ЖЭТФ, 2012, том 141, вып. 2, стр. 252–257

ДВУМЕРНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Т. К. Ребане *

Научно-исследовательский институт физики им. В. А. Фока Санкт-Петербургского университета
198504, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 31 мая 2011 г.

Рассмотрен спектр энергии и собственных состояний заряженной частицы в электрическом поле двумерного анизотропного осциллятора и в однородном магнитном поле. Найдено точное аналитическое решение задачи при любой напряженности магнитного поля. Исследованы характерные особенности изменения спектра энергии в зависимости от напряженности магнитного поля. Полученные результаты представляют интерес для квантовомеханической теории магнетизма и могут использоваться при моделировании магнитных свойств атомов и молекул.

1. ВВЕДЕНИЕ

Модель гармонического осциллятора, в которой частицы взаимодействуют силами упругости, нашла широкое применение в различных задачах квантовой механики — от теории колебаний молекул до теории искусственных атомов и молекул типа «гармония» [1]. Это объясняется легкостью точного решения уравнения Шредингера в случае гармонического потенциала, которая ввиду возможности разделения переменных сохраняется и для систем в однородном электрическом поле. В магнитном поле такое разделение переменных возможно только при наличии осевой симметрии, и вместо точного решения уравнения Шредингера приходится довольствоваться приближенными. В настоящей работе мы покажем, что анизотропный гармонический осциллятор представляет собой исключение из этого правила: задача о его спектре энергии и собственных функциях в однородном магнитном поле любой напряженности имеет простое и точное аналитическое решение, несмотря на отсутствие осевой симметрии. В основе нашего подхода лежит использование операторов сдвига собственных значений энергии и метод варьирования векторного потенциала [2].

2. ОПЕРАТОР ЭНЕРГИИ ДВУМЕРНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим движение бесспиновой частицы с массой m и зарядом q в поле двумерного анизотропного осциллятора с потенциальной энергией $V(x,y(\omega_1^2x^2+\omega_2^2y^2)/2$ и в однородном магнитном поле $\boldsymbol{\mathcal{H}} = \mathcal{H}\mathbf{e}_z$, параллельном оси z. Будем считать, что потенциальная энергия частицы аддитивно зависит от координаты z, и рассмотрим ее движение в плоскости xy. Двумерное движение частицы определяется оператором энергии

$$H = m\left[\left(v_x^2+v_y^2+\omega_1^2x^2+\omega_2^2y^2\right)\right]/2, \tag{1}$$

где v_x и v_y — компоненты оператора скорости частицы в магнитном поле:

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{i\hbar}{m}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{q}{cm}A_x, \\ v_y &= -\frac{i\hbar}{m}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{q}{cm}A_y. \end{aligned} \tag{2}$$

Векторный потенциал $\mathbf{A}$ однородного магнитного поля подчиняется условию $\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathcal{H}\mathbf{e}_z$. Выберем его в виде

$$\mathbf{A}(x,y) = \mathcal{H}\frac{\omega_1 x\mathbf{e}_y - \omega_2 y\mathbf{e}_x}{2(\omega_1+\omega_2)}\,. \tag{3}$$

Линии вектора $\mathbf{A}(x,y)$ (3) представляют собой подобные эллипсы: вектор $\mathbf{A}(x,y)$ в любой точке (x,y) направлен по касательной к эллипсу

$$\omega_1x^2+\omega_2y^2 = \text{const}.$$

Этот «эллиптический» векторный потенциал связан со стандартным векторным потенциалом с круговыми векторными линиями $\mathbf{A}_0(x,y)$ градиентным преобразованием:

$$\mathbf{A}(x,y) = \mathbf{A}_0(x,y) + \nabla F(x,y), \tag{4}$$

*E-mail: trebane@mail.ru

где

$$\mathbf{A}_0(x,y) = \mathcal{H}\frac{x\mathbf{e}_y - y\mathbf{e}_x}{2}, \quad F(x,y) = \mathcal{H}\frac{(\omega_1-\omega_2)xy}{2(\omega_1+\omega_2)}.$$

При нашем выборе векторного потенциала (3) оператор энергии (1) равен

$$H(x,y) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \\ + \frac{m\left[(\omega_1+\omega_2)^2+\omega_c^2\right](\omega_1^2x^2+\omega_2^2y^2)}{2(\omega_1+\omega_2)^2} + \\ + \frac{i\hbar\omega_c}{\omega_1+\omega_2}\left(\omega_2 y\frac{\partial}{\partial x} - \omega_1 x\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad (5)$$

где $\omega_c = q\mathcal{H}/mc$ — циклотронная частота.

3. ОСНОВНОЕ СОСТОЯНИЕ ДВУМЕРНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Первые два члена в правой части формулы (5) описывают два линейных одномерных осциллятора с частотами

$$\frac{\left[(\omega_1+\omega_2)^2+\omega_c^2\right]^{1/2}\omega_1}{\omega_1+\omega_2}$$

и

$$\frac{\left[(\omega_1+\omega_2)^2+\omega_c^2\right]^{1/2}\omega_2}{\omega_1+\omega_2},$$

которые колеблются вдоль осей x и y, а третий член, равный

$$\frac{i\hbar q}{mc}\mathbf{A}\cdot\nabla = \frac{i\hbar\omega_c}{\omega_1+\omega_2}\left(\omega_2 y\frac{\partial}{\partial x} - \omega_1 x\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad (6)$$

определяет индуцированную магнитным полем связь между этими осцилляторами. Так как вектор $\mathbf{A}(x,y)$ в (3) касается эллипсов

$$\omega_1 x^2 + \omega_2 y^2 = \text{const},$$

он ортогонален градиенту любой функции вида $\Psi(\omega_1x^2+\omega_2y^2)$. Поэтому оператор (6) обращает все такие функции в нуль, и для них гамильтониан (5) эквивалентен сумме операторов энергии двух одномерных осцилляторов. Отсюда следует, что безузловая волновая функция

$$\Psi_{00}(x,y) = N \times \\ \times \exp\left\{-\frac{m}{2\hbar}\frac{\left[(\omega_1+\omega_2)^2+\omega_c^2\right]^{1/2}(\omega_1x^2+\omega_2y^2)}{\omega_1+\omega_2}\right\} \quad (7)$$

является точной собственной функцией оператора энергии (5) при любой напряженности однородного магнитного поля. Подставим ее в уравнение

$$H(x,y)\Psi_{00}(x,y) = E(0,0)\Psi_{00}(x,y)$$

и найдем энергию основного состояния двумерного осциллятора в однородном магнитном поле:

$$E(0,0) = \frac{\hbar}{2}\left[(\omega_1+\omega_2)^2+\omega_c^2\right]^{1/2}. \quad (8)$$

Достойно внимания, что собственная функция основного состояния $\Psi_{00}(x,y)$ в магнитном поле чисто вещественна. Это является следствием выбора калибровки векторного потенциала (4), которая минимизирует поправку первого порядка к энергии по магнитному полю [1].

4. ОПЕРАТОРЫ СДВИГА ЭНЕРГИИ

Энергии и собственные функции возбужденных состояний двумерного осциллятора в магнитном поле определим с помощью операторов сдвига собственных значений энергии. Если оператор L удовлетворяет перестановочному соотношению

$$[H,L] = HL - LH = \varepsilon L, \quad (9)$$

где ε — постоянная, то он переводит собственную функцию Ψ_E оператора энергии с собственным значением E в собственную функцию $\Psi_{E+\varepsilon}$ со смещенным собственным значением $(E+\varepsilon)$:

$$H(L\Psi_E) = (E+\varepsilon)L\Psi_E, \quad (10)$$

так что

$$L\Psi_E = \Psi_{E+\varepsilon}.$$

Введем масштабированные операторы компонент скоростей и координат частицы:

$$\alpha = (m/\hbar\omega_c)^{1/2}v_x, \quad \beta = (m/\hbar\omega_c)^{1/2}v_y, \\ \gamma = (\hbar\omega_c/m)^{1/2}x, \quad \delta = (\hbar\omega_c/m)^{1/2}y. \quad (11)$$

Они удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[\alpha,\beta] = [\gamma,\alpha] = [\delta,\beta] = i, \\ [\alpha,\delta] = [\beta,\gamma] = [\gamma,\delta] = 0. \quad (12)$$

Оператор энергии (5) принимает теперь компактный вид

$$H = \frac{\hbar\omega_c}{2}\left(\alpha^2+\beta^2+\frac{\omega_1^2\gamma^2+\omega_2^2\delta^2}{\omega_c^2}\right). \quad (13)$$

Оператор сдвига энергии L будем искать в виде линейной комбинации операторов (12),

$$L = A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta, \qquad (14)$$

с подлежащими определению коэффициентами A, B, C и D. Его коммутатор с оператором энергии (13) равен

$$[H, L] = \hbar\omega_c \left[(iB - C)\alpha + \frac{i\hbar\omega_c}{2}(D - A)\beta + \right. \\ \left. + \frac{\hbar}{4\omega_c}\left(\omega_1^2 A\gamma + \omega_2^2 B\delta\right)\right]. \qquad (15)$$

Тогда из соотношения (9) следует система линейных однородных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &-iB + iC - \frac{\varepsilon}{\hbar\omega_c} A = 0, \\ &iA + iD - \frac{\varepsilon}{\hbar\omega_c} B = 0, \\ &-i\frac{\omega_1^2}{\omega_c^2} A - \frac{\varepsilon}{\hbar\omega_c} C = 0, \\ &i\frac{\omega_2^2}{\omega_c^2} B - \frac{\varepsilon}{\hbar\omega_c} D = 0. \end{aligned} \qquad (16)$$

Она имеет ненулевое решение при условии исчезновения ее детерминанта

$$\varepsilon^4 - \hbar^2(\omega_c^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)\varepsilon^2 + \hbar^4\omega_1^2\omega_2^2 = 0. \qquad (17)$$

Положив

$$\varepsilon^2 = \hbar^2\Omega^2,$$

получим два значения частоты Ω:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= 2^{-1/2}\left\{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_c^2 + \right. \\ &\left. + \left[\left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_c^2\right)^2 - 4\omega_1^2\omega_2^2\right]^{1/2}\right\}^{1/2}, \\ \Omega_2 &= 2^{-1/2}\left\{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_c^2 - \right. \\ &\left. - \left[\left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_c^2\right)^2 - 4\omega_1^2\omega_2^2\right]^{1/2}\right\}^{1/2}. \end{aligned} \qquad (18)$$

Ради определенности будем считать, что частота колебаний свободного осциллятора по оси x превосходит частоту колебаний по оси y: $\omega_1 > \omega_2$. (Случай изотропного осциллятора с $\omega_1 = \omega_2$ допускает простое разделение переменных в цилиндрических координатах.)

Тогда соблюдается «субординация» частот:

$$\Omega_1 \geq \omega_1 > \omega_2 \geq \Omega_2. \qquad (19)$$

Нетрудно убедиться, что найденное выше выражение (8) для энергии основного состояния двумерного осциллятора в магнитном поле тождественно совпадает с выражением

$$E(0,0) = \frac{\hbar}{2}(\Omega_1 + \Omega_2). \qquad (20)$$

Из формул (18) и (20) следует, что спектр уровней энергии двумерного осциллятора в однородном магнитном поле определяется формулой

$$\begin{aligned} E(n_1, n_2) = \hbar\left[(n_1 + 1/2)\Omega_1 + (n_2 + 1/2)\Omega_2\right], \\ n_1, n_2 = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \qquad (21)$$

Этот спектр представляет собой суперпозицию двух эквидистантных спектров с расстояниями между соседними уровнями, равными $\hbar\Omega_1$ и $\hbar\Omega_2$. При понижении напряженности магнитного поля каждый из уровней $E(n_1, n_2)$ (21) переходит в уровень энергии свободного осциллятора $\hbar[(n_1 + 1/2)\omega_1 + (n_2 + 1/2)\omega_2]$. Такое взаимно-однозначное соответствие между уровнями означает, что найденные с помощью операторов сдвига уровни $E(n_1, n_2)$ охватывают весь спектр энергии двумерного осциллятора в магнитном поле.

5. ПЕРЕСТРОЙКА СПЕКТРА ЭНЕРГИИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Из формул (18) следует, что с ростом напряженности магнитного поля более высокая частота двумерного осциллятора Ω_1 повышается, а более низкая частота Ω_2 понижается. При этом расстояния между «высокочастотными» уровнями растут, а расстояния между «низкочастотными» уровнями убывают. Переходы между первыми испытывают «фиолетовый», а между вторыми — «красный» сдвиг.

В слабых магнитных полях (при $\omega_c \ll \omega_1$) смещения индивидуальных уровней энергии квадратичны по ω_c. Они могут иметь различные знаки, что соответствует преобладанию положительного диамагнитного вклада первого порядка от оператора

$$q^2(A_x^2 + A_y^2)/2mc^2$$

или же отрицательного парамагнитного вклада второго порядка от оператора

$$i\hbar qA\nabla/mc.$$

В сильных полях (при $\omega_c \gg \omega_1$) справедливы разложения частот Ω_1 и Ω_2 по обратным степеням циклотронной частоты ω_c:

$$\Omega_1 = \omega_c + \frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2\omega_c} + \ldots,$$
$$\Omega_2 = \omega_1\omega_2\left(\frac{1}{\omega_c} - \frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2\omega_c^3} + \ldots\right). \qquad (22)$$

Отсюда видно, что с ростом магнитного поля частота Ω_1 неограниченно растет, а частота Ω_2 стремится к нулю.

В сильных магнитных полях состояния с одинаковыми квантовыми числами n_1 образуют группы, в которых уровни с различными n_2 при усилении поля сближаются и в пределе сливаются с уровнем Ландау

$$E = (n_1 + 1/2)\hbar\omega_c.$$

Эти группы уровней описываются формулой

$$E(n_1,n_2) = \hbar\omega_c\left[(n_1{+}1/2){+}\frac{(n_1{+}1/2)(\omega_1^2{+}\omega_2^2)}{2\omega_c^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{(n_2+1/2)\omega_1\omega_2}{\omega_c^2} + \ldots\right]. \qquad (23)$$

Такое поведение спектра энергии связано с обратно-пропорциональным магнитному полю уменьшением радиусов циклотронных орбит. В сильном поле они имеют очень малые радиусы и почти не возмущаются осцилляторным потенциалом. (Полуклассическое пояснение этой ситуации дается в Приложении.)

В слабых магнитных полях (при $\omega_c \ll \omega_1 + \omega_2$) уровни энергии двумерного осциллятора можно разложить следующим образом:

$$E(n_1,n_2) = (n_1+1/2)\hbar\omega_1\left(1 + \frac{\omega_c}{\omega_1^2-\omega_2^2}\right) +$$
$$+ (n_2+1/2)\hbar\omega_2\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega_1^2-\omega_2^2}\right). \qquad (24)$$

Так как $\omega_1^2 > \omega_2^2$, состояния высокочастотной серии n_1 вносят в магнитную восприимчивость

$$\chi = -\left.\frac{\partial^2 E}{\partial\mathcal{H}^2}\right|_{\mathcal{H}=0}$$

отрицательные (диамагнитные) вклады, а состояния низкочастотной серии n_2 — положительные вклады парамагнитного характера. Вклады присущи состояниям, магнитные моменты которых в отсутствие магнитного поля равны нулю. В отличие от ориентационного парамагнетизма, их парамагнетизм обусловлен магнитными моментами, индуцируемыми магнитным полем, и описывается во втором порядке теорией возмущений. Характер суммарной восприимчивости определяется конкуренцией диамагнитных вкладов высокочастотной серии уровней и парамагнитных вкладов низкочастотных уровней. Восприимчивость χ основного состояния осциллятора ($n_1 = n_2 = 0$) всегда диамагнитна. С ростом числа низкочастотных квантов n_2 она становится парамагнитной при любом фиксированном числе высокочастотных квантов n_1.

Заметим, что наши результаты остаются в силе и для изотропного осциллятора с частотой

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_1^2 = \omega.$$

Формулы (18) в этом случае принимают вид

$$\Omega_1, \Omega_2 = (\omega^2 + \omega_c^2/2 \pm \omega_c/2)^{1/2},$$

а энергия $E(n_1,n_2)$ состояний с $n_1 \neq n_2 = 0$ будет в слабых магнитных полях линейно зависеть от напряженности поля. Это означает, что такие состояния изотропного осциллятора в отсутствие магнитного поля обладают собственными магнитными моментами. Заметим также, что в магнитном поле полностью снимается «случайное» вырождение групп уровней с одинаковыми суммами квантовых чисел $n_1 + n_2$.

Рисунки 1 и 2 иллюстрируют перестройку рассчитанных по формулам (18) и (21) уровней энергии двумерного осциллятора в магнитном поле. Из рисунков видно, что точное квантовомеханическое описание двумерного осциллятора в магнитном поле приводит к набору немонотонно изменяющихся и пересекающихся уровней энергии. Этот спектр энергии существенно отличается от интуитивной модели, в которой влияние магнитного поля сводится только к появлению добавочного эффективного потенциала

$$q^2(A_x^2 + A_y^2)/2mc^2,$$

вызывающего повышение всех без исключения уровней энергии и рост расстояний в сериях эквидистантных уровней.

Сопоставление интуитивной модели с точным решением задачи указывает на существенную роль входящего в гамильтониан оператора $(i\hbar q/mc)\mathbf{A}\nabla$, учитывающего индуцированное магнитным полем взаимодействие одномерных осцилляторов.

6. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ВОЗБУЖДЕННЫХ СОСТОЯНИЙ

Четырем корням уравнения (17),

$$\varepsilon_1 = \hbar\Omega_1, -\hbar\Omega_1, \hbar\Omega_2, -\hbar\Omega_2,$$

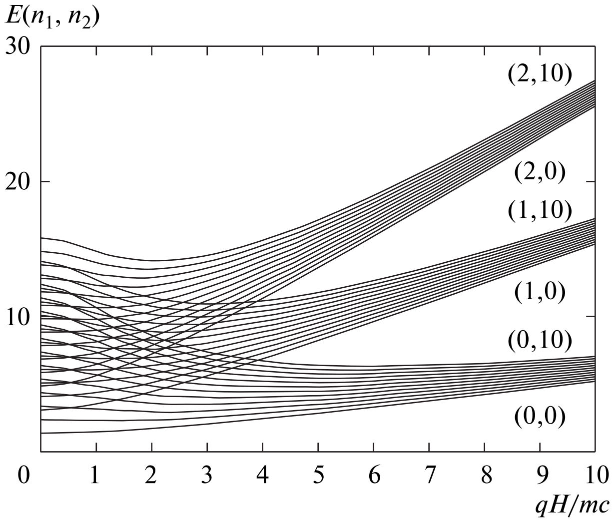

Рис. 1. Влияние магнитного поля на группы уровней энергии $E(n_1, n_2)$ двумерного осциллятора с квантовыми числами $n_1 = 1, 2, 3$ и $n_2 = 1, 2, \ldots, 10$. Частоты собственных колебаний осциллятора $\omega_1 = 3^{1/2}$ и $\omega_2 = 1$. Указаны пары квантовых чисел n_1 и n_2 низшего и верхнего уровней данной группы. С ростом магнитного поля уровни в каждой группе сближаются, стремясь в пределе к уровням Ландау с энергией $(n_1 + 1/2)\hbar\omega_c$

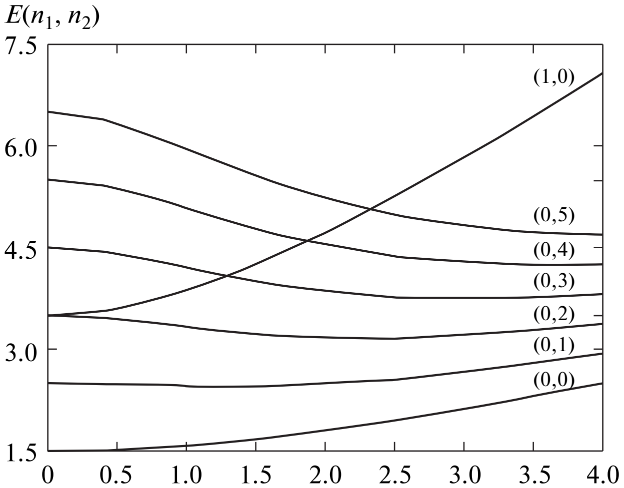

Рис. 2. Низшие уровни энергии двумерного осциллятора с собственными частотами $\omega_1 = 2$ и $\omega_2 = 1$ в магнитных полях с циклотронной частотой $0 \le \omega_c \le 4$. Уровни энергии с парами квантовых чисел $n_1 = 0$, $n_2 \ge 2$ на этом интервале с ростом магнитного поля понижаются (парамагнитны)

соответствуют четыре оператора повышения или понижения энергии на квант:

$$\varepsilon_1 = \hbar\Omega_1 \quad \text{или} \quad \varepsilon_2 = \hbar\Omega_2.$$

Обозначим их через L_1^+, L_1^-, L_2^+ и L_2^-. Эти операторы определяются уравнениями (16) с точностью до постоянных множителей и могут быть взяты в виде

$$L_j^\pm = A_j \left\{ \alpha \mp \frac{i}{\omega_c} \left[\left(\Omega_j - \frac{\omega_1^2}{\Omega} \right) \beta - \frac{\omega_1^2}{\Omega_j} \gamma \right] - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\omega_2}{\omega_c} \right)^2 \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\Omega_j^2} \right) \delta \right\}. \quad (25)$$

Индекс $j = 1, 2$ отмечает серию эквидистантных уровней с частотой переходов между ними Ω_1 или Ω_2 (18) в магнитном поле. Величины A_j $(j = 1, 2)$ — свободно выбираемые вещественные постоянные. Верхний знак в правой части формулы (25) следует брать в случае операторов повышения энергии L_j^+, а нижний — для операторов понижения энергии L_j^-.

Собственные функции возбужденных состояний двумерного осциллятора в магнитном поле получаются применением операторов повышения энергии L_1^+ и L_2^+ к собственной функции основного состояния (7):

$$\Psi n_1 n_2(x, y) = (L_1^+)^{n_1} (L_2^+)^{n_2} \Psi_{00}(x, y). \quad (26)$$

С учетом формул (11) и (25) можно сказать, что операторы L_1^+ и L_2^+ являются линейными комбинациями операторов x, y, $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial y$. Отсюда следует, что в правой части формулы (26) стоит произведение некоторого полинома $Pn_1n_2(x, y)$ и функции $\Psi_{00}(x, y)$. Поэтому ненормированные собственные функции двумерного осциллятора в магнитном поле даются формулой

$$\Psi n_1 n_2(x, y) = P n_1 n_2(x, y) \exp \left\{ - \frac{m}{2\hbar} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{\left[(\omega_1 + \omega_2)^2 + \omega_c^2 \right]^{1/2} (\omega_1 x^2 + \omega_2 y^2)}{\omega_1 + \omega_2} \right\}, \quad (27)$$
$$n_1, n_2 = 1, 2, \ldots$$

С учетом уравнений (18) и (21) соответствующие уровни энергии $E(n_1, n_2)$ даются формулой

$$E(n_1, n_2) = 2^{-1/2} \hbar (n_1 + 1/2) \times$$
$$\times \left\{ \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_c^2 + \left[(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_c^2)^2 - 4\omega_1^2 \omega_2^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2} +$$
$$+ 2^{-1/2} \hbar (n_2 + 1/2) \left\{ \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_c^2 - \left[(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_c^2)^2 - \right. \right.$$
$$\left. \left. - 4\omega_1^2 \omega_2^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}, \quad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \ldots \quad (28)$$

В заключение заметим, что оператор энергии двумерного осциллятора (13) в магнитном поле распадается на сумму двух операторов:

$$H = H_1 + H_2, \quad H_1 = L_1^+ L_1^- + \hbar\Omega_1/2, \\ H_2 = L_2^+ L_2^- + \hbar\Omega_2, \tag{29}$$

коммутирующих между собой и имеющих собственные значения $\hbar\left[(n_1 + 1/2)\Omega_1\right]$ и $\hbar\left[(n_2 + 1/2)\Omega_2\right]$. Значения постоянных множителей A_1 и A_2 в выражении (25) для операторов $L_j^\pm$ определяются почленным приравниванием коэффициентов при операторах α, β, γ и δ в обеих частях равенства $H = H_1 + H_2$. В результате получим

$$A_1^2 = \frac{\hbar\omega_c}{2}\,\frac{\Omega_1^2\Omega_2^2}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}\left(\frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\omega_1^2}\right), \\ A_2^2 = \frac{\hbar\omega_c}{2}\,\frac{\Omega_1^2\Omega_2^2}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}\left(\frac{1}{\omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_1^2}\right). \tag{30}$$

Учет этих значений и формул (11) позволяет при желании в явном виде выписать операторы сдвига энергии $L_j^\pm$ (24), а также гамильтонианы аналогов одномерных гармонических осцилляторов H_1 и H_2 (29) через операторы x, y, $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial y$.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Двумерный анизотропный гармонический осциллятор является уникальной системой, лишенной осевой симметрии, но допускающей точное аналитическое определение энергии и собственных функций в магнитном поле любой напряженности. Решение этой задачи строится на основе специального выбора векторного потенциала и использования операторов сдвига собственных значений энергии.

Работа является продолжением работ автора по исследованию магнитных свойств гармонического осциллятора и молекул [4, 5].

Автор признателен Ю. Т. Ребане за полезные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим возмущающее действие осцилляторного потенциала

$$V(x,y) = m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2)/2$$

на циклотронную орбиту с центром в точке с координатами x_0 и y_0. Этот потенциал, отсчитанный от центра циклотронной орбиты, имеет вид

$$V(x',y') = m(\omega_1^2 x'^2 + \omega_2^2 y'^2) + \\ + m(\omega_1^2 x' x_0 + \omega_2^2 y' y_0) + m(\omega_1^2 x_0^2 + \omega_2^2 y_0^2)/2, \tag{A.1}$$

где

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y'.$$

Квадратичная по x' и y' часть осцилляторного потенциала $V(x',y')$ уменьшает радиус циклотронной орбиты и ускоряет частоту вращения частицы по ней на величину $(\omega_1^2 + \omega_2^2)/2\omega_c$, приводя к положительному сдвигу энергетических уровней, описываемому вторым членом в формуле (23) основного текста.

Кроме того, линейная по x' и y' часть осцилляторного потенциала $V(x',y')$ вызывает медленный дрейф центра циклотронной орбиты со скоростью

$$\mathbf{v} = \frac{c}{e}\,\frac{1}{\mathcal{H}^2}[\nabla V \times \boldsymbol{\mathcal{H}}]$$

в направлении, перпендикулярном градиенту потенциала $V(x',y')$ [3]. Уравнения движения для центра циклотронной орбиты имеют вид

$$\frac{\partial x_0}{\partial t} = y_0\frac{\omega_2^2}{\omega_c}, \quad \frac{\partial y_0}{\partial t} = -x_0\frac{\omega_1^2}{\omega_c}. \tag{A.2}$$

Отсюда следует, что этот дрейф происходит с частотой $\omega_1\omega_2/\omega_c$. Квантование этого медленного движения приводит к поправке для уровней энергии, которая определяется третьим членом в выражении (23). Наконец, постоянное слагаемое в правой части (A.1) совпадает с членом, пропорциональным квантовому числу n_2 в формуле (23) основного текста.

Таким образом, поведение уровней энергии двумерного анизотропного осциллятора в сильном магнитном поле допускает наглядное полуклассическое толкование.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Varga, P. Navratil, J. Usukura, and Y. Suzuki, Phys. Rev. B **63**, 205308 (2001).

2. Т. К. Ребане, ЖЭТФ **38**, 963 (1960).

3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 2, *Теория поля*, Наука, Москва (1988), с. 84.

4. Т. К. Ребане, Теор. и эксп. химия **5**, 1 (1969).

5. Т. К. Ребане, *Магнитные свойства молекул с замкнутыми электронными оболочками. Современные проблемы квантовой химии*, т. 1, Наука, Ленинград (1986), с. 165.