ЖЭТФ, 2012, том 141, вып. 6, стр. 1130–1136

ВЛИЯНИЕ ДЕФЕКТОВ НА КИНЕТИКУ ФАЗОВОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ: МОДИФИЦИРОВАННАЯ ТЕОРИЯ КОЛМОГОРОВА – МЕЛА – ДЖОНСОНА

Б. В. Петухов *

Институт кристаллографии им. А. В. Шубникова Российской академии наук
119333, Москва, Россия

Поступила в редакцию 2 октября 2011 г.

Статистическая теория кристаллизации Колмогорова – Мела – Джонсона обобщается с учетом влияния препятствий, создающих задержки для распространения границ новой фазы, применительно к одномерным системам. Выводится уравнение, описывающее кинетику процесса, с помощью которого рассчитывается зависимость от времени доли превращенного вещества. Изучается модификация кинетики с изменением плотности препятствий и длительности создаваемых ими времен задержек. Теория применима к протяженным контактам больших интегральных схем, биологическим макромолекулам и многим другим системам.

1. ВВЕДЕНИЕ

Статистическая теория кристаллизации Колмогорова – Мела – Джонсона [1, 2], первоначально предложенная для объемных металлов, впоследствии получила широкое применение для описания кинетики превращения систем различной природы и пространственной размерности (см. обзор [3]). В ней рассматривается случайное в пространстве и времени образование зародышей новой фазы с последующим распространением их границ и слиянием соседних зародышей или, говоря иначе, доменов. В настоящей работе будут рассматриваться одномерные системы. Важным примером такого превращения является репликация молекул ДНК [4]. В технологии производства больших интегральных схем в некоторых случаях необходимым этапом является перевод осажденной в линейной геометрии высокорезистивной фазы $TiSi_2$ C49 в низкорезистивную фазу C54 [5]. Кинетика перехода между аморфной и кристаллической фазами играет роль при записи и считывании информации в оптических и электрических системах хранения данных [6]. Другими примерами являются переключение состояний магнитных цепочек [7], уход дислокации из долины потенциального рельефа кристаллической решетки [8], релаксация полимеров [9], последовательная адсорбция атомов на подложках и другие [10]. Для сохранения единства описания все эти случаи будут трактоваться как «фазовые переходы» с обобщенным пониманием «фаз».

В реальных системах кинетика превращения нередко оказывается более медленной, чем предсказывается теорией Колмогорова – Мела – Джонсона. Естественно предположить, что на движение границ новой фазы могут оказывать влияние дефекты строения, преодоление которых требует дополнительного времени и создает задержки движения. Это обстоятельство может существенно модифицировать кинетику протекания процесса в целом и требует соответствующего развития теории. Влияние большой плотности хаотически распределенных относительно слабых дефектов, когда создаваемый ими потенциал может быть моделирован гауссовским случайным полем, изучалось в работе [11]. Влияние вносимых дефектами задержек предельно большой длительности на процесс репликации молекул ДНК изучалось в работе [12] в рамках приближения самосогласованного поля. В настоящей работе будет дано более полное исследование модели Колмогорова – Мела – Джонсона, дополненной учетом влияния случайно расположенных центров задержек произ-

*E-mail: petukhov@ns.crys.ras.ru

вольной длительности для движения границ новой фазы, и общее решение будет проиллюстрировано наглядными частными случаями.

Простейший подход к решению проблемы заключается в перенормировке скорости границ добавлением к времени движения между дефектами времени задержки на дефектах. Однако такой подход имеет ограниченную применимость и справедлив лишь в случае, когда длина пробега границ до слияния соседних доменов велика по сравнению со средним расстоянием между дефектами, а разброс времен задержек на дефектах невелик. В общем случае на протекание процесса существенное влияние оказывают флуктуации пространственного распределения дефектов и распределения длительности задержек на них, так что расчет кинетики требует более полного статистического описания, развитие которого и является целью настоящей работы.

2. МОДЕЛЬ КОЛМОГОРОВА – МЕЛА – ДЖОНСОНА

В теорию Колмогорова – Мела – Джонсона, относящуюся к чистым одномерным материалам, закладываются два параметра: частота независимого рождения зародышей новой фазы в единицу времени на единицу длины системы J и скорость движения границы новой фазы v. В наиболее простом, но легко обобщаемом случае, скорости расширения зародышей в любую сторону считаются одинаковыми. В настоящей работе J и v принимаются постоянными. Первоначальным размером зародышей пренебрегается и доля $P(t)$ превращенного за время t вещества вычисляется как вероятность какой-либо произвольно выбранной точке быть пройденной границей домена, подошедшей в течение времени t либо с одной стороны, либо с другой. В подходе Колмогорова [1] чрезвычайно просто решается статистическая проблема описания слияния случайно рождающихся в пространстве и времени зародышей. Вкратце воспроизведем это решение. Обозначим вероятность рассматриваемой точке не быть захваченной доменом новой фазы с какой-либо одной стороны ко времени t как $Q_0(t)$. По Колмогорову [1], $Q_0(t)$ вычисляется как вероятность не возникнуть зародышу на расстоянии меньшем длины пробега за время t, т. е. vt. Если вероятность образоваться зародышу в малом интервале времени Δt_i на длине $l(t_i)(= vt_i)$ есть $Jl(t_i)\Delta t_i$, а вероятность не образоваться, соответственно, есть $1 - Jl(t_i)\Delta t_i$, то вероятность не возникнуть зародышу в течение промежутка времени $t = \sum_i \Delta t_i$ равна произведению

$$Q_0(t) = \prod_i [1 - Jl(t_i)\Delta t_i] \approx$$

$$\approx \exp\left[-J\sum_i l(t_i)\Delta t_i\right] \approx \exp\left[-J\int_0^t l(t')\,dt'\right] =$$

$$= \exp\left[-J\int_0^t vt'\,dt'\right] = \exp\left(-\frac{Jvt^2}{2}\right). \quad (1)$$

Вероятность точке не быть захваченной ни с той, ни с другой стороны есть

$$Q_0^2(t) = \exp(-Jvt^2), \quad (2)$$

а доля превращенного ко времени t вещества равна, следовательно,

$$P_0(t) = 1 - Q_0^2(t) = 1 - \exp(-Jvt^2). \quad (3)$$

С помощью этой формулы рассчитывается среднее время превращения

$$t_{av} = \int_0^\infty t\frac{dP}{dt}\,dt = \int_0^\infty Q_0^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{Jv}}\,. \quad (4)$$

В дальнейшем понадобится также вероятность $q(t,l)$ того, что рассматриваемая точка не будет захвачена новой фазой за счет образования зародыша на прилегающем с какой-либо стороны сегменте длиной l меньшей длины пробега vt. Простое обобщение приведенных выше рассуждений дает выражение

$$q(t,l) = \exp\left(-Jtl + \frac{J}{2v}\,l^2\right), \quad l < vt. \quad (5)$$

Характерной чертой результата теории Колмогорова – Мела – Джонсона является резкое убывание со временем доли исходной фазы, описываемое второй степенью в показателе экспоненты (2). Это связано с заложенным в модель достаточно быстрым детерминистическим расширением зародышей с постоянной скоростью. Для некоторых материалов это предположение не выполняется.

3. ВЛИЯНИЕ НА КИНЕТИКУ ПРЕВРАЩЕНИЯ СЛУЧАЙНО РАСПОЛОЖЕННЫХ ДЕФЕКТОВ

При наличии дефектов, каждый из которых создает задержку движения фазовой границы, расчет следует видоизменить. Будем предполагать распределение дефектов в пространстве хаотическим со средней плотностью n, а создаваемую ими задержку имеющей случайную длительность со средним значением τ. Вычислим одностороннюю вероятность $Q(t)$ какой-либо точке не быть захваченной новой фазой (для определенности, справа) ко времени t. Обозначим как $P_1(t) = 1 - Q(t)$ дополнительную к $Q(t)$ вероятность рассматриваемой точке быть захваченной за счет рождения зародышей с какой-либо одной стороны. Пусть первый дефект находится справа от рассматриваемой точки на расстоянии l. Тогда при $l > vt$ дефект не оказывает влияния и вероятность не быть захваченной такая же, как в бездефектном случае, т. е. $\exp(-Jvt^2/2)$. Вероятность отсутствия дефектов в интервале vt есть $\exp(-nvt)$.

Если первый дефект ближе, чем vt, то следует учесть возможность того, что граница, подошедшая к дефекту в момент времени t', может задержаться на нем на время большее $t-l/v-t'$ и в результате не успеть пройти начало координат к моменту t. Обозначим вероятность задержки на дефекте большей t как $f(t)$. Рассчитаем вероятность того, что граница не окажется слева от дефекта ко времени $t_l = t-l/v$. Обозначим ее $Q_-(t_l)$. Она равна сумме вероятности границе не подойти к дефекту ко времени t_l, т. е. $Q(t_l)$, и вероятности, подойдя в интервале времени dt', равной $dP_1(t')$, не преодолеть дефект за время $t - t'$ для всех t' в интервале $(0, t_l)$:

$$Q_-(t_l) = Q(t_l) + \int\limits_0^{P_1(t_l)} f(t_l - t')\, dP_1(t') = = Q(t_l) - \int\limits_1^{Q(t_l)} f(t_l - t')\, dQ(t') = = f(t_l) + \int\limits_0^t \frac{df(t_l - t')}{dt'}\, Q(t')\, dt'. \quad (6)$$

Учитывая весь спектр возможных положений первого препятствия, получаем следующее уравнение для $Q(t)$:

$$Q(t) = \exp\left(-nvt - \frac{Jvt^2}{2}\right) + \int\limits_0^{vt} n\, dl\, \times \times \exp(-nl) q(t,l) Q_-\left(t - \frac{l}{v}\right) = \exp\left(-nvt - \frac{Jvt^2}{2}\right) + + \int\limits_0^{vt} n\, dl \exp(-nl) q(t,l) \left\{ f\left(t - \frac{l}{v}\right) + + \int\limits_0^{t-l/v} dt' \frac{df(t - l/v - t')}{dt'}\, Q(t') \right\}. \quad (7)$$

Переходя в интеграле к переменной $t'' = t - l/v$, получаем другую форму уравнения:

$$Q(t) = \exp\left(-nvt - \frac{Jvt^2}{2}\right) \left\{ 1 + nv \int\limits_0^t dt'' \times \times \exp\left(nvt'' + \frac{Jvt''^2}{2}\right) Q_-(t'') \right\}. \quad (8)$$

Перенося экспоненту $\exp(-nvt - Jvt^2/2)$ в левую сторону уравнения (8) и дифференцируя обе стороны, приходим к

$$\frac{dQ(t)}{dt} + (nv + Jvt) Q(t) = nv Q_-(t) = = nv \left\{ f(t) + \int\limits_0^t \frac{df(t - t')}{dt'}\, Q(t')\, dt' \right\}. \quad (9)$$

В дальнейшем будет рассматриваться случайно однородная во времени вероятность преодоления препятствий со средней частотой $1/\tau$. В такой ситуации, отвечающей, например, термоактивируемой кинетике преодоления препятствий, вероятность того, что время задержки превысит t, есть $f(t) = = \exp(-t/\tau)$. Уравнение (9) примет при этом вид

$$\frac{dQ(t)}{dt} + (nv + Jvt) Q(t) = nv \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \times \times \left\{ 1 + \int\limits_0^t \exp\left(\frac{t'}{\tau}\right) Q(t') \frac{dt'}{\tau} \right\}. \quad (10)$$

Перенося экспоненту $\exp(-t/\tau)$ в левую сторону уравнения и дифференцируя обе стороны, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + \left(nv + \frac{1}{\tau} + Jvt\right) \frac{dQ(t)}{dt} + + Jv \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) Q(t) = 0. \quad (11)$$

Начальным условием для $Q(t)$ является $Q(t)|_{t=0} = = 1$. Кроме того, так как $Q_-(t)|_{t=0} = 1$, из (9) следует $dQ(t)/dt|_{t=0} = 0$.

Решение уравнения (11) можно выразить через специальные функции. Будем измерять время в единицах $t_0 = 1/(Jv)^{1/2}$ и введем безразмерные параметры $n(v/J)^{1/2} = n'$, $\tau/t_0 = \tau'$. Уравнение примет вид

$$\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + \left(n' + \frac{1}{\tau'} + t\right)\frac{dQ(t)}{dt} + \left(1 + \frac{t}{\tau'}\right)Q(t) = 0. \quad (11')$$

Сделаем замену $Q(t) = \exp(-t/\tau)Q_1(t')$, $t' = t + n' - 1/\tau'$. Для $Q_1(t')$ получаем уравнение

$$\frac{d^2Q_1(t')}{dt^2} + t'\frac{dQ_1(t')}{dt} + \left(1 - \frac{n'}{\tau'}\right)Q_1(t') = 0. \quad (12)$$

Еще одна замена $Q_1(t') = \exp(-t'^2/4)y(t')$ приводит к уравнению для функций параболического цилиндра, например (19.1.2) из [13]

$$\frac{d^2y(t')}{dt^2} - \left(\nu - \frac{1}{2} + \frac{t'^2}{4}\right)y(t') = 0, \quad \nu = \frac{n'}{\tau'_0}. \quad (13)$$

В качестве стандартных решений берутся

$$U\left(\nu - \frac{1}{2}, t'\right) = D_{-\nu}(t') = \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)Y_1 - \sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)Y_2, \quad (14)$$

$$V\left(\nu - \frac{1}{2}, t'\right) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \times \left\{\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)Y_1 + \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)Y_2\right\}, \quad (15)$$

Y_1, Y_2 выражаются через вырожденные гипергеометрические функции (см. [13]). Общее решение может быть записано в виде

$$y(t') = c_1 U\left(\nu - \frac{1}{2}, t'\right) + c_2 V\left(\nu - \frac{1}{2}, t'\right). \quad (16)$$

Запишем начальные условия для функции $y(t')$. Из $Q(t)|_{t=0} = 1$ следует

$$y(t')|_{t'=n'-1/\tau'} = \exp\left[(n' - 1/\tau')^2/4\right]. \quad (17)$$

Из $dQ(t)/dt|_{t=0} = 0$ следует

$$\left.\frac{dy(t')}{dt'}\right|_{t'=n'-1/\tau'} = \frac{1}{2}\left(n' + \frac{1}{\tau'}\right) \times \exp\left[\frac{1}{4}\left(n' - \frac{1}{\tau'}\right)^2\right]. \quad (18)$$

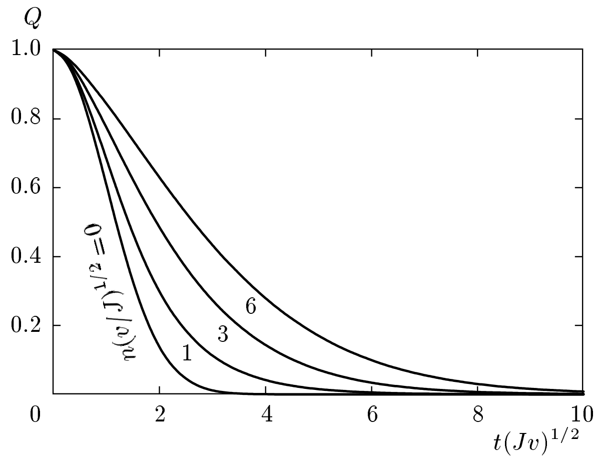

Рис. 1. Характеристика убывания доли исходной фазы $Q(t)$ для среднего времени задержки $\tau = 1/(Jv)^{1/2}$ и различной плотности дефектов n, указанной у кривых

Определим из этих условий константы в (16). С учетом того, что вронскиан $UV' - VU'$ равен $(2/\pi)^{1/2}$, получаем

$$c_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[V' - \frac{1}{2}\left(n' + \frac{1}{\tau'}\right)V\right] \times \exp\left[\frac{1}{4}\left(n' - \frac{1}{\tau'}\right)^2\right], \quad (19)$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}\left(n' + \frac{1}{\tau'}\right)U - U'\right] \times \exp\left[\frac{1}{4}\left(n' - \frac{1}{\tau'}\right)^2\right]. \quad (20)$$

Аргумент у функций U, V есть $n' - 1/\tau'$.

Несложно также решить уравнение (11) численно. Рисунок 1 иллюстрирует поведение рассчитываемой таким образом вероятности $Q(t)$ для нескольких значений плотности дефектов. Можно видеть, как увеличение плотности дефектов замедляет процесс превращения по сравнению с чистым материалом. Особый интерес представляет кардинальная модификация кинетики превращения при большой плотности дефектов, приводящая к иному типу закономерностей.

4. КИНЕТИКА ПРЕВРАЩЕНИЯ ПРИ БОЛЬШОЙ ПЛОТНОСТИ ДЕФЕКТОВ

Рассмотрим ситуацию, отвечающую большой плотности дефектов, когда среднее расстояние

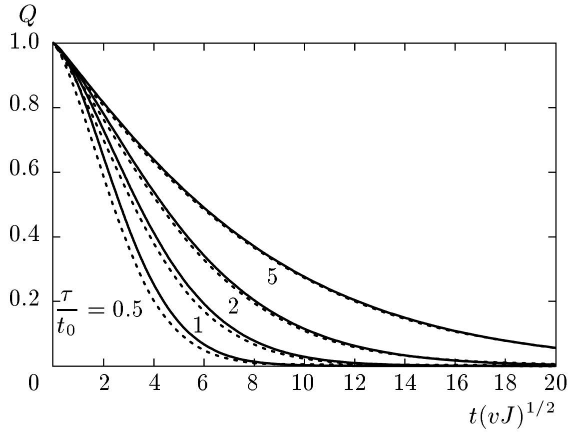

Рис. 2. Характеристика убывания доли исходной фазы $Q(t)$ при плотности дефектов $n = 10(J/v)^{1/2}$ для нескольких значений среднего времени задержек τ на них. Штриховыми линиями показано поведение соответствующего приближенного решения (21)

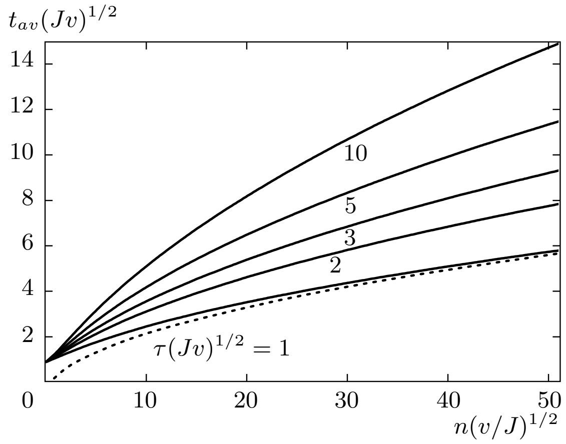

Рис. 3. Зависимости среднего времени превращения от плотности препятствий n для различных значений среднего времени задержек τ на них. Штриховой линией показано поведение приближенного результата (23)

между ними $1/n$ мало по сравнению со средней длиной пробега границ доменов до их столкновений и слияний, которая в чистом материале составляет порядка $(v/J)^{1/2}$. При большой плотности дефектов естественно ожидать, как это и подтверждается результатами расчета, представленными на рис. 1, что доля исходной фазы будет значительно медленнее убывать со временем по сравнению со случаем отсутствия дефектов. Это позволяет предположить, что вторая производная $Q(t)$ будет давать малый вклад в уравнение (11). Пренебрегая этим вкладом, получаем приближенное решение в виде

$$Q(t) \approx \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\left(1+\frac{J}{n}t\right)^{n/J\tau-1}. \qquad (21)$$

Имея явный вид решения, можно проверить справедливость используемого приближения. Вычисляя вторую производную и сравнивая ее с другими слагаемыми в уравнении (11), получаем, что вклад второй производной мал при условии $nv\tau \gg 1$, и решение (21) приближенно справедливо во всей области изменения времени. На рис. 2 иллюстрируется кинетика превращения при относительно большой плотности дефектов $n = 10(J/v)^{1/2}$ для нескольких значений среднего времени преодоления препятствий. Штриховыми линиями показано поведение приближенного решения (21), достаточно хорошо согласующееся с решением полного уравнения (11).

Среднее время превращения вычисляется с помощью приближенного решения (21) как

$$t_{av} = \int_0^\infty dt\, Q^2(t) \approx \frac{n}{J}\exp\left(\frac{2n}{J\tau}\right)\left(\frac{J\tau}{2n}\right)^{2n/J\tau-1}\times$$
$$\times\,\Gamma\left(\frac{2n}{J\tau}-1, \frac{2n}{J\tau}\right). \qquad (22)$$

Здесь

$$\Gamma(a,x) = \int_x^\infty \exp(-t)t^{a-1}dt$$

— неполная гамма-функция (см., например, [13, (6.5.3)]). При больших значениях параметра $2n/J\tau$ уравнение (22) сводится к упрощенному выражению

$$t_{av} \approx \frac{\tau}{2}\left(\sqrt{\frac{\pi n}{J\tau}} - \frac{4}{3}\right). \qquad (23)$$

В обратном предельном случае малых значений $2n/J\tau$ получаем для среднего времени перехода

$$t_{av} \approx n/J. \qquad (24)$$

На рис. 3 иллюстрируется зависимость среднего времени превращения от плотности препятствий n для различных значений среднего времени задержек τ на них. Штриховой линией показано поведение приближенного результата (23). Отметим, что рис. 3 иллюстрирует также вносимое дефектами изменение числа зародышей N на единицу длины системы, необходимое для завершения превращения, вследствие соотношения $N = Jt_{av}$. Обратная величина $1/N$ дает среднюю длину пробега фазовых границ до слияния доменов, которая, таким образом, уменьшается с ростом плотности дефектов.

Большие значения параметра $n/J\tau \gg 1$ соответствуют ситуации, в которой среднее расстояние между препятствиями много меньше длины пробега фазовых границ и суммарное время задержки «самоусредняется». Следует ожидать, что движение границ при этом может быть охарактеризовано средней скоростью v_{av}, рассчитываемой как среднее расстояние между препятствиями $1/n$, отнесенное ко времени преодоления этого расстояния, складывающемуся из времени свободного движения $1/nv$ и среднего времени задержки τ. Таким образом, $v_{av} = v/(1+nv\tau) \approx 1/n\tau$ при большой плотности препятствий. Вероятность $Q(t)$ должна при этом соответствовать колмогоровскому выражению (1) с перенормированной скоростью движения границы $v \to v_{av}$. С помощью разложения формулы (21) при малых t нетрудно убедиться, что это действительно имеет место для начальной кинетики в ограниченном интервале времени $t \ll \tau(n/J\tau)^{2/3}$. В более широком интервале времени флуктуации пространственного распределения препятствий и статистический разброс длительности задержек полностью модифицируют кинетику процесса.

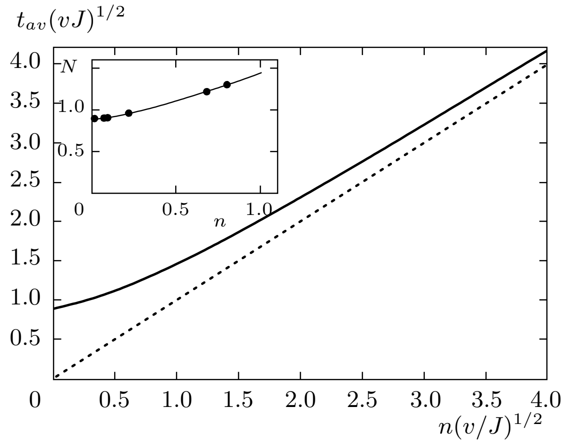

Рис. 4. Среднее время превращения при больших временах задержек на препятствиях в зависимости от их плотности n. Штриховая линия показывает асимптотику среднего времени превращения при большой плотности препятствий. На вставке изображена зависимость нормированного посредством длины $l_0 = (v/J)^{1/2}$ среднего числа центров образования зародышей репликации от таким же образом нормированного среднего числа дефектов для ряда типов клеток

5. КИНЕТИКА ПРЕВРАЩЕНИЯ ПРИ ПРЕДЕЛЬНО СИЛЬНЫХ ПРЕПЯТСТВИЯХ

При больших временах задержек $\tau \to \infty$ во внимание следует принимать только зародыши, рождающиеся перед первым препятствием. Вклад от интервала $l > vt$ есть $\exp(-nvt - Jvt^2/2)$, от интервала $l < vt$ он составляет

$$n\int_0^{vt} dl\, \exp\left(-nl - Jtl + \frac{Jl^2}{2v}\right). \qquad (25)$$

Следовательно, для $Q(t)$ получаем в этом пределе

$$Q(t) \approx \exp\left(-nvt - \frac{Jvt^2}{2}\right) + \\ + n\int_0^{vt} dl\, \exp\left(-nl - Jtl + \frac{Jl^2}{2v}\right). \qquad (26)$$

При больших t главный вклад в интеграл дают $l \sim 1/(n+Jt)$ и квадратичным слагаемым в экспоненте можно пренебречь. Получаем $Q \approx \approx 1/(1+Jt/n)$. Вычисление среднего времени перехода с кинетикой превращения, определяемой выражением (26), дает функцию, меняющуюся с ростом n от $(\pi)^{1/2}/2(Jv)^{1/2}$ до $\approx n/J$, согласуясь в пределе больших $n(v/J)^{1/2}$ с результатом (24). Поведение рассчитанного таким образом среднего времени превращения проиллюстрировано на рис. 4.

Отметим, что средняя длина пробега фазовых границ до завершения превращения $1/Jt_{av}$ уменьшается с ростом n от своего значения в чистом материале $2(v/\pi J)^{1/2}$ до среднего расстояния между дефектами $1/n$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе построена теория, описывающая кинетику фазового превращения одномерной системы, содержащей хаотически расположенные дефекты, тормозящие движение фазовых границ. Показано, что влияние дефектов не сводится к перенормировке скорости движения границ, а становятся существенными случайные флуктуации пространственного распределения дефектов и времен задержек на них. Для этой ситуации выведено и проанализировано уравнение, дающее статистическое описание временной зависимости доли превращенного вещества, обобщающее результат теории Колмогорова – Мела – Джонсона путем учета влияния дефектов. Модифицированная теория позволяет рассчитать обусловленное дефектами замедление кинетики образования новой фазы и изменение длины пробега фазовых границ до завершения превращения в зависимости от плотности дефектов, среднего времени задержек движения границ на них и других параметров задачи.

При достаточно больших временах задержек фазовых границ на дефектах основным качественным следствием влияния дефектов является переход от кинетики превращения, контролируемой на равных основаниях образованием зародышей и движением границ новой фазы, к кинетике, контролируемой по преимуществу образованием зародышей. Этот переход имеет важные следствия, например, для процесса деления клеток. В этом случае фазовыми границами являются точки расхождения двух ветвей молекулы ДНК (forks). Как отмечается в цитируемой выше работе [12], приближение к границе смены механизма репликации молекул ассоциируется с возникновением риска развития рака. Расположение характеризующих клетки параметров на диаграмме типа изображенной на рис. 4 позволяет определить степень такого риска. На вставке к рис. 4, показывающей зависимость среднего числа центров образования зародышей репликации на длине $l_0 = (v/J)^{1/2}$ от среднего числа дефектов на такой же длине (фактически начальный участок всей изображенной на рис. 4 кривой), для иллюстрации приведено такое расположение для ряда типов клеток по биофизическим данным, цитируемым в работе [12]. Слева направо для клеток: эмбриона лягушки; дрожжей; человеческой соматической клетки; человеческой мутантной клетки (в которой неактивирован механизм контроля повреждений, но в остальном нормальной); специфического участка человеческого генома (так называемого ампликона, имеющего больше эндогенных задержек границ репликации); человеческой клетки с неактивированным механизмом контроля повреждений и выраженной онкогенностью. Этот ряд призван иллюстрировать тот факт, что, хотя и нормально функционирующие клетки имеют многочисленные повреждения, именно по мере приближения к области, вызываемой дефектами смены механизма кинетики репликации $nl_0 \sim 1$, повреждаемость клеток принимает катастрофический характер. Такое указание может быть полезным для принятия мер, противодействующих замедлению кинетики репликации, с целью предотвращения серьезных последствий для организмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров, Изв. АН СССР, сер. Мат. **3**, 355 (1937).
2. W. A. Johnson and P. A. Mehl, Trans. AIMME **135**, 416 (1939).
3. В. З. Беленький, *Геометрико-вероятностные модели кристаллизации*, Наука, Москва (1980).
4. S. Jun and J. Bechhoefer, Phys. Rev. E **71**, 011909 (2005).
5. J. A. Kittl and Q. Z. Hang, Thin Solid Films **290–291**, 473 (1996).
6. J. Tominaga, T. Kikukawa, M. Takahashi, T. Kato, and T. Aoi, Jpn. J. Appl. Phys. Part 1 **36**, 3598 (1997).
7. K. Sekimoto, Physica A **135**, 328 (1986).
8. Б. В. Петухов, В. Л. Покровский, ЖЭТФ **63**, 634 (1972).
9. P. Kraikivski, R. Lipowsky, and J. Kierfeld, Eur. Phys. J. E **16**, 319 (2005).
10. J. W. Evans, Rev. Mod. Phys. **65**, 1281 (1993).
11. Б. В. Петухов, ФТТ **41**, 1988 (1999).
12. M. G. Gauthier, J. Herrick, and J. Bechhoefer. Phys. Rev. Lett. **104**, 218104 (2010).
13. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, Наука, Москва (1979).