ЖЭТФ, 2012, том 141, вып. 2, стр. 258–266

РОЖДЕНИЕ ПАРЫ ПОЛЯРИЗОВАННЫМ ФОТОНОМ В ПОСТОЯННОМ И ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. М. Катков *

Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 14 февраля 2011 г.

Полная вероятность рождения электрон-позитронной пары поляризованным фотоном в постоянном и однородном электромагнитном поле произвольной конфигурации определена с использованием мнимой части диагонализованного поляризационного оператора. Получены приближенные выражения для этой вероятности в четырех областях энергии фотона. В области высоких энергий вычислены поправки к стандартному квазиклассическому приближению. В области промежуточных энергий, где такое приближение неприменимо, вероятность процесса вычисляется с помощью метода перевала. Показано, что в области энергий фотона выше порога рождения пары в магнитном поле слабое электрическое поле устраняет корневые расходимости вероятности рождения частиц на уровнях Ландау. Для относительно малых энергий фотона развито низкоэнергетическое приближение. При таких энергиях действие электрического поля на процесс является определяющим, а влияние магнитного поля связано с его взаимодействием с магнитным моментом рождающихся частиц. Такое взаимодействие проявляется, в частности, в различии вероятностей рождения пары внешним полем для скалярных и спинорных частиц.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рождение пары фотоном в постоянном и однородном электромагнитном поле является одним из базисных процессов квантовой электродинамики во внешних полях и играет существенную роль во многих других более сложных процессах. Этот процесс впервые был рассмотрен в магнитном поле. Исследование было начато в 1952 г. независимо Клепиковым и Толом [1, 2]. В работе Клепикова [3], которая была основана на решении уравнения Дирака, вероятность фоторождения пары была получена на массовой оболочке. В 1964 г. Никишовым и Ритусом [4] процесс был рассмотрен в скрещенном поле. В 1967 г. ими была получена вероятность процесса для случая поляризованных фотонов в виде однократного интеграла [5]. Вероятность фоторождения пары в электрическом поле была найдена Нарожным [6] в 1968 г. с помощью решения уравнения Дирака в потенциале Заутера [7]. В 1970 г. Никишов [8] в таком поле получил дифференциальное распределение вероятности процесса, также используя решение уравнения Дирака. В 1968 г. Нарожным [9] впервые был получен поляризационный оператор фотона во внешнем скрещенном поле, и впервые вероятность рождения пары во внешнем поле была вычислена с использованием мнимой части поляризационного оператора. В 1971 г. Адлер [10] получил поляризационный оператор фотона в магнитном поле, используя технику собственного времени, развитую Швингером [11]. В том же году Баталиным и Шабадом [12] впервые был вычислен поляризационный оператор фотона в постоянном поле произвольной конфигурации при помощи функции Грина, также найденной Швингером [11]. В 1975 г. Байером, Катковым и Страховенко [13] в таком поле был вычислен вклад петель заряженных частиц с n внешними фотонными линиями с использованием техники собственного времени. При $n = 2$ в работе [13] было дано явное выражение для вклада скалярных и спинорных частиц в поляризационный оператор фотона. Для вклада спинорных частиц полученные выражения согласуются с [12], но имеют иную форму записи. Байером и Катковым с использованием мнимой части поляризационного операто-

*E-mail: katkov@inp.nsk.su

ра была детально исследована вероятность рождения e^+e^--пары фотоном в чисто магнитном [14] и чисто электрическом [15] полях.

В настоящей работе на основе мнимой части поляризационного оператора [13] (используется система единиц $\hbar = c = 1$) рассматривается интегральная вероятность рождения e^+e^--пары поляризованным фотоном в присутствии как магнитного поля, так и электрического. В такой постановке задача рассматривается впервые. Рассмотрение проводится в системе, в которой электрическое и магнитное поля параллельны и направлены вдоль оси 3. В этой системе тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ и тензоры $F^*_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ и $C_{\mu\nu}$ имеют вид

$$\begin{gathered} F_{\mu\nu} = C_{\mu\nu}E + B_{\mu\nu}H, \quad F^*_{\mu\nu} = C_{\mu\nu}H - B_{\mu\nu}E, \\ C_{\mu\nu} = g^0_\mu g^3_\nu - g^3_\mu g^0_\nu, \quad B_{\mu\nu} = g^2_\mu g^1_\nu - g^1_\mu g^2_\nu; \\ eE/m^2 = E/E_0 \equiv \nu, \quad eH/m^2 = H/H_0 \equiv \mu. \end{gathered} \tag{1}$$

После проведения всех расчетов мы можем вернуться к ковариантной форме описания процесса при помощи следующих соотношений:

$$\begin{gathered} E^2, H^2 = \left(\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2\right)^{1/2} \pm \mathcal{F}, \\ \mathcal{F} = \frac{\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2}{2}, \quad \mathcal{G} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{H}; \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} f = \frac{e^2\mathcal{F}}{m^4} = \frac{\nu^2 - \mu^2}{2}, \quad g = \frac{e^2\mathcal{G}}{m^4} = \mu\nu, \\ \kappa^2 = -\frac{e^2}{m^6}\left(F^{\mu\nu}k_\nu\right)^2; \end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} r = \frac{\kappa^2}{8\left(f^2 + g^2\right)^{1/2}} = -\frac{\left(F^{\mu\nu}k_\nu\right)^2}{8m^2\left(\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2\right)^{1/2}}, \\ \kappa^2 = 4r(\mu^2 + \nu^2); \end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered} \left(C^2\right)_{\mu\nu} = \frac{F^2_{\mu\nu} + H^2 g_{\mu\nu}}{E^2 + H^2}, \\ \left(C^2\right)_{\mu\nu} - \left(B^2\right)_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}. \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор, e и m — заряд и масса электрона, k_μ — 4-импульс фотона, используется метрика

$$ab = a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}.$$

Параметр r (4) инвариантным образом определяет квадрат поперечного импульса фотона в единицах $4m^2$, при этом величина $2m\sqrt{r}$ есть энергия фотона ω в системе, где электрическое и магнитное поля направлены по оси 3, а $k_3 = 0$. В случае чисто магнитного поля, когда $g = 0$, $f < 0$, значение $r = 1$ определяет порог рождения пары фотоном.

В разд. 2 приводится общее выражение для вероятности рождения электрон-позитронной пары поляризованным фотоном. В разд. 3 в области энергии фотона $r \gg 1$, когда движение частиц является релятивистским, выводится стандартное квазиклассическое приближение (СКП) для вероятности рождения пары фотоном. Вероятность процесса в этом приближении впервые была получена в работе [3]. В этом случае основной вклад дают большие значения квантовых чисел состояний, в которых создаются частицы, и движение этих частиц является квазиклассическим. Полученная таким образом в работе [3] асимптотика вероятности процесса для неполяризованных частиц зависит только от одного параметра κ. В работе [4] была вычислена вероятность рождения пары неполяризованным фотоном в скрещенном поле, также зависящая только от одного параметра κ. При этом утверждалось, что для $\kappa^2 \gg f, g$ вероятность процесса $W(\kappa, f, g)$ в поле произвольной конфигурации при малых значениях $f, g \ll 1$ с хорошей точностью можно представить в виде $W(\kappa, 0, 0)$ и описывать универсальными формулами, выведенными для скрещенного поля. В работе [16] соответствующие выражения были получены с использованием операторного квазиклассического метода. В этом методе на конечном этапе вычислений используется классическая траектория движения частицы [17]. Сам же подход основан на пренебрежении коммутаторами динамических переменных частицы по сравнению с произведением классических значений этих переменных. Учитывается только, причем точно, некоммутативность динамических переменных с полем фотона ($\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\mathbf{f}(\mathbf{P}) = \mathbf{f}(\mathbf{P} - \hbar\mathbf{k})\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$, $\hbar\omega \sim \varepsilon$, ε — энергия частицы). Таким образом, в указанном методе квазиклассическим является движение заряженных частиц, а их взаимодействие с фотоном носит сугубо квантовый характер. Детальное изложение этих вопросов см. также в работе [18]. Поскольку коммутаторы компонент 4-импульса частицы пропорциональны соответствующим компонентам тензора электромагнитного поля и не зависят от энергии частицы, с ростом энергии движение заряженных частиц становится все более классическим. Примером такого подхода является исследование процессов излучения и рождения пар в скрещенном поле, когда всегда можно перейти в систему отсчета, где напряженность поля стремится к нулю, а энергия частицы — к бесконечности (так называемая система бесконечного импульса). В результате получаем, что в скрещенном поле СКП применимо при любой энергии фотона. Поляризационный оператор фотона в скрещенном поле можно получить из общего выражения для этого оператора соответствующим предельным переходом [12, 13].

В настоящей работе вычислена первая по f и g поправка к СКП в поле произвольной конфигурации ($f, g \neq 0$), которая, в свою очередь, определяет область применимости СКП. Полученная вероятность приведена в лоренц-инвариантной форме и содержит два инвариантных параметра κ и f. Параметр g в этом порядке отсутствует по причине сохранения четности в электромагнитных процессах. При $\kappa \ll 1$, $|f| \ll 1$ относительный вклад этих поправок имеет порядок $|f|/\kappa^3$. Впервые такая поправка была получена в электрическом поле, см. статью [6], формула (34). В указанной работе отмечалось, что при $\kappa \ll 1$ для применимости формул скрещенного поля недостаточно выполнения условия $\kappa^2 \gg f, g$, а требуется более жесткое условие $\kappa^3 \gg |f|$.

Важным обстоятельством является то, что применимость СКП нарушается в области, где движение родившихся частиц имеет релятивистский характер и продолжает оставаться квазиклассическим. Так, в чисто магнитном поле движение родившихся частиц квазиклассично при выполнении условия $r - 1 \gg \sqrt{|f|}$, когда заполняются высокие уровни Ландау с $n \gg 1$. В случае $r \gg 1$ ($\kappa^2 \gg 8\left(f^2+g^2\right)^{1/2}$) условие квазиклассичности заведомо выполняется. В области энергий фотона, лежащей ниже области применимости СКП ($|f| \gtrsim \kappa^3$, $r^3 \lesssim 1/|f|$), квазиклассический характер движения частиц позволил развить в работе [14] новое приближение для вероятности рождения пары, названное в этой работе новым квазиклассическим приближением (НКП). В работе [15] НКП использовалось для случая чисто электрического поля и было показано, что при $r \gg 1$ в области неприменимости СКП вероятность рождения пары фотоном в электрическом поле может существенно превышать соответствующую вероятность в магнитном поле. Теория, развитая в указанных выше работах и основанная на методе перевала НКП, используется в разд. 4 для вычисления вероятности процесса в присутствии как электрического, так и магнитного поля в области промежуточных энергий фотона. Полученное выражение применимо в широком интервале энергий, который перекрывается с областью применимости СКП при $\kappa \ll 1$.

В разд. 5 рассматривается область энергий фотона $r \ll 1$, когда родившиеся частицы являются нерелятивистскими. В частности, в области $r \lesssim \nu^2$ ($\nu = eE/m^2 \ll 1$), где НКП неприменимо, развито низкоэнергетическое приближение (НЭП), использующее анализ, проведенный в работе [15]. В свою очередь, результаты, полученные в НЭП, перекрываются с соответствующими асимптотиками НКП. При очень низких энергиях фотона, $r \ll \nu^2/(1+\nu^2)$, получены асимптотические выражения, применимые для произвольной напряженности полей E и H.

2. ОБЩЕЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТИ ПРОЦЕССА

Наш анализ основан на общем выражении для вклада спинорных частиц в поляризационный оператор, который был получен в диагональном виде в работе [13], см. формулы (3.19), (3.33). Рассмотрение проводится в системе, в которой электрическое и магнитное поля параллельны и направлены вдоль оси 3. Все обозначения введены в предыдущем разделе (см. формулы (1)–(5)). Мнимая часть собственных значений κ_i поляризационного оператора на массовой поверхности ($k^2 = 0$) связана с вероятностью W_i рождения e^-e^+-пары фотоном с поляризацией e_i, направленной вдоль соответствующего собственного вектора, следующими соотношениями:

$$W_i = -\frac{\mathrm{Im}\kappa_i}{\omega}; \tag{6}$$

$$e_i^\mu = \frac{b_i^\mu}{\sqrt{-b_i^2}}, \quad b_2^\mu = (Bk)^\mu + \frac{2\Omega_4}{\Omega}(Ck)^\mu, \quad b_3^\mu = (Ck)^\mu - \frac{2\Omega_4}{\Omega}(Bk)^\mu; \tag{7}$$

$$\begin{gathered} -\mathrm{Im}\,\kappa_2 = r\left(\Omega_2 - \frac{2\Omega_4^2}{\Omega}\right), \\ -\mathrm{Im}\,\kappa_3 = r\left(\Omega_3 + \frac{2\Omega_4^2}{\Omega}\right), \\ \Omega = \Omega_3 - \Omega_2 + \sqrt{(\Omega_3-\Omega_2)^2 + 4\Omega_4^2}, \\ r = \frac{\omega^2 - k_3^2}{4m^2}, \end{gathered} \tag{8}$$

$$\Omega_i = \frac{\alpha m^2}{2\pi i}\mu\nu \int\limits_{-1}^{1} dv \times \int\limits_{-\infty-i0}^{\infty-i0} f_i(v,\mu,x)\exp(i\psi(v,\mu,x))x\,dx. \tag{9}$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
&f_1(\nu,\mu,x) = \frac{\cos(\mu x v)\,\mathrm{ch}(\nu x v)}{\sin(\mu x)\,\mathrm{sh}(\nu x)} - \\
&- \frac{\cos(\mu x)\,\mathrm{ch}(\nu x)\sin(\mu x v)\,\mathrm{sh}(\nu x v)}{\sin^2(\mu x)\,\mathrm{sh}^2(\nu x)}, \\
&f_2(\nu,\mu,x) = 2\frac{\mathrm{ch}(\nu x)(\cos(\mu x)-\cos(\mu x v))}{\mathrm{sh}(\nu x)\sin^3(\mu x)} + f_1, \\
&f_3(\nu,\mu,x) = 2\frac{\cos(\mu x)(\mathrm{ch}(\nu x)-\mathrm{ch}(\nu x v))}{\sin(\mu x)\,\mathrm{sh}^3(\nu x)} - f_1, \\
&f_4(\nu,\mu,x) = \frac{\cos(\mu x)\cos(\mu x v)-1}{\sin^2(\mu x)} \times \\
&\times \frac{\mathrm{ch}(\nu x)\,\mathrm{ch}(\nu x v)-1}{\mathrm{sh}^2(\nu x)} + \frac{\sin(\mu x v)\,\mathrm{sh}(\nu x v)}{\sin(\mu x)\,\mathrm{sh}(\nu x)};
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi(v,\mu,x) = 2r\Bigg(&\frac{\mathrm{ch}(\nu x)-\mathrm{ch}(\nu x v)}{\nu\,\mathrm{sh}(\nu x)} + \\
&+ \frac{\cos(\mu x)-\cos(\mu x v)}{\mu\sin(\mu x)}\Bigg) - x.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Следует отметить, что контур интегрирования в формуле (9) лежит несколько ниже вещественной оси.

3. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Теория СКП впервые была развита в работах [3–5, 16, 17, 19]. СКП справедливо при $r \gg 1$, когда созданные фотоном частицы являются ультрарелятивистскими, и может быть получено из выражений (9)–(11) разложением функций $f_i(v,\mu,x)$, $\psi(v,\mu,x)$ по степеням x. Для того чтобы получить поправки к СКП, мы должны сохранить следующие по x члены разложения. Имеем

$$
\begin{aligned}
b_2^\mu &= (Bk)^\mu + \frac{\nu}{\mu}(Ck)^\mu \propto F^{\mu\nu}k_\nu, \\
b_3^\mu &= (Ck)^\mu - \frac{\nu}{\mu}(Bk)^\mu \propto F^{*\mu\nu}k_\nu;
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\mathrm{Im}\,\kappa_i = i\frac{\alpha m^2}{12\pi} r(\mu^2+\nu^2)\times \\
&\times \int_{-1}^{1} dv\,(1-v^2) \int_{-\infty}^{\infty} h_i(v,x)\,[-i\gamma(v,x)]\,x\,dx; \\
&\gamma(v,x) = x + \frac{x^3}{12} r\,(1-v^2)^2(\nu^2+\mu^2),
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
h_2(v,x) &= \frac{3+v^2}{2} + \frac{1}{30}\left(15-6v^2-v^4\right)\times \\
&\times \left(\mu^2-\nu^2\right)x^2 - \frac{i}{720}r(\mu^2+\nu^2)\times \\
&\times \left(1-v^2\right)^2\left(9-v^2\right)\left(\mu^2-\nu^2\right)x^5, \\
h_3(v,x) &= 3 - v^2 + \frac{1}{60}\left(15-2v^2+3v^4\right)\times \\
&\times \left(\mu^2-\nu^2\right)x^2 - \frac{i}{360}r(\mu^2+\nu^2)\left(1-v^2\right)^2\times \\
&\times \left(3-v^2\right)^2\left(\mu^2-\nu^2\right)x^5.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Воспользуемся известными интегралами:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(x+\frac{ax^3}{3}\right)dx &= \frac{2}{\sqrt{3a}}K_{1/3}\left(\frac{2}{3\sqrt{a}}\right), \\
\int_{-\infty}^{\infty} x\sin\left(x+\frac{ax^3}{3}\right)dx &= \frac{2}{\sqrt{3}a}K_{2/3}\left(\frac{2}{3\sqrt{a}}\right).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Сохраняя старшие (независящие от x) члены в (14), получаем вероятность в СКП:

$$
\begin{aligned}
&W_i^{(SQA)} = -\frac{\mathrm{Im}\,\kappa_i}{\omega} = \frac{\alpha m^2}{3\sqrt{3}\pi\omega}\times \\
&\times \int_{-1}^{1} \frac{s_i}{1-v^2}K_{2/3}(z)\,dv, \quad z = \frac{8}{3(1-v^2)\kappa}, \\
&s_2 = 2(3-v^2), \quad s_3 = 3+v^2, \\
&\kappa^2 = 4r(\mu^2+\nu^2) = -\frac{e^2}{m^6}\left(F^{\mu\nu}k_\nu\right)^2.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Поправки к СКП имеют вид

$$
\begin{aligned}
W_i^{(1)} &= -\frac{\alpha m^2 f}{15\sqrt{3}\pi\omega\kappa}\int_{-1}^{1}\frac{dv}{1-v^2}G_i(v,z), \\
f &= \frac{e^2\mathcal{F}}{m^4} = \frac{\nu^2-\mu^2}{2},
\end{aligned}
\tag{17}
$$

где

$$
\begin{aligned}
G_2(v,z) &= \left(36+4v^2-18z^2\right)K_{1/3}(z) + \\
&+ \left(3v^2-57\right)zK_{2/3}(z), \\
G_3(v,z) &= -\left(34+2v^2+36z^2\right)K_{1/3}(z) + \\
&+ \left(78-6v^2\right)zK_{2/3}(z).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Соответствующие формулы для преобразования интегралов можно найти в Приложении С работы [14]. Видно, что в рассматриваемом порядке поправки не зависят от инвариантного параметра g, поскольку g является псевдоскаляром. Асимптотики интегралов, входящих в поправочные члены, даны в упомянутом выше Приложении С [14]. Асимптотические выражения для случая $\kappa \ll 1$ нам понадобятся в дальнейшем:

$$W_2^{(1)} = \frac{4\alpha m^2 f}{5\omega\kappa^2}\sqrt{\frac{2}{3}}\exp\left(-\frac{8}{3\kappa}\right), \\ W_3^{(1)} = 2W_2^{(1)}, \quad \frac{W_i^{(1)}}{W_i^{(SQA)}} = \frac{64f}{15\kappa^3}. \tag{19}$$

Для неполяризованных фотонов ($W = (W_2+W_3)/2$) поправки при $\kappa \ll 1$ согласуются с поправками, полученными в работе [6], формула (34), в случае чисто электрического поля.

4. ОБЛАСТЬ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЭНЕРГИЙ

В поле, слабом по сравнению с критическим ($E/E_0 = \nu \ll 1$, $E_0 = 1.32\cdot 10^{16}$ В/см, $H/H_0 = \mu \ll 1$, $H_0 = 4.41\cdot 10^{13}$ Гс), при относительно низкой энергии фотона, $r \lesssim \nu^{-2/3}$, стандартное квазиклассическое приближение (16) неприменимо. Это, в частности, следует из последнего соотношения в (19). Для такой энергии и при дополнительном условии $r \gg \nu^2$ при взятии интегралов по x в (9) можно воспользоваться методом перевала. В этом случае вклад дают малые значения v, так что в фазе $\psi(v,x)$ можно провести соответствующие разложения, а пределы интегрирования по v сделать бесконечными. В результате получаем

$$\Omega_i = \frac{\alpha m^2}{2\pi i}\mu\nu \int\limits_{-\infty}^{\infty} dv \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_i(0,x) \times \\ \times \exp\left\{-i\left[\varphi(x) + v^2\chi(x)\right]\right\} x\,dx, \tag{20}$$

где

$$\varphi(x) = 2r\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{tg}\frac{\mu x}{2} - \frac{1}{\nu}\operatorname{th}\frac{\nu x}{2}\right) + x, \\ \chi(x) = rx^2\left(\frac{\nu}{\operatorname{sh}(\nu x)} - \frac{\mu}{\sin(\mu x)}\right). \tag{21}$$

Из уравнения $\varphi'(x_0) = 0$ находим точку перевала x_0:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\nu s}{2} + \operatorname{th}^2\frac{\mu s}{2} = \frac{1}{r}, \quad x_0 = -is. \tag{22}$$

Подставляя x_0 в формулы, определяющие интеграл в (20), получаем

$$i\varphi(x_0) = 2r\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{th}\frac{\mu s}{2} - \frac{1}{\nu}\operatorname{tg}\frac{\nu s}{2}\right) + s \equiv b(s), \tag{23}$$

$$i\chi(x_0) = rs^2\left(\frac{\nu}{\sin(\nu s)} - \frac{\mu}{\operatorname{sh}(\mu s)}\right) \equiv \frac{1}{2}rs^2 A(s), \tag{24}$$

$$i\varphi''(x_0) = r\left[\nu\sin\frac{\nu s}{2}\cos^{-3}\frac{\nu s}{2} + \right. \\ \left. + \mu\operatorname{sh}\frac{\mu s}{2}\operatorname{ch}^{-3}\frac{\mu s}{2}\right] \equiv rD(s), \tag{25}$$

$$f_2(0,x_0) = \frac{1}{\operatorname{sh}(\mu s)\sin(\nu s)} \times \\ \times\left[\cos(\nu s)\operatorname{ch}^{-2}\frac{\mu s}{2} - 1\right] \equiv -a_2(s), \\ f_3(0,x_0) = \frac{1}{\operatorname{sh}(\mu s)\sin(\nu s)} \times \\ \times\left[1 - \operatorname{ch}\mu s\cos^2\frac{\nu s}{2}\right] \equiv -a_3(s), \\ f_4(0,x_0) = -\left(4\cos^2\frac{\nu s}{2}\operatorname{ch}^2\frac{\mu s}{2}\right)^{-1} \equiv -a_4(s). \tag{26}$$

Проводя стандартную процедуру метода перевала и используя формулы (6)–(8), получаем следующие выражения:

$$\Omega_i = a_i\frac{\alpha m^2\mu\nu}{r\sqrt{AB}}\exp(-b), \\ W_i = \lambda_i\frac{\alpha m^2\mu\nu}{\omega\sqrt{AB}}\exp(-b); \tag{27}$$

$$\lambda_2 = a_2 - \frac{2a_4^2}{a}, \quad \lambda_3 = a_3 + \frac{2a_4^2}{a}, \\ a = a_3 - a_2 + \sqrt{(a_3-a_2)^2 + 4a_4^2}; \\ b_2^\mu = (Bk)^\mu + \frac{2a_4}{a}(Ck)^\mu, \\ b_3^\mu = (Ck)^\mu - \frac{2a_4}{a}(Bk)^\mu. \tag{28}$$

Для $r \gg 1$ эти формулы справедливы при выполнении условия $b \gg 1$. Первые два члена разложения $s(r)$ (22) и $b(s(r))$ (23) по $1/r$ имеют вид

$$s(r) \approx \frac{4}{\kappa}\left(1 - \frac{8f}{3\kappa^2}\right), \\ b(r) \approx \frac{8}{3\kappa} - \frac{64f}{15\kappa^3}, \quad \kappa^2 = 4(\mu^2+\nu^2)r. \tag{29}$$

Из найденного разложения следует, что применимость формулы (27) при $r \gg 1$ ограничена условием $\kappa \ll 1$. Старшие члены разложения остальных величин в формулах (27), (28) имеют вид

$$A = \frac{1}{3}\left(\mu^2+\nu^2\right)s, \quad D = \frac{3}{2}A, \quad a_2 = \frac{\mu^2+2\nu^2}{4\mu\nu}, \\ a_3 = \frac{2\mu^2+\nu^2}{4\mu\nu}, \quad a_4 = \frac{1}{4}, \quad a = \frac{\mu}{2\nu}, \\ \lambda_2 = \frac{\mu^2+\nu^2}{4\mu\nu}, \quad \lambda_3 = 2\lambda_2, \tag{30}$$

а векторы поляризации даются выражением (12). Подставляя найденные значения в формулу для W_i (27), имеем

$$W_2 = \frac{\alpha m^2 \kappa}{8\omega}\sqrt{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{8}{3\kappa}+\frac{64f}{15\kappa^3}\right), \quad W_3 = 2W_2. \tag{31}$$

При условии применимости СКП для малых κ, $\kappa \ll 1$, найденное выражение согласуется с результатами предыдущего раздела. Таким образом, существует область энергий фотона, где справедливы оба приближения.

Несомненный интерес представляет изучение вероятности исследуемого процесса вблизи порога рождения пары в магнитном поле ($|r-1| \ll 1$) в присутствии слабого электрического поля ($\nu \ll \mu$). Напомним, что в чисто магнитном поле для применимости полученных результатов должно выполняться условие $r-1 \gg \mu$ [14]. В этом случае уравнение (22) и его решения даются следующими приближенными выражениями:

$$\frac{\xi^2 y_0^2}{16} \approx \exp(-y_0) + \frac{1-r}{4}, \quad y_0 = \mu s, \quad \xi = \frac{\nu}{\mu}; \tag{32}$$

$$y_0 \approx 2\ln\frac{2}{\xi\ln(4/\xi)}\left(1-\frac{r-1}{2\xi^2\ln(2/\xi)\ln^3(4/\xi)}\right), \quad |r-1| \lesssim \xi^2; \tag{33}$$

$$y_0 \approx \ln\frac{4}{r-1}\left(1-\frac{\xi^2}{4\,(r-1)}\ln\frac{4}{r-1}\right), \quad r-1 \gg \xi^2; \tag{34}$$

$$\xi y_0 = \nu s \approx 2\sqrt{1-r}, \quad 1-r \gg \xi^2. \tag{35}$$

Применимость используемого метода перевала связана с большой величиной коэффициента при втором члене разложения в фазе (21), пропорциональном $(y-y_0)^2$. В рассматриваемой области энергий имеем

$$i\varphi''\frac{(x_0)(x-x_0)^2}{2} \approx \approx \frac{\xi^2}{4\mu}\left[y_0 + \frac{y_0^2}{2} + \frac{2\,(r-1)}{\xi^2}\right](y-y_0)^2. \tag{36}$$

Таким образом, в случае, когда $\nu/\mu = \xi \ll 1$, $|r-1| \lesssim \xi^2$, формула (27) справедлива, если выполнено условие $\xi^2/\mu \gg 1$. В случае, когда $1 \gg r-1 \gg \xi^2$, для этого должно выполняться условие $r-1 \gg \mu$. И наконец, при $1 \gg 1-r \gg \xi^2$ для применимости рассматриваемого приближения необходимо выполнение условия

$$\frac{\sqrt{1-r}\xi}{\mu} = \sqrt{\frac{\xi^2}{\mu}\,\frac{1-r}{\mu}} \gg 1.$$

При низких энергиях фотона, $r \ll 1$ ($\nu^2 \ll r \ll \nu^{2/3}$), имеем

$$\nu s \approx \pi - 2\sqrt{r} + r^{3/2}\left(\frac{2}{3} - \operatorname{th}^2\frac{\pi\eta}{2}\right), \quad b \approx \frac{1}{\nu}\left(\pi - 4\sqrt{r} + \frac{2r}{\eta}\operatorname{th}\frac{\pi\eta}{2}\right); \tag{37}$$

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{r}\operatorname{sh}(\pi\eta)}\left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{th}^2\frac{\pi\eta}{2} + \frac{\mu}{4r}\operatorname{cth}(\pi\eta)\right), \quad a_3 = \frac{\operatorname{cth}(\pi\eta)}{2r^{3/2}}\left(1+\frac{4\eta\sqrt{r}}{\operatorname{sh}(2\pi\eta)}\right) \approx a, \quad a_4 = \left(4r\operatorname{ch}^2\frac{\pi\eta}{2}\right)^{-1}; \tag{38}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{r}\operatorname{sh}(\pi\eta)}\left[1 - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\operatorname{ch}(\pi\eta)}\right)\operatorname{th}^2\frac{\pi\eta}{2} + \frac{\mu}{4r}\operatorname{cth}(\pi\eta)\right], \quad \lambda_3 \approx a_3, \quad A = \frac{\nu}{\sqrt{r}}\left(1 - \frac{2\eta\sqrt{r}}{\operatorname{sh}(\pi\eta)}\right), \quad D = \frac{\nu}{r^{3/2}}, \quad \eta = \frac{\mu}{\nu}. \tag{39}$$

Здесь мы сохранили главные члены и следующую за ними первую поправку. Член, пропорциональный μ в выражении для a_2, появился в качестве вклада следующего члена разложения по v в f_1 ($\propto v^2$) (10). Подставив найденные значения в формулу (27), можно получить следующее выражение для искомой вероятности:

$$W_3 = \frac{\alpha m^2 \mu}{2\omega\sqrt{r}}\operatorname{cth}(\pi\eta)\left(1+\frac{\eta\sqrt{r}}{\operatorname{sh}(\pi\eta)}+\frac{4\eta\sqrt{r}}{\operatorname{sh}(2\pi\eta)}\right)\times \exp(-b), \quad W_2 = \frac{\alpha m^2\mu\sqrt{r}}{\omega\operatorname{sh}(\pi\eta)}\left[1 - \frac{2+\operatorname{ch}(\pi\eta)}{2\operatorname{ch}(\pi\eta)}\operatorname{th}^2\frac{\pi\eta}{2} + \frac{\mu}{4r}\operatorname{cth}(\pi\eta)\right]\exp(-b), \tag{40}$$

где b дается в формуле (37). Из полученного выражения видно, что $W_2 \ll W_3$. При $\eta \gg 1$ вероятность W_3 увеличивается на коэффициент $\eta\pi\exp(\pi r/\nu)$ по сравнению со случаем чисто электрического поля. В выражении для вероятности W_2 появляется дополнительный множитель $\exp(-\pi\mu/\nu)$, и ее применимость невозможна при условии $\mu \gtrsim \sqrt{r} \gg \nu$. В этом случае для W_2 можно использовать формулу (43), которая будет получена ниже.

5. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

При $r \sim \nu^2$ рассмотренное выше приближение становится неприменимым и надо использовать другой подход. Замкнем контур интегрирования по x в (9) в нижней полуплоскости и представим это выражение в виде

$$\Omega_i = \frac{\alpha m^2}{2\pi i}\mu\nu \int\limits_{-1}^{1} dv \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \oint f_i(v,x)\exp(i\psi(v,x))x\,dx, \quad (41)$$

где путь интегрирования является простым замкнутым контуром, включающим точку $-i\pi n/\nu$. Выберем этот контур вблизи указанной точки следующим образом: $\nu x = -i\pi n + \xi_n$, $|\xi_n| \sim \sqrt{r} \sim \nu$, и разложим входящие функции по ξ_n. В случае $\nu \ll 1$ из-за появления множителя $\exp(-i\pi n/\nu)$ главный вклад в сумму дает $n = 1$. Вблизи точки $-i\pi/\nu$ главные члены разложения имеют вид ($\xi \equiv \xi_1$)

$$\begin{aligned} f_3 &= \frac{4i}{\xi^3}\operatorname{cth}(\pi\eta)\cos^2\frac{\pi v}{2}, \\ f_2 &= -\frac{1}{\xi^2}\frac{\operatorname{cth}(\pi\eta)}{\operatorname{sh}(\pi\eta)}\operatorname{sh}(v\pi\eta)\ \sin(v\pi), \\ f_4 &= \frac{2}{\xi^2}\frac{\operatorname{ch}(\pi\eta) - \operatorname{ch}(v\pi\eta)}{\operatorname{sh}^2(\pi\eta)}\cos^2\frac{\pi v}{2}, \\ \psi &= \frac{4r}{\xi\nu}\cos^2\frac{\pi v}{2} - \frac{\xi}{\nu} + \frac{i\pi}{\nu}. \end{aligned} \quad (42)$$

Используя интегралы (7.3.1), (7.7.1 (11)) из работы [20] и подставляя полученные результаты в формулы (6), (8), находим

$$W_3 = 2\frac{\alpha m^2}{\omega}\eta\pi\operatorname{cth}(\pi\eta)\exp\left(-\frac{\pi}{\nu}\right)I_1^2(z), \quad z = \frac{2\sqrt{r}}{\nu}, \quad (43)$$

$$W_2 = \frac{\alpha m^2}{\omega}\mu\operatorname{cth}(\pi\eta)\exp\left(-\frac{\pi}{\nu}\right) \times \\ \times \left[\frac{\pi\eta}{\operatorname{sh}(\pi\eta)}\int\limits_0^1 \operatorname{ch}(v\pi\eta)I_0\left(2z\cos\frac{\pi v}{2}\right)dv - 1\right], \quad (44)$$

где $I_n(z)$ — функция Бесселя мнимого аргумента. При вычислении W_2 было проведено интегрирование по частям по v. При $\eta \ll 1$ получаем

$$W_2 = \frac{\alpha m^2}{\omega}\frac{\nu}{\pi}\exp\left(-\frac{\pi}{\nu}\right)\left(I_0^2(z) - 1\right). \quad (45)$$

Рассмотренное приближение применимо при $r \ll \nu$. В формулах для вероятности W_i мы сохранили только лидирующие члены.

При $r \gg \nu^2$ можно воспользоваться асимптотикой функций Бесселя для больших значений аргумента:

$$I_n(z) \approx \frac{\exp(z)}{\sqrt{2\pi z}}.$$

В результате получим формулу (40), если в ней сохранить только главные члены. В области очень низких энергий фотона $r \ll \nu^2$ ($z \ll 1$) можно разложить $I_n(z)$ по z. После интегрирования по v в формуле (43) имеем для лидирующих членов в W_i следующее выражение:

$$W_3 = 2\frac{\alpha m^2 r}{\omega\nu^2}\eta\pi\operatorname{cth}(\pi\eta)\exp\left(-\frac{\pi}{\nu}\right), \quad W_2 = \frac{\nu}{\pi(1+\eta^2)}W_3. \quad (46)$$

Несомненный теоретический интерес представляет рассматриваемая вероятность при произвольных (не только малых) значениях параметров μ и ν. Для простоты рассмотрим случай неполяризованных фотонов. При условии $r \ll \nu^2/\left(1+\nu^2\right)$ в фазе $\psi(v,x)$ можно сохранить только член $-x$. После интегрирования по v имеем

$$\begin{aligned} W &= \frac{W_2 + W_3}{2} = \\ &= \frac{\alpha m^2 r}{i\pi\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\oint F(y_n)\exp\left(-i\frac{y_n}{\nu}\right)dy_n, \\ F(y) &= \frac{\operatorname{ch}y\,(\eta y\cos(\eta y) - \sin(\eta y))}{\operatorname{sh}y\sin^3\eta y} + \\ &\quad + \frac{\eta\cos(\eta y)\,(y\operatorname{ch}y - \operatorname{sh}y)}{\operatorname{sh}^3 y\sin(\eta y)}. \end{aligned} \quad (47)$$

Суммируя вычеты в точках $y_n = -in\pi$, получаем

$$W = \frac{\alpha m^2 r}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi n}{\nu}\right)\Phi(z_n), \quad z_n = \eta\pi n, \quad (48)$$

$$\Phi(z_n) = \frac{z_n}{\nu^2}\operatorname{cth}z_n + \frac{2}{\operatorname{sh}^2 z_n} \times \\ \times \left[\frac{\eta z_n}{\nu} + \left(1+\eta^2\right)z_n\operatorname{cth}z_n - 1\right]. \quad (49)$$

При отсутствии магнитного поля ($\eta \to 0$, $z_n \to 0$) имеем

$$\Phi = \frac{1}{\nu^2} + \frac{2}{\nu\pi n} + \frac{2}{\pi^2 n^2} + \frac{2}{3},$$
$$W = \frac{\alpha m^2 r}{\omega}\left[\left(\frac{1}{\nu^2}+\frac{2}{3}\right)\frac{1}{e^{\pi/\nu}-1} - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{\pi\nu}\ln\left(1-e^{-\pi/\nu}\right) + \frac{2}{\pi^2}\mathrm{Li}_2\left(e^{-\pi/\nu}\right)\right], \tag{50}$$

где $\mathrm{Li}_2(z)$ — дилогарифм Эйлера. В случае $\eta \gg 1$ ($H \gg E$) получаем

$$\Phi = \frac{\pi\eta n}{\nu^2}, \quad W = \frac{\alpha m^2 r}{\omega\nu^2}\frac{\pi\eta}{4}\,\mathrm{sh}^{-2}\frac{\pi}{2\nu}. \tag{51}$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели процесс рождения e^+e^--пары в постоянном и однородном электромагнитном поле при участии реального фотона с заданной поляризацией. Вероятность процесса получена с использованием различных приближений в четырех взаимно перекрывающихся областях энергии фотона. В области применимости СКП созданные фотоном частицы являются ультрарелятивистскими. Главное действие поля в данном случае состоит в передаче этим частицам недостающего поперечного импульса. Роли электрического и магнитного полей при этом совпадают. Но уже в этой области следует отметить специфическую значимость даже слабого электрического поля ($E = \xi H$ ($\xi \ll 1$)), присутствие которого устраняет корневую расходимость вероятности рождения пары частиц с импульсами $p_3 = 0$ на уровнях Ландау. Используется система отсчета, где $k_3 = 0$.

Обсудим этот вопрос подробнее. Вообще говоря, при $\xi \ll 1$ время формирования рассматриваемого процесса $t_c \sim 1/\mu$. (Здесь мы используем систему единиц $\hbar = c = m = 1$). В течение этого времени частицы виртуальной пары приобретают импульс $\delta p_3 \sim \xi$. Если $\xi^2 = \nu^2/\mu^2$ становится больше, чем расстояние между уровнями 2μ ($\nu^2 \gg \mu^3$), то все уровни перекрываются. При этом расходимость вероятности исчезает и НКП можно использовать даже в области энергий $r-1 \lesssim \mu$, где это приближение неприменимо в отсутствие электрического поля [14]. В обратном случае, $\nu^2 \ll \mu^3$, при малых значениях $p_3 \ll \sqrt{\mu}$ и при условии, что действием электрического поля можно пренебречь, время формирования процесса $t_f \sim 1/p_3^2$ и $\delta p_3 \sim \nu/p_3^2 \ll p_3$, т.е. должно выполняться неравенство $\nu^{1/3} \ll p_3 \ll \sqrt{\mu}$. При этом условии расходимость вероятности определяется соотношением $\sqrt{t_f/t_c} \sim \sqrt{\mu}/p_3$. В случае, когда $\nu^{1/3} \gg p_3$, время t_f определяется самосогласованным уравнением $\delta\varepsilon^2 \sim 1/t_f \sim \nu^2 t_f^2$. Из этой оценки следует, что $t_f \sim \nu^{-2/3}$, а величина расходимости имеет вид $\sqrt{\mu t_f} \sim (\mu^3/\nu^2)^{1/6}$ вместо $\sqrt{\mu}/p_3$ в чисто магнитном поле.

В области $r \lesssim 1$ ($\omega \lesssim 2m$) в рассматриваемом процессе становится существенной передача энергии электрическим полем, а при $r \ll 1$ ($\omega \ll m$) это действие электрического поля становится определяющим. Влияние магнитного поля на вероятность процесса в этом случае определяется его взаимодействием с магнитным моментом частиц пары. Указанное взаимодействие проявляется, в частности, в различии вероятностей рождения пары внешним полем для скалярных и спинорных частиц [11].

Проведенный анализ является неполным, если вероятность рождения пары внешним полем (вакуумная вероятность) становится существенной. В этом случае формула (6) определяет только относительную вероятность процесса и следует учитывать нестабильность вакуума. Однако анализ этих проблем выходит за рамки настоящей работы.

Работа выполнена при частичной поддержке федеральной целевой программы «Кадры инновационной России» (Государственный контракт ГК 14.740.11.0082).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. П. Клепиков, Дисс. ... канд. физ.-мат. наук, МГУ, Москва (1952).

2. J. S. Toll, PhD. Thesis, Prinston Univ., Prinston (1952).

3. Н. П. Клепиков, ЖЭТФ **26**, 19 (1954).

4. А. И. Никишов, В. И. Ритус, ЖЭТФ **46**, 776 (1964).

5. А. И. Никишов, В. И. Ритус, ЖЭТФ **52**, 1707 (1967).

6. Н. Б. Нарожный, ЖЭТФ **54**, 676 (1968).

7. F. Sauter, Z. Phys. **69**, 742 (1931).

8. А. И. Никишов, ЖЭТФ **59**, 1262 (1970).

9. Н. Б. Нарожный, ЖЭТФ **55**, 714 (1968).

10. S. L. Adler, Ann. Phys. (N. Y.), **67**, 599 (1971).

11. J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).

12. И. А. Баталин, А. Е. Шабад, ЖЭТФ **60**, 894 (1971).

13. В. Н. Байер, В. М. Катков, В. М. Страховенко, ЖЭТФ **68**, 405 (1975).

14. V. N. Baier and V. M. Katkov, Phys. Rev. D **75**, 073009 (2007).

15. V. N. Baier and V. M. Katkov, Phys. Lett. A **374**, 2201 (2009).

16. В. Н. Байер, В. М. Катков, ЖЭТФ **53**, 1478 (1967).

17. В. Н. Байер, В. М. Катков, В. С. Фадин, *Излучение релятивистских электронов*, Атомиздат, Москва (1973).

18. В. М. Катков, В. М. Страховенко, ЖЭТФ **119**, 1 (2001).

19. W. Tsai and T. Erber, Phys. Rev. D **10**, 492 (1974).

20. H. Bateman and A. Erdélyi, *Higher Transcendental Functions*, Vol. II, McGraw-Hill Book Co, New York (1953).