\gamma. \quad (21)$$

При этом поперечные степени свободы подавлены и «движение» электрона становится эффективно одномерным (вдоль поля).

Далее, при нахождении давления (8б) и импульса Ферми (8а) следует оставить вклад $n = 0$. В результате при $T = 0$ получаем

$$p_F = \frac{2\pi^2 n_e}{\gamma} \quad (22)$$

(при этом мы учли, что ориентация спина на основном уровне Ландау фиксирована). Тогда условие (21) невозбуждения уровней $n = 1, 2, \dots$ запишется в виде

$$4\pi^2 n_e < (2\gamma)^{3/2}. \quad (23)$$

Исходя из этого неравенства, оценим минимальное значение поля B_{cr} , при котором имеет место эффект «одномеризации». После элементарных преобразований находим

$$B_{cr} = \frac{B_0}{2} (4\pi^2 n_e \lambda_C^3)^{2/3}. \quad (23а)$$

Полагая, как это принято в работе, $n_e \sim 10^{35} \text{ см}^{-3}$ (см. ниже), находим, что $B_{cr} \approx 8 \cdot 10^{16}$ Гс. Учитывая приближенный характер наших вычислений, будем

считать, что при $B \sim 10^{17}$ Гс $> B_{cr}$ условие «одномеризации» при максимально возможном значении поля в нейтронных звездах выполняется и большинство электронов находятся на основном уровне Ландау. К условию (23) следует добавить ограничение на температуру:

$$\sqrt{m^2 + 2\gamma} - m \gg T \quad (24a)$$

или

$$\sqrt{1 + 2\varepsilon} - 1 \gg T/m. \quad (24b)$$

В отличие от предыдущего, это условие в старых ($T \sim 1$ МэВ) нейтронных звездах выполняется с большим запасом.

Согласно классической монографии [9], концентрация электронов или протонов в нейтронной звезде составляет приблизительно 10^{-3} от концентрации нейтронов n_N , которая при плотности материи порядка ядерной в центре звезды имеет порядок 10^{38} см $^{-3}$, так что $n_e \sim 10^{35}$ см $^{-3}$, что приблизительно соответствует и современным представлениям [10] (концентрацию можно оценить по приведенному в обзоре [10] значению импульса Ферми; отклонение в плюс-минус порядок от этого значения принципиально не меняет наших выводов).

При замене переменных вида (10) интегрирование в формуле (8b) при $T = 0$ с упомянутой ее модификацией и при $E = \sqrt{m^2 + p_F^2}$ приводит к результату

$$P_e = \frac{\gamma m^2}{4\pi^2} \left[\tilde{p}_F \sqrt{\tilde{p}_F^2 + 1} - \ln \left(\tilde{p}_F + \sqrt{\tilde{p}_F^2 + 1} \right) \right], \quad (25)$$

где

$$\tilde{p}_F \equiv \frac{p_F}{m} = \frac{2\pi^2 n_e}{\gamma m}. \quad (25a)$$

При принятых значениях параметров $\tilde{p}_F \approx 50$, так что вырожденный электронный газ является ультрарелятивистским и

$$P_e \approx \frac{\gamma m^2 \tilde{p}_F^2}{4\pi^2} = \pi^2 (n_e \lambda_C^3)^2 \frac{B_0}{B} m^4, \quad (26)$$

причем объемная плотность энергии электронного газа $U_e \approx P_e$ (а не $3P_e$, как в «трехмерном» случае, например, в белых карликах). Как и в разд. 2, можно проверить, что соотношение (15), имеющее в данном случае вид

$$n_e = \frac{\partial P_e}{\partial E_F} = \frac{\partial P_e}{\partial \tilde{p}_F} \frac{\sqrt{1 + \tilde{p}_F^2}}{m \tilde{p}_F},$$

выполняется. Разумеется, формулы (25), (26) справедливы лишь до минимальных значений поля, определяемых условиями (23), (24a), (24b).

Давление вырожденного нейтронного газа равно (см., например, [4])

$$P_N = \frac{2(2M)^{3/2} E_F^{(0)5/2}}{15\pi^2}, \quad (27)$$

где M — масса нейтрона, $E_F^{(0)}$ — энергия Ферми в отсутствие магнитного поля (как показано в работе [7], учет взаимодействия сверхсильного ($\sim 10^{17}$ Гс) магнитного поля с аномальным магнитным моментом нейтрона не меняет порядок величины P_N).

Из формул (26), (27) получаем

$$\frac{P_e}{P_N} = \frac{15\pi^4}{2^{5/2}} \frac{B_0}{B} (n_e \lambda_C^3)^2 \left(\frac{m}{M} \right)^{3/2} \left(\frac{m}{E_F^{(0)}} \right)^{5/2}. \quad (28)$$

Разумеется, это выражение справедливо лишь для значений поля $B > B_{cr}$. При значении $E_F^{(0)} \approx 40$ МэВ (в работах [7] приведена неточная оценка ~ 10 МэВ) имеем

$$\frac{P_e}{P_N} \approx 5 \cdot 10^{-8} \frac{B_0}{B} (n_e \lambda_C^3)^2,$$

т. е. при приведенных выше значениях параметров и $B \approx B_{cr}$ отношение $P_e/P_N \sim 10^{-3}$ и давлением вырожденного «одномерного» электронного газа можно пренебречь. Отметим также, что давление самого магнитного поля $P_B = B^2/24\pi$ сравнивается с P_N (27) лишь при $B \sim 10^{19}$ Гс, а не при 10^{17} Гс, как ошибочно указано в работах [7].

Итак, суммарное давление в нейтронной звезде даже при $B \sim 10^{17}$ Гс практически равно давлению вырожденного нейтронного газа.

Однако роль электронов в динамике звезды все же является важной в другом аспекте. Оценим в этой связи минимальное значение концентрации электронов n_{cr} , при котором распад нейтрона запрещен и он является стабильным (это одно из необходимых условий существования нейтронной звезды). Значение n_{cr} определим из равенства

$$\Delta \approx m \sqrt{1 + \tilde{p}_F^2}, \quad (29)$$

где $\Delta \approx 1.3$ МэВ — энергосвободное при β -распаде нейтрона (в данной работе мы не обсуждаем роль так называемых модифицированных УРКА-процессов, когда обычный распад нейтрона инициируется участием дополнительного нуклона; см., например, обзор [10]). Используя выражение (25a) и принятое нами значение поля $B \sim 10^{17}$ Гс, находим $n_{cr} \approx 4.7 \cdot 10^{33}$ см $^{-3}$, так что при используемом нами значении концентрации $n_e \sim 10^{35}$ см $^{-3}$ β -распад нейтрона запрещен тем более.

В отсутствие магнитного поля в (29) следует использовать формулу (6а) для импульса Ферми с результатом $n_{cr} \approx 7.6 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$, поэтому сверхсильное магнитное поле повышает порог «по концентрации» вырожденного электронного газа, разрешающий β -распад нейтрона. Это означает, к примеру, что при гравитационном сжатии звезды, обладающей сверхсильным магнитным полем, процесс «нейтронизации» начнется при меньшем значении радиуса звезды, чем в отсутствие такого поля. Можно тогда предположить, что нейтронные звезды наименьших размеров обладают сверхсильными магнитными полями порядка 10^{17} Гс.

Это усиливает и дополняет традиционную аргументацию увеличения магнитного поля вследствие сжатия магнитосферы при гравитационном коллапсе.

Поскольку при взаимодействии аномального магнитного момента нейтрона со сверхсильным магнитным полем давление вырожденного нейтронного газа практически не меняется [7], при гравитационном сжатии достигаемое значение равновесного радиуса в сверхсильном магнитном поле $R_{17}^{(eq)}$ должно быть меньше, чем в его отсутствие: $R_{17}^{(eq)} < R_0^{(eq)}$ (другими словами, если «нейтронизация» в отсутствие магнитного поля началась «раньше», т. е. при меньшей электронной концентрации и большем радиусе, то и закончится она раньше, при большем радиусе). Отношение равновесных радиусов можно оценить по отношению радиусов начала «нейтронизации» звезд со сверхсильным магнитным полем $B \sim 10^{17}$ Гс (R_{17}) и без магнитного поля (R_0), которое при прочих равных условиях пропорционально кубическому корню из обратного отношения электронных концентраций n_{cr} , т. е. $R_0/R_{17} \approx 10$. Согласно сделанному замечанию, аналогичная связь приблизительно справедлива и для равновесных радиусов:

$$R_0^{(eq)}/R_{17}^{(eq)} \sim 10. \quad (30)$$

Эта оценка, скорее всего, завышена, поскольку гравитационное сжатие может происходить и после полной «нейтронизации» звезды. Существенная разница в размерах все же остается и может быть, очевидно, подтверждена экспериментально, например, по соответствующему увеличению частоты вращения и импульсов пульсаров. Таким образом, пульсары с малым периодом являются наиболее вероятными кандидатами на наличие сверхсильных магнитных полей.

3.3. Примечание

Что касается физики белых карликов, то, разумеется, более наглядным и информативным был бы график зависимости \tilde{P} и других термодинамических функций при фиксированной концентрации от полевого безразмерного параметра $\varepsilon = \gamma/m^2 \equiv B/B_0$, причем

$$x = \tilde{n}/\varepsilon^{3/2}, \quad \tilde{n} = \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} (n_e \lambda_C^3)$$

— безразмерная концентрация. Однако в сумме по n вида (12а) при $\varepsilon \rightarrow 0$ возникает гигантское число слагаемых и с учетом первого множителя в (12) появляется неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Преодолеть это затруднение на обычном персональном компьютере не удалось. Очевидно, для решения проблемы необходимо использовать компьютер большей мощности, но у нас нет такой возможности.

Автор благодарит А. В. Кондратьева за помощь при выполнении графических построений.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Шапиро, С. Тьюколски, *Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды*, Мир, Москва (1985).
2. А. Т. Potter and С. А. Tout, arXiv:0911.3657 [astro-ph.SR].
3. Н. П. Клеников, ЖЭТФ **26**, 19 (1954).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. 1, Физматлит, Москва (2001).
5. Г. С. Бисноватый-Коган, *Физические вопросы теории звездной эволюции*, Наука, Москва (1989).
6. Д. К. Надежин, Научн. информ. Астрон. совета АН СССР, вып. 32, 3 (1974).
7. В. В. Скобелев, ЖЭТФ **138**, 1088 (2010); **139**, 1039 (2011).
8. R. С. Duncan and С. Tompson, *Astrophys. J.* **392**, L9 (1992).
9. С. Вейнберг, *Гравитация и космология*, Мир, Москва (1975).
10. А. Ю. Потехин, УФН **180**, 1279 (2010).