

ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ И ПРИМЕНЕНИЯ КОРРЕЛИРОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМАХ ПРИ НИЗКОЙ ЭНЕРГИИ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

В. И. Высоцкий^{a,b}, М. В. Высоцкий^a, С. В. Адаменко^b*

^a *Киевский национальный университет им. Т. Шевченко
01601, Киев, Украина*

^b *Электродинамическая лаборатория «Протон-21»
08132, Киев, Украина*

Поступила в редакцию 20 марта 2011 г.

Рассмотрены предпосылки и исследованы некоторые оптимальные методы формирования коррелированного когерентного состояния взаимодействующих частиц в нестационарных системах. Изучено влияние степени корреляции частиц на вероятность их прохождения сквозь кулоновский барьер для реализации ядерных реакций при малой энергии. Для таких процессов вероятность туннельного эффекта и, соответственно, вероятность ядерных реакций могут возрастать на много порядков (в частности, прозрачность барьера увеличивается от $D_{r=0} \approx 10^{-42}$ для некоррелированного состояния до $D_{|r|=0.98} \approx 0.1$ при коэффициенте корреляции $|r| \approx 0.98$). Детально рассмотрены особенности формирования коррелированного состояния частицы при разных типах монотонного убывания частоты гармонического осциллятора, в параболическом поле которого находится эта частица. Впервые рассмотрены особенности и исследована эффективность создания коррелированного состояния при периодическом воздействии на гармонический осциллятор. Показано, что такой метод даже при небольшом интервале изменения частоты осциллятора приводит к быстрому формированию сильнокоррелированного состояния частицы, обеспечивающего практически полное просветление потенциального барьера.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема преодоления кулоновского потенциального барьера при взаимодействии заряженных частиц является ключевой в современной микрофизике. Она определяет решение широкого спектра задач — от глобальных задач астрофизики и до нанотехнологии. Особое значение эта проблема имеет в задаче управляемого ядерного синтеза, для которого действие кулоновского барьера приводит к очень малой вероятности туннельного эффекта для частиц с низкой энергией.

Это фундаментальное ограничение ведет к исключительно большим проблемам, связанным с необходимостью очень быстрого нагрева мишени, состоящей из изотопов водорода (дейтерия D и трития T) до состояния термоядерной плазмы с температурой около 10 кэВ и дополнительного ее сжатия в

$k \geq 10^3$ раз (в случае «инерционного» ядерного синтеза с временем удержания порядка 10^{-9} с на основе исходной мишени с концентрацией атомов порядка 10^{23} см⁻³ [1]), а также аналогичного нагрева мишени низкой плотности до той же температуры с последующим удержанием ее в течение длительного времени (для систем типа ТОКАМАК или стелларатор) [2]. Хорошо известны исключительные большие препятствия, которые необходимо преодолеть для успешного решения в будущем таких глобальных задач. Кроме того, опыт исследований по осуществлению управляемого (DD)- и (DT)-синтеза, проводимых в течение 60 лет, показал, что использование «термоядерного» пути преодоления кулоновского барьера делает практически нереальной любую попытку использования в земных условиях реакций управляемого термоядерного синтеза на основе изотопов, более тяжелых, чем дейтерий или тритий [1, 2].

*E-mail: vivysotskii@gmail.com

Хорошо известно, что реакции (DD)- и (DT)-синтеза на основе этих изотопов не являются оптимальными из-за сопутствующего этим реакциям интенсивного потока быстрых нейтронов, что ведет к наведенной радиоактивности и критичным радиационным повреждениям корпуса реактора (проблема первой стенки, см., например, [2, 3]). В этом отношении более оптимальным является, например, синтез на основе экологически чистой реакции $V^{11} + p = 3He^4 + 8.7 \text{ МэВ}$ с участием ядер V^{11} и обычного водорода, не приводящий к появлению нейтронов и наведению активности [2, 4]. Хотя максимальное сечение этой реакции (около 0.6 бн) намного превышает сечение (DD)-синтеза (около 0.09 бн), ее в настоящее время не рассматривают даже в качестве гипотетической основы для реального реактора из-за сравнительно большого заряда ядра V^{11} , приводящего к намного более высокому кулоновскому барьеру реакции. Для осуществления такой реакции необходим нагрев и длительное удержание (или очень сильное сжатие до концентрации $n \approx 10^{25} \text{ см}^{-3}$) горячей (V^{11}, p)-плазмы при температуре $kT \approx 50\text{--}70 \text{ кэВ}$, что в пять–семь раз больше, чем в случае (DD)- и (DT)-реакций [1, 2, 4]. В ядерных процессах внутри звезд эти проблемы (включая термоядерный и пикноядерный синтез на основе более тяжелых изотопов с суммарным массовым числом до $A \approx 60$ в тяжелых звездах с массой $M > (2\text{--}3)M_{\odot}$) решаются автоматически за счет гравитационного удержания и стимулированного действием гравитации разогрева очень плотной горячей плазмы [4, 5].

При этих обстоятельствах очевидна актуальность новых подходов, которые могут обеспечить увеличение прозрачности потенциальных барьеров за счет применения специфики квантовых процессов, определяющих особенности взаимодействия частиц низкой энергии с этими барьерами без обязательного использования высокотемпературной плазмы в условиях либо длительного удержания либо сверхсильного сжатия. В работе [6] было показано, что использование когерентных коррелированных состояний может приводить к такому эффекту. Конкретный количественный анализ условия формирования сильнокоррелированного состояния проводился [6] на основе одного частного и специально подобранного режима деформации осциллятора, в параболическом поле которого находилась частица, безотносительно к возможности его практической реализации. Ниже детально рассмотрены возможные методы формирования таких состояний, определены условия их реализации и показано, что существует

очень много разных и более простых, чем рассмотренный в работе [6], сценариев такой реализации, близких к условиям реального эксперимента.

2. АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ ФОРМИРОВАНИЯ КОРРЕЛИРОВАННОГО КОГЕРЕНТНОГО СОСТОЯНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ В МОДЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Соотношение неопределенностей Гейзенберга для координаты и импульса,

$$\sigma_q \sigma_p \geq \hbar^2/4, \quad (1a)$$

и его обобщение

$$\sigma_A \sigma_B \geq | \langle [\hat{A}\hat{B}] \rangle |^2/4, \quad \sigma_C = \langle (\Delta\hat{C})^2 \rangle \equiv (\delta C)^2, \quad (1b)$$

$$\Delta\hat{C} = \hat{C} - \langle C \rangle,$$

сделанное в 1929 г. Робертсоном для произвольных динамических переменных A и B , являются базовыми соотношениями квантовой механики. В современной трактовке эти соотношения соответствуют некоррелированным состояниям.

В 1930 г. Шредингер [7] и Робертсон [8] обобщили соотношение (1b) и получили более универсальное неравенство, называемое соотношением неопределенностей Шредингера–Робертсона

$$\sigma_A \sigma_B \geq | \langle [\hat{A}\hat{B}] \rangle |^2/4(1 - r^2), \quad (2a)$$

где

$$r = \sigma_{AB}/\sqrt{\sigma_A \sigma_B}$$

— коэффициент корреляции величин A и B , причем $|r| \leq 1$,

$$\sigma_{AB} = \langle \{ \Delta\hat{A}, \Delta\hat{B} \} \rangle / 2 \equiv \langle ((\hat{A} - \langle A \rangle)(\hat{B} - \langle B \rangle) + (\hat{B} - \langle B \rangle)(\hat{A} - \langle A \rangle)) \rangle / 2 = \langle (\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}) \rangle / 2 - \langle A \rangle \langle B \rangle$$

— взаимная дисперсия величин A и B , соответствующая среднему значению антикоммутирующего оператора погрешностей $\Delta\hat{K} = \hat{K} - \langle K \rangle$.

Соотношение неопределенностей Шредингера–Робертсона (2a) является очевидным обобщением соотношения неопределенностей Гейзенберга–Робертсона (1b) для случая коррелированных состояний и сводится к нему при $r = 0$.

В работах [6, 9, 10] было показано, что для модельной системы, включающей частицу с координатой $q(t)$ и импульсом $p(t)$, находящуюся в поле нестационарного гармонического осциллятора

$V(t) = Mq^2(t)\omega^2(t)/2$, процесс уменьшения частоты колебаний $\omega(t)$ рассматриваемой частицы приводит к возрастанию коэффициента корреляции $r(t)$,

$$r(t) = \langle q\hat{p}_q + \hat{p}_q q \rangle / 2\delta q \delta p_q$$

и изменению соотношения неопределенностей:

$$\delta q \delta p_q \geq \hbar/2 \sqrt{1-r^2}, \quad (2b)$$

где $\delta q \equiv \sqrt{\langle q^2 \rangle}$, $\delta p_q \equiv \sqrt{\langle p_q^2 \rangle}$. Формально изменение коэффициента корреляции в соотношении неопределенностей может быть учтено простой заменой $\hbar \rightarrow \hbar^* \equiv \hbar/\sqrt{1-r^2}$. В отсутствие корреляции ($r \rightarrow 0$) величина $\hbar^* \rightarrow \hbar$, а соотношение неопределенностей принимает вид «обычного» соотношения Гейзенберга

$$\delta q \delta p_q \geq \hbar/2.$$

При формировании сильнокоррелированного состояния частицы с $|r| \rightarrow 1$ имеет место неограниченное возрастание как произведения дисперсий координаты $\langle q^2 \rangle$ и импульса $\langle p_q^2 \rangle$, так и самих дисперсий. Это приводит к возможности намного более эффективного проникновения частицы в область под барьером $V(q)$, чем для той же частицы в некоррелированном состоянии.

В работе [6] было показано, что очень малая прозрачность барьера (вероятность туннельного эффекта) для исходного некоррелированного состояния,

$$D_0 = \exp[-W(E)] \ll 1, \\ W(E) = \frac{2}{\hbar} \int_R^{R+L(E)} |p(q)| dq \equiv \frac{2}{\hbar} \langle |p(q)| \rangle L(E), \quad (3) \\ \langle |p(q)| \rangle = \sqrt{2M} \langle \sqrt{V(q) - E} \rangle,$$

которая соответствует условиям $E \ll V_{max}$, $W(E) \gg 1$, в случае формирования сильнокоррелированного суперпозиционного состояния частицы может возрасти до большой величины $D_{|r| \rightarrow 1} \rightarrow 1$ при той же малой энергии $E \ll V_{max}$. В формуле (3) R — радиус ядра, L — «ширина барьера», определяемая из условия $V(q)_{q=L+R} = E$, M — приведенная масса частицы.

На рис. 1 в качестве примера представлена найденная на основе строгого квантовомеханического расчета зависимость от коэффициента корреляции $0 \leq r \leq 0.987$ вероятности туннельного эффекта в области $x = 10x_0$ под потенциальным барьером (стенкой параболической ямы) [6]

$$V(x, t \geq 0) = \frac{\hbar\omega_0}{2} \left(\frac{x}{x_0} \right)^2,$$

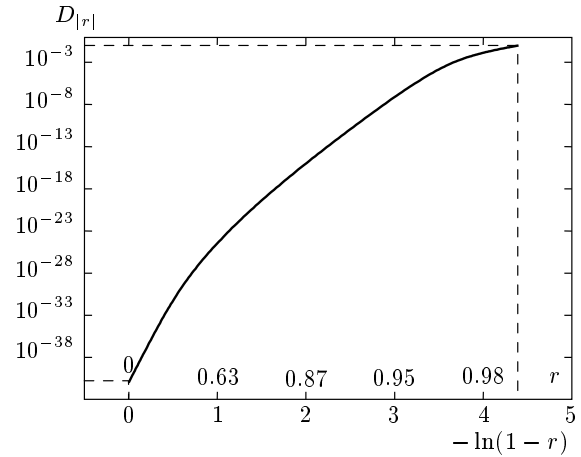


Рис. 1. Зависимость вероятности туннельного эффекта от коэффициента корреляции $0 \leq r \leq 0.987$ в области с координатой $x = 10x_0$ под потенциальным барьером (стенкой параболической ямы) $V(x) = (\hbar\omega_0/2)(x/x_0)^2$

где $x_0 = \sqrt{\hbar/M\omega_0}$ — полуширина распределения плотности вероятности локализации частицы

$$|\psi_0(x)|^2 = \frac{1}{x_0\sqrt{\pi}} \exp \left[- \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 \right]$$

в основном состоянии в параболической потенциальной яме.

Для сильнокоррелированного состояния частицы с $r \approx 0.95-0.98$ вероятность туннельного эффекта $D(10x_0, |r| = 0.98) \equiv D_{|r|=0.98}$ в глубоко подбарьерной области (при $x = 10x_0$) возрастает в $D_{|r|\approx 0.98}/D_0 \approx 10^{30}-10^{40}$ и более раз по сравнению с аналогичной вероятностью $D(10x_0, |r| = 0) \equiv D_0$ для некоррелированного состояния частицы. В очень упрощенном виде такой эффект можно учесть при формальной (не вполне корректной) замене

$$W_{r=0}(E) \rightarrow W_{r \neq 0}(E, \hbar) \equiv \\ \equiv W_{r=0}(E, \hbar^*) = W_{r=0}(E, \hbar) \sqrt{1-r^2}$$

в соотношении (3), из которой следует, что $D_{|r| \rightarrow 1} \rightarrow 1$ даже при условии $E \ll V_{max}$, $W_{r=0}(E) \gg 1$. В этом случае прозрачность потенциального барьера возрастает в $D_0^{\sqrt{1-r^2}}/D_0 = 1/D_0^{1-\sqrt{1-r^2}} \gg 1$ раз, что по порядку величин близко к результату точных расчетов «просветления» этого барьера с использованием строгих методов квантовой механики [6]. Хотя такие оценки с заменой $\hbar \rightarrow \hbar^*$ не вполне корректны, носят чисто иллюстративный характер и должны каждый раз обосновываться, они наглядно

демонстрируют высокую эффективность использования когерентных коррелированных состояний при решении прикладных задач, связанных с туннелированием в случае высокого потенциального барьера и малой энергии частицы.

Физическая причина гигантского увеличения прозрачности барьера для частицы, находящейся в суперпозиционном коррелированном состоянии, состоит в следующем. Каждое из N собственных состояний частицы $\psi_n(q, t)$ в потенциальной яме характеризуется мгновенным значением флуктуации импульса $\Delta \mathbf{p}_n(t)$ с дисперсией

$$\sigma_{pn}(t) = \left\langle (\Delta \mathbf{p}_n(t) - \langle \Delta \mathbf{p}_n(t) \rangle)^2 \right\rangle = \left\langle (\Delta \mathbf{p}_n(t))^2 \right\rangle$$

и равным нулю средним значением $\langle \Delta \mathbf{p}_n(t) \rangle = 0$. Формирование когерентного коррелированного состояния частицы ведет к синфазности и когерентному сложению (конструктивной интерференции) флуктуаций импульса,

$$\Delta \mathbf{p}(t) = \sum_n^N \Delta \mathbf{p}_n(t),$$

для большого количества $N \gg 1$ разных собственных состояний $\psi_n(q, t)$, образующих суперпозиционное когерентное коррелированное состояние $\Psi_{corr}(q, r, t)$ [6]. Следствием такой интерференции является условие

$$\langle \Delta \mathbf{p}_n(t) \cdot \Delta \mathbf{p}_m(t) \rangle_{corr} > 0,$$

выполнение которого приводит к формированию очень больших флуктуаций дисперсии полного импульса частицы:

$$\begin{aligned} \sigma_{p(corr)} &= \left\langle \left\{ \sum_n^N \Delta \mathbf{p}_n(t) \right\}^2 \right\rangle = \\ &= \sum_n^N \sum_{m \neq n}^N \langle \Delta \mathbf{p}_n \cdot \Delta \mathbf{p}_m \rangle_{corr} + \sum_n^N \langle (\Delta \mathbf{p}_n)^2 \rangle \approx \quad (4a) \\ &\approx N^2 \langle \Delta \mathbf{p}_n \cdot \Delta \mathbf{p}_m \rangle_{corr} + N \langle (\Delta \mathbf{p}_n)^2 \rangle \sim N^2, \\ &N \gg 1. \end{aligned}$$

Наличие таких флуктуаций полного импульса в моменты полной синхронизации флуктуаций отдельных собственных состояний ведет к резкому возрастанию вероятности туннелирования за счет кратковременного (флуктуационного) формирования состояний с очень большой флуктуацией кинетической энергией,

$$\begin{aligned} \langle \Delta T(t) \rangle_{corr} &\equiv \langle (\Delta \mathbf{p}(t))^2 / 2M \rangle_{corr} = \\ &= N^2 \langle \Delta \mathbf{p}_n(t) \cdot \Delta \mathbf{p}_m(t) \rangle_{corr} / 2M + \\ &+ N \langle (\Delta \mathbf{p}_n)^2 \rangle / 2M \sim N^2, \quad (4b) \end{aligned}$$

при неизменной (малой) средней кинетической энергии частицы.

Вероятность образования таких коррелированных флуктуаций импульса и кинетической энергии резко возрастает с ростом коэффициента корреляции. Для некоррелированных состояний в соотношениях (4a) и (4b) в силу условия $\langle (\Delta \mathbf{p}_n(t) \cdot \Delta \mathbf{p}_m(t)) \rangle_{noncorr} \equiv 0$ отсутствуют слагаемые, пропорциональные N^2 , и

$$\sigma_{p(noncorr)} \sim N, \quad \langle T(t) \rangle_{noncorr} \sim N.$$

Ясно, что для реализации такого коррелированного состояния в потенциальной яме должно быть много уровней энергии ($N \gg 1$), а сама частица должна быть во взаимно фазированном когерентном суперпозиционном состоянии.

Когерентное коррелированное состояние может быть сформировано в разных квантующих системах. Наиболее просто такое состояние можно сформировать при нахождении частицы в нестационарной параболической потенциальной яме.

В работе [6] (и отчасти в работах [9,10]) был рассмотрен механизм такого формирования. Эффективность этого процесса зависит от закона изменения частоты $\omega_r(t) \equiv \omega(t)$ гармонического осциллятора. При убывании частоты осциллятора от начального значения ω_0 по закону

$$\begin{aligned} \omega_{r_0}(t) &= \omega_0 \left(1 + \frac{2\omega_0 |r_0| t}{\sqrt{1-r_0^2}} \right)^{-1} \equiv \frac{\omega_0}{1+t/\tau_0}, \quad (5) \\ \tau_0 &= \frac{\sqrt{1-r_0^2}}{2\omega_0 |r_0|} \end{aligned}$$

коэффициент корреляции остается неизменным и равным r_0 .

Для монотонного возрастания коэффициента корреляции $|r(t)| \rightarrow 1$ необходимо, чтобы частота $\omega(t)$ с увеличением времени убывала быстрее, чем $\omega_{r_0}(t)$ (5). Если же $\omega(t)$ убывает медленнее, чем $\omega_{r_0}(t)$, то величина $|r(t)|$ с течением времени уменьшается и $r(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В частности, при $r_0 = 0$ величина $|r(t)|$ вначале будет возрастать при любом законе уменьшения $\omega(t)$.

Имеется еще одно дополнительное условие [6]

$$\begin{aligned} \left| \frac{dr(t)}{dt} \right| &\leq \omega_0 \sqrt{1-r^2(t)} \times \\ &\times \left| \frac{r(t)}{|r(t)|} + 2\omega_0 \int_0^t \frac{r(t') dt'}{\sqrt{1-r^2(t')}} \right|^{-1}, \quad (6) \end{aligned}$$

следующее из уравнения

$$\omega(t) = A \sqrt{\frac{1}{g^2(t)(1-r^2)} \left\{ 1 - \frac{g(t)}{\omega_0 \sqrt{1-r^2}} \frac{dr}{dt} \right\}},$$

$$g(t) = \frac{r(t)}{|r(t)|} + 2\omega_0 \int_0^t \frac{r(\tau) d\tau}{\sqrt{1-r^2(\tau)}}, \quad (7)$$

связывающего изменение частоты $\omega(t)$ нестационарного осциллятора с коэффициентом корреляции $r(t)$ [6]. Это условие адиабатичности процесса изменения частоты $\omega(t)$, согласно которому итоговое коррелированное состояние с $|r(t)| \rightarrow 1$ не может быть достигнуто за как угодно малый интервал времени. Это соответствует тому, что производная $|dr(t)/dt|$ в формуле (6) ни в один момент времени не должна быть очень большой. Если это условие нарушается, то частота $\omega(t)$ будет мнимой. Условие (6) ограничивает либо закон изменения $r(t)$, либо время, в течение которого возможно возрастание корреляции.

Существуют два разных метода анализа и оптимизации процесса формирования коррелированного состояния на основе уравнений (6) и (7).

Первый метод состоит в том, что для нахождения оптимального условия изменения величины $\omega(t)$ необходимо использовать наперед заданный вид конкретной зависимости $r(t)$, который должен одновременно удовлетворять как ограничению (6), так и оптимальному условию $|r| \rightarrow 1$. Этот метод, несмотря на кажущуюся логичность, является неоптимальным, поскольку в большинстве случаев наперед заданная «удобная» форма зависимости $r(t)$ не согласуется с условием адиабатичности (6) или приводит к такому выражению для $\omega(t)$, которое очень сложно реализовать в эксперименте.

Второй, более оптимальный, метод состоит в решении обратной задачи — нахождении $r(t)$ при таком заданном законе изменения частоты осциллятора $\omega(t)$, который согласуется с возможностями реального эксперимента. В этом случае проблема обеспечения условия адиабатичности решается автоматически за счет использования реальной зависимости $\omega(t)$. Для нахождения таких решений можно использовать более удобную для расчета параметрическую форму решения $r(\omega(t))$, обратную к уравнению (7) и эквивалентную ему. Это решение может быть получено при анализе уравнения движения классического осциллятора с переменной частотой, которое в безразмерной форме имеет вид

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \omega^2(t)\varepsilon = 0, \quad \varepsilon(0) = 1,$$

$$\left. \frac{d\varepsilon}{dt} \right|_0 = i, \quad \omega(0) = \omega_0, \quad (8)$$

где ε — комплексная амплитуда гармонического оператора, нормированная на величину $x_0 = \sqrt{\hbar/M\omega_0}$.

Коэффициент корреляции определяется выражением [1–3]

$$r = \operatorname{Re} \left(\varepsilon^* \frac{d\varepsilon}{dt} \right) \left| \varepsilon^* \frac{d\varepsilon}{dt} \right|^{-1},$$

$$r^2 = 1 - \omega_0^2 \left| \varepsilon^* \frac{d\varepsilon}{dt} \right|^{-2}. \quad (9)$$

В общем случае решение уравнения (8) имеет вид

$$\varepsilon(t) = e^{\varphi(t)}, \quad \varphi(t) = \alpha(t) + i\beta(t). \quad (10)$$

Подставляя (10) в (8) и (9), используя следующие из (8) начальные условия

$$\varphi(0) = \alpha(0) = \beta(0) = 0, \quad \left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_0 = i,$$

$$\left. \frac{d\alpha}{dt} \right|_0 = 0, \quad \left. \frac{d\beta}{dt} \right|_0 = 1 \quad (8a)$$

и разделяя действительную и мнимую части полученного уравнения, находим

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - e^{-4\alpha} = -\omega^2(t),$$

$$\beta(t) = \int_0^t \exp[-2\alpha(t')] dt', \quad (11a)$$

$$|r| = \sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 e^{4\alpha} \left[1 + \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 e^{4\alpha} \right]^{-1}}. \quad (11b)$$

Из уравнения (11b) видно, что достижение предельного значения $|r| \rightarrow 1$ возможно только при выполнении условия $(d\alpha/dt)^2 \exp(4\alpha) \gg 1$.

Система уравнений (11a), (11b) эквивалентна уравнению (7), но более удобна для анализа и позволяет вначале по заданному закону изменения частоты $\omega(t)$ находить показатель степени амплитуды колебаний осциллятора $\alpha(t)$ из (11a), а затем на основе $\alpha(t)$ находить $r(t)$ из уравнения (11b).

3. ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ КОРРЕЛИРОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Используя полученные решения (10) и (11), определим динамику формирования коррелированных

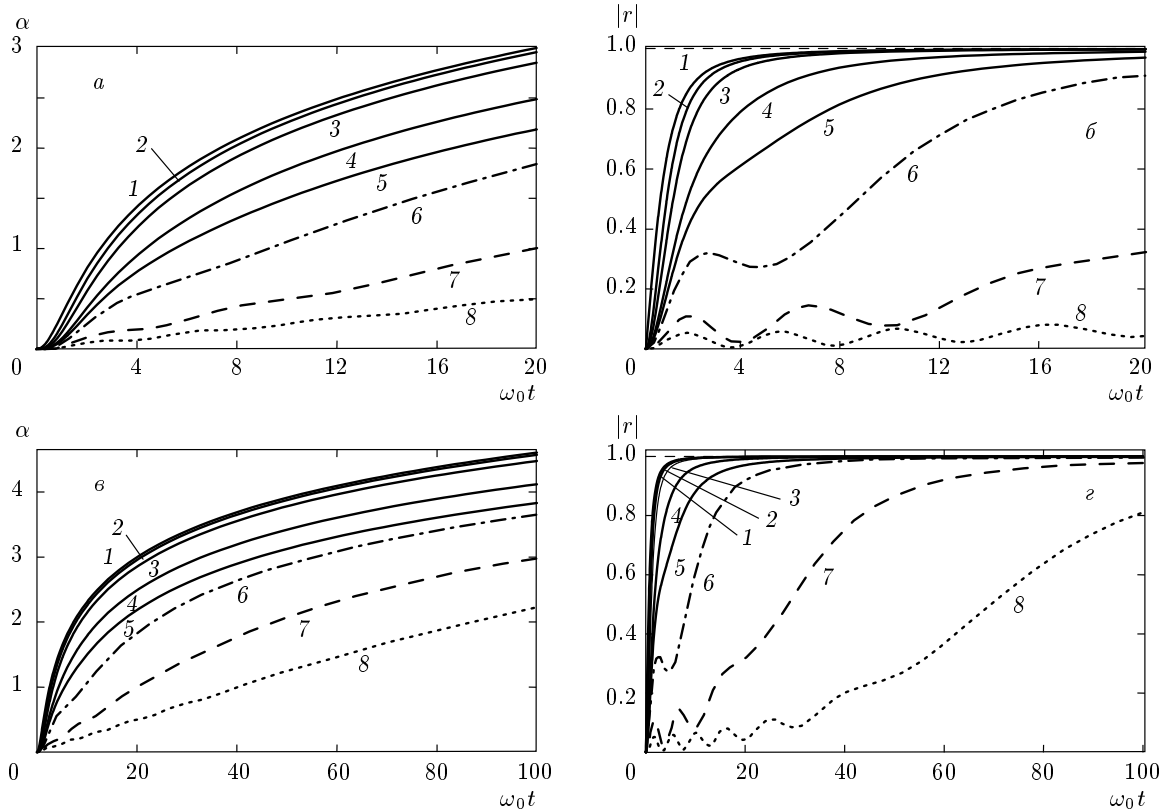


Рис. 2. Зависимости от времени показателя степени $\alpha(t)$ колебаний осциллятора (а, в) и коэффициента корреляции r (б, г) в пределах интервалов времени $0 \leq \omega_0 t \leq 20$ (а, б) и $0 \leq \omega_0 t \leq 100$ (в, г) при разной скорости монотонного убывания частоты гармонического осциллятора $\omega(t) = \omega_0 \exp(-t/T)$. Кривые 1–8 соответствуют величинам $T = 10^{-2}/\omega_0, 0.25/\omega_0, 0.5/\omega_0, 1.0/\omega_0, 1.33/\omega_0, 2.0/\omega_0, 5.0/\omega_0, 10/\omega_0$

состояний при разных режимах изменения частоты $\omega(t)$.

На рис. 2 представлены зависимости величины α и коэффициента корреляции r от времени при монотонном уменьшении частоты нестационарного гармонического осциллятора $\omega(t) = \omega_0 \exp(-t/T)$. Видно, что при таком убывании имеет место рост амплитуды колебаний гармонического осциллятора $|\varepsilon(t)| = \exp(\alpha(t))$, связанный с возрастанием $\alpha(t)$, и возрастание коэффициента корреляции до своего предельного значения $|r| = 1$. Полученные решения демонстрируют четкую связь характерного времени T монотонного уменьшения частоты осциллятора $\omega(t)$ с изменением коэффициента корреляции — уменьшение T ведет к более быстрому увеличению $|r(t)|$ до максимального значения $|r| = 1$. Последовательное уменьшение характерного времени $T \rightarrow 0$ в итоге приводит к возрастанию этого коэффициента до «предельного» значения

$$|r(t)| \rightarrow 1/\sqrt{1 + 1/(\omega_0 t)^2}. \quad (12)$$

Аналитический результат (12) прямо следует из уравнений (11), если сделать в них формальный предельный переход $T \rightarrow +0$ и заменить $\omega(t)$ ступенчатой функцией Хевисайда. Вид зависимости (12) практически совпадает с кривой 1 на рис. 2а. При увеличении T общая тенденция возрастания $r(t)$ становится менее выраженной и сопровождается локальными осцилляциями.

Из анализа полученных результатов следует, что близкое к $|r| = 1$ значение коэффициента корреляции (в частности $r \geq 0.99$) достигается к моменту времени τ_c , соответствующему одновременному выполнению условий $\omega_0 \tau_c \geq 10$ и $T \leq 1/\omega_0$, которые можно записать в виде соотношения

$$\frac{10}{\tau_c} \leq \omega_0 \leq \frac{1}{T}.$$

Из полученных результатов следует формальный вывод, согласно которому максимально коррелированное состояние с $|r| \rightarrow 1$ может быть сформировано за большое время $\tau_c \rightarrow \infty$ при как угодно мед-

ленном убывании частоты осциллятора, чему соответствует $T \rightarrow \infty$ (кривые 6, 7, 8 на рис. 2). Легко, однако, убедиться, что это не так.

Одна из причин состоит в том, что поддержание уже сформированного коррелированного состояния может быть обеспечено только при непрерывном и неограниченном во времени уменьшении частоты осциллятора, поскольку прекращение изменения частоты $\omega(t) = \omega_0 \exp(-t/T)$ приводит к распаду коррелированного состояния. Однако такой процесс не может длиться неограниченно долго по чисто технологическим причинам. Дело в том, что выполнение условия $|r| \rightarrow 1$ соответствует решению для осциллятора с неограниченно растущей амплитудой колебаний ($\varepsilon \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$), что невозможно в условиях реального эксперимента.

Еще одна причина состоит в том, что в течение всего времени формирования ($\tau_c \geq 10T$) и последующего поддержания коррелированного состояния в системе должны отсутствовать факторы внешнего дефазировочного влияния на суперпозиционное фазированное состояние осциллятора или, по крайней мере, их действие должно быть слабым. Говоря иными словами, длительность τ_c процесса формирования и сохранения коррелированного состояния должна быть меньше времени поперечной релаксации T_2 квантовых состояний в осцилляторе. В конденсированных средах эта величина мала и уменьшается при возрастании амплитуды колебаний из-за дефазировочного взаимодействия с другими объектами системы.

Более интересная и более близкая к реализации ситуация имеет место при гармоническом законе изменения величины $\omega(t)$ в случае полномасштабного (максимально возможного) изменения частоты осциллятора, $\omega(t) = \omega_0 \cos \Omega t$, или изменения этой частоты в ограниченном интервале, $\omega(t) = \omega_0(1 + g \cos \Omega t)$, где $g \Omega$ — глубина модуляции. При таком режиме воздействия, как будет показано ниже, может иметь место неограниченное возрастание коэффициента корреляции до своего предельного значения $|r| \rightarrow 1$ даже при небольшом интервале изменения частоты осциллятора (при небольшом значении глубины модуляции $|g \Omega| \ll 1$).

Ниже проведен анализ следующей задачи — при каком соотношении между частотой Ω периодического изменения частоты нестационарного гармонического осциллятора и начальной частотой ω_0 этого осциллятора возможно обеспечение предельного условия $|r| \rightarrow 1$, оптимизирующего все ядерные и атомные процессы, связанные с туннельным эффектом.

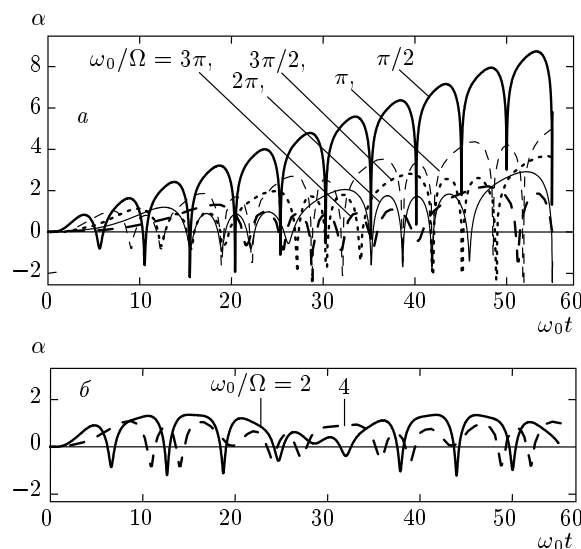


Рис. 3. Зависимости амплитуды α от времени при периодическом изменении частоты осциллятора $\omega(t) = \omega_0 \cos \Omega t$ и различных соотношениях между ω_0 и Ω : а — осциллирующее возрастание амплитуды при $\omega_0/\Omega = (n/m)\pi$; б — ограниченные флуктуации амплитуды при $\omega_0/\Omega = n/k$

Результаты рассмотрения представлены на рис. 3 и 4 в виде зависимостей $\alpha(t)$ и $r(t)$ от времени при различных соотношениях между ω_0 и Ω в интервале от $\omega_0/\Omega = 1$ до $\omega_0/\Omega = 3\pi$.

Из рис. 4 следует, что достижение коррелированного состояния с $|r| \approx 1$ за конечное время при изменении частоты гармонического осциллятора возможно в том случае, когда выполняется условие $\omega_0/\Omega = k\pi$, где $k = 1, 2, 3, \dots$ — натуральное число или рациональная дробь вида $k = n/m$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $m = 1, 2, 3, \dots$. Этому условию соответствует представленный на рис. 3 быстрый рост амплитуды колебаний гармонического осциллятора, $|\varepsilon(t)| = \exp(\alpha(t))$, связанный с возрастанием $\alpha(t)$. Наличие периодически расположенных очень узких «провалов» на зависимости $r(t)$ очень слабо влияет на общую эффективность использования коррелированных состояний с $|r| \approx 1$, которые реализуются на намного более протяженных интервалах времени, лежащих между этими «провалами». Рассмотренные процессы связаны с особенностями нелинейного уравнения (11а) и характеризуют параметрическую связь между накачкой в форме изменяемой частоты $\omega(t)$ нестационарного осциллятора и изменениями амплитуды $\alpha(t)$, определяющими нелинейную возвращающую силу $F(\alpha) = -\exp(-4\alpha)$.

Из анализа результатов следует, что минималь-

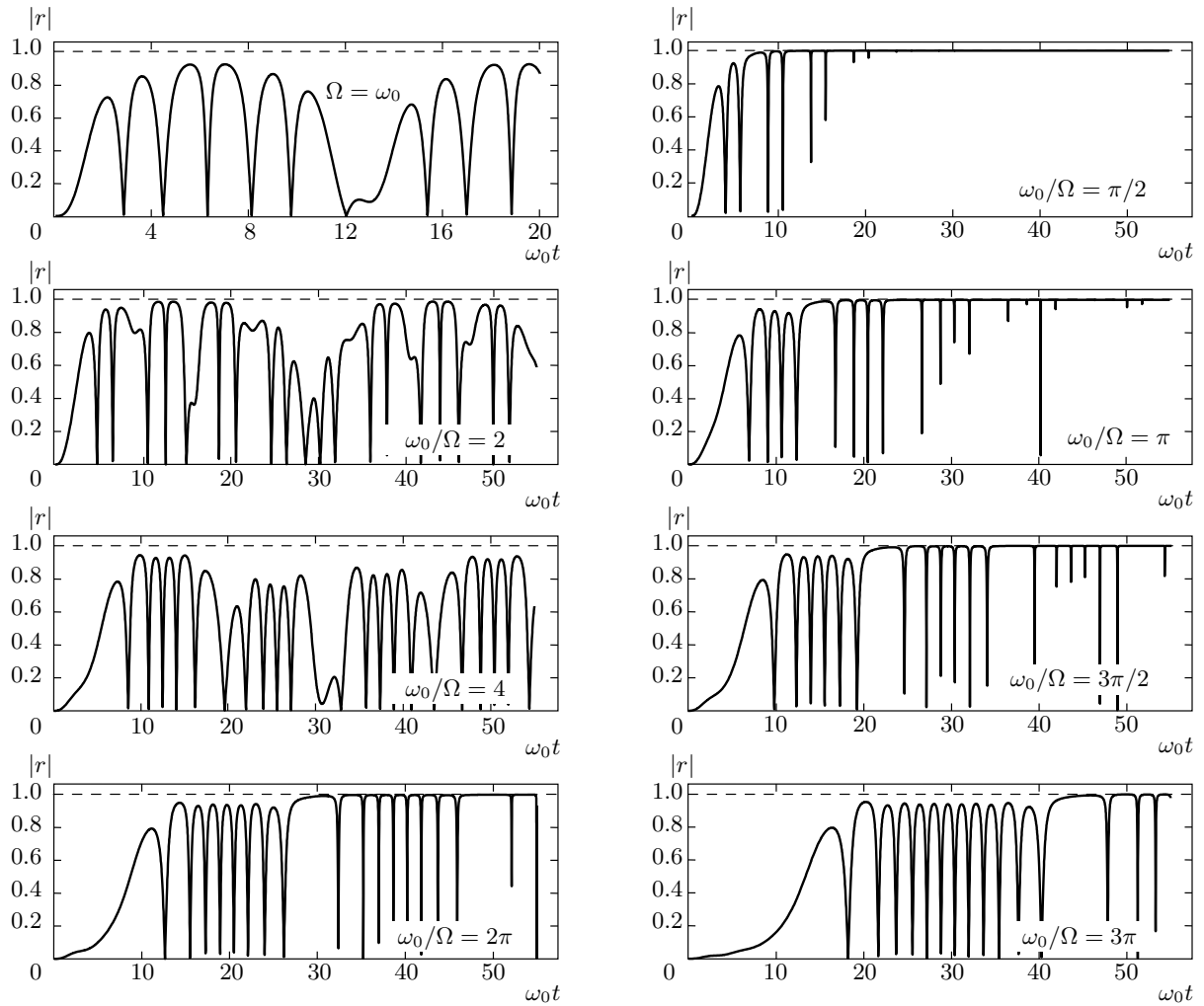


Рис. 4. Зависимости коэффициента корреляции r от времени при периодическом изменении частоты осциллятора $\omega(t) = \omega_0 \cos \Omega t$ и различных соотношениях между ω_0 и Ω

ное время достижения состояния с коэффициентом корреляции $|r| \approx 1$ равно

$$\tau_{min} \approx 15k/\omega_0 \approx 5/\Omega \approx T_\Omega, \quad T_\Omega = 2\pi/\Omega \quad (13)$$

и определяется периодом T_Ω изменения частоты гармонического осциллятора $\omega(t) = \omega_0 \cos \Omega t$, в котором находится рассматриваемая частица.

В случае $\omega_0/\Omega \neq k\pi$ имеют место ограниченные по величине осцилляции амплитуды $\alpha(t)$ (см. рис. 3), что приводит к осцилляциям коэффициента корреляции $r(t)$ с амплитудой $|r_{max}| < 1$ (см. рис. 3). Вместе с этим следует отметить, что даже при достаточно большом отличии отношения ω_0/Ω от оптимального условия $\omega_0/\Omega = k\pi$ коэффициент корреляции периодически достигает значений, близких к $|r| = 1$. Это наглядно видно на рис. 4 на графике,

соответствующем $\omega_0/\Omega = 2$. В этом случае значение $|r_{max}| \approx 0.98$ достигается в интервалах времени $\omega_0\tau_c \approx 10-20, 35-45, \dots$ после начала изменения частоты $\omega(t)$. Начало этих интервалов примерно соответствует значению времени в формуле (13). Если основываться на приведенной выше приближенной оценке, то даже при таком, сравнительно умеренном, коэффициенте корреляции очень малая прозрачность барьера (равная, в частности, $D_0 \approx 10^{-80}$ для DD-синтеза при комнатной температуре) возрастает в $D_0^{\sqrt{1-r^2}-1} \approx 10^{64}$ раз.

Для практических приложений более удобно использовать ограниченное по величине изменение частоты нестационарного гармонического осциллятора

$$\omega(t) = \omega_0(1 + g_\Omega \cos \Omega t), \quad |g_\Omega| < 1 \quad (14)$$

в интервале $\omega_0(1 - g_\Omega) \leq \omega(t) \leq \omega_0(1 + g_\Omega)$. Такой режим можно обеспечить при, например, неизменной глубине потенциальной ямы V_{max} , в которой находится частица, и при периодическом изменении ее ширины в интервале

$$L_0/(1 + |g_\Omega|) \leq L \leq L_0/(1 - |g_\Omega|), \quad (15)$$

$$L_0 = \sqrt{8V_{max}/M\omega_0^2}.$$

На рис. 5 представлены зависимости от времени коэффициента корреляции r при периодическом и ограниченном изменении частоты осциллятора $\omega(t) = \omega_0(1 + g_\Omega \cos \Omega t)$ и при разных значениях глубины частотной модуляции g_Ω . Из этих результатов следует, что процесс формирования полностью коррелированного состояния имеет место не только при монотонно-асимптотическом (при $\tau_c \rightarrow \infty$) или периодическом полномасштабном (в интервале $0 \leq \omega(t) \leq \omega_0$) изменении частоты осциллятора, как это рассмотрено выше и представлено на рис. 3 и 4, но и при ее изменении в ограниченном интервале $\omega_0(1 - g_\Omega) \leq \omega(t) \leq \omega_0(1 + g_\Omega)$, $|g_\Omega| < 1$ и даже в случае $|g_\Omega| \ll 1$. Длительность τ_c формирования такого состояния уменьшается при увеличении глубины модуляции частоты и достигает минимального значения при $|g_\Omega| \rightarrow 1$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный анализ показывает, что формирование когерентных коррелированных состояний частиц является эффективным способом очень существенного ослабления действия кулоновского потенциального барьера в задачах о парном взаимодействии заряженных частиц (включая задачу ядерного синтеза и другие ядерные реакции). Полученные результаты свидетельствуют о том, что процесс формирования когерентных коррелированных состояний на основе определенным образом возбуждаемого суперпозиционного состояния может быть обеспечен при разных методах воздействия на квантовую систему. Некоторые из этих методов автоматически реализуются в лабораторных экспериментах по управляемому нуклеосинтезу, постановка и результаты которых представлены в [11].

Выше было показано, что формирование коррелированного состояния частицы с коэффициентом корреляции $|r| \rightarrow 1$ может быть достигнуто в двух случаях: а) при оптимальном монотонном уменьшении частоты $\omega(t)$ гармонического осциллятора, в параболическом поле которого находится частица, от начального значения ω_0 за время

$\tau_c \geq 10/\omega_0$; б) при периодическом изменении частоты $\omega(t) = \omega_0(1 + g_\Omega \cos \Omega t)$ в ограниченном интервале $\omega_0(1 - g_\Omega) \leq \omega(t) \leq \omega_0(1 + g_\Omega)$, $|g_\Omega| < 1$ за счет, например, небольшого периодического изменения ширины параболической потенциальной ямы или ее глубины (высоты барьера).

Наиболее просто коррелированное состояние достигается в том случае, когда рассматриваемая частица находится в параболическом поле (поле гармонического осциллятора), создаваемом ближайшими соседними частицами, и, например, при монотонном увеличении расстояния между этими частицами (это ведет к монотонному уменьшению частоты $\omega(t)$) или же при периодическом изменении этого расстояния, что ведет к модуляции частоты $\omega(t)$. Очевидно, что с точки зрения практической реализации периодическая модуляция может оказаться наиболее простой и сравнительно легко осуществимой операцией по «просветлению» потенциального барьера.

С формальной точки зрения формирование сильнокоррелированного состояния с $|r| \rightarrow 1$ возможно при любом малом значении $|g_\Omega| \ll 1$. Вместе с тем проведенные вычисления показывают, что при уменьшении g_Ω резко возрастает длительность τ_c формирования такого состояния, что делает процесс формирования малоэффективным из-за возрастания влияния флуктуаций внешнего окружения, приводящих к дефазировке суперпозиционного состояния. Такая дефазировка соответствует фазовой релаксации недиагональных элементов матрицы плотности, описывающей частицу, и протекает с характерным временем T_2 поперечной релаксации разных состояний одной частицы, зависящим от свойств конкретной системы. Такое ограничение формально аналогично, например, условию $\tau_c < T_2$ формирования состояния сверхизлучения в протяженной системе возбужденных атомов, однако принципиально отличается от него тем, что для формирования коррелированного состояния любой из частиц существенна только релаксация в пределах области локализации этой частицы. В то же время в задаче о сверхизлучении существенна фазовая релаксация между состояниями разных (взаимно пространственно-разнесенных) частиц, что накладывает гораздо более жесткие условия на параметры системы. С формальной стороны это соответствует тому, что время поперечной релаксации T_2 в таких одночастичных локализованных системах может быть намного больше, чем в многочастичных (делокализованных) протяженных системах.

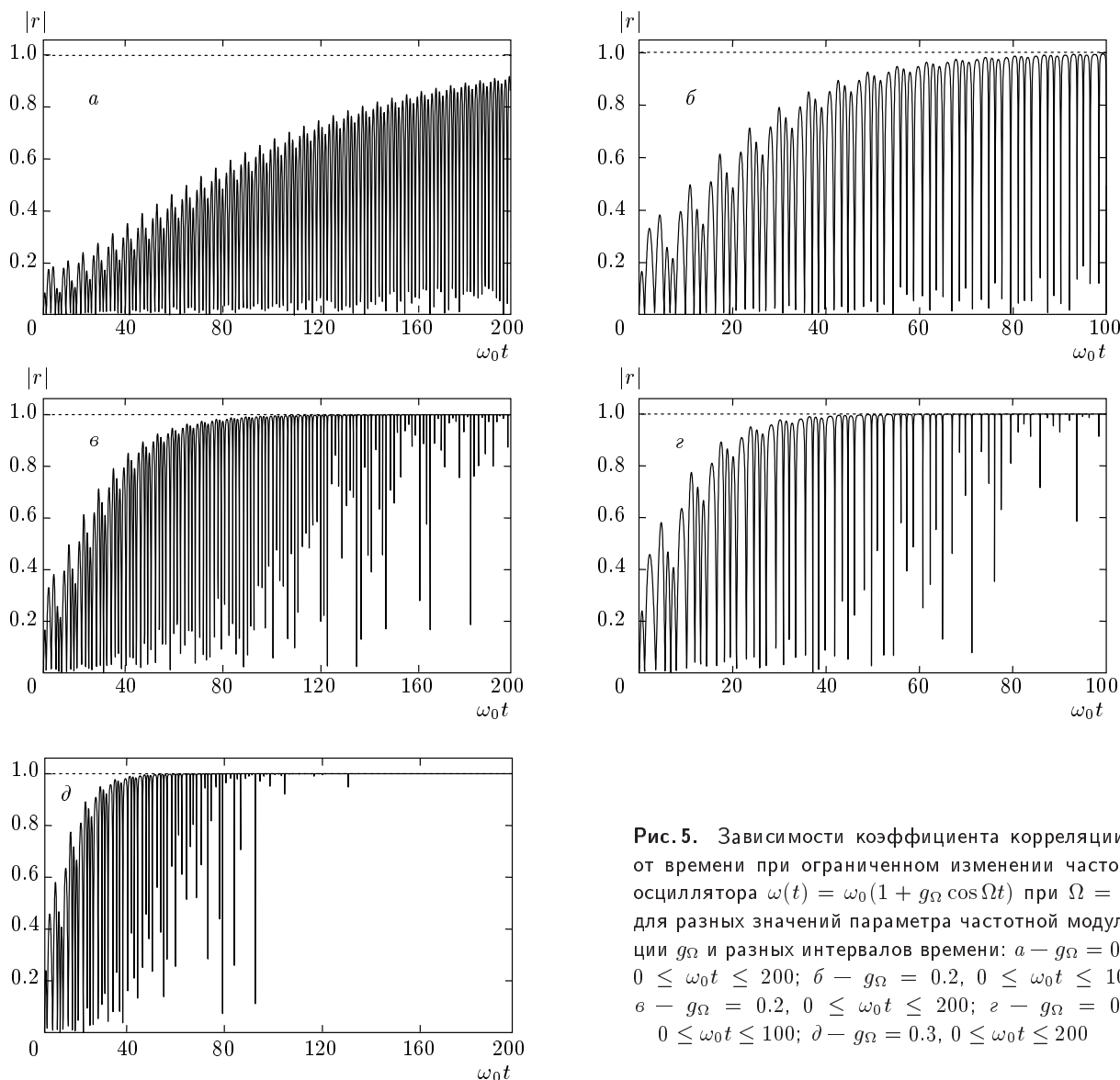


Рис. 5. Зависимости коэффициента корреляции r от времени при ограниченном изменении частоты осциллятора $\omega(t) = \omega_0(1 + g_\Omega \cos \Omega t)$ при $\Omega = \omega_0$ для разных значений параметра частотной модуляции g_Ω и разных интервалов времени: $a - g_\Omega = 0.1, 0 \leq \omega_0 t \leq 200$; $б - g_\Omega = 0.2, 0 \leq \omega_0 t \leq 100$; $в - g_\Omega = 0.2, 0 \leq \omega_0 t \leq 200$; $г - g_\Omega = 0.3, 0 \leq \omega_0 t \leq 100$; $д - g_\Omega = 0.3, 0 \leq \omega_0 t \leq 200$

Интересно отметить, что простой способ формирования такого состояния может быть связан с воздействием на систему заряженных частиц (плазму) изменяемого магнитного поля $\mathbf{H}(t)$. Формирование коррелированного состояния таких ионов может быть связано с использованием перестраиваемого циклотронного резонанса в изменяемом магнитном поле. Хорошо известно, что гамильтониан \hat{H} , спектр уровней энергии $E_n = n\hbar\omega_L$ и соответствующие волновые функции

$$\psi_n(x, t) = C_n H_n \left(\frac{x}{x_0} \right) \exp \left(-\frac{x^2}{2x_0^2} - \frac{iE_n t}{\hbar} \right)$$

частицы с массой M и зарядом Q в магнитном поле с напряженностью $H(t)$ соответствуют гармоническому осциллятору с ларморовской частотой $\omega_L(t) = |Q|H(t)/Mc$.

Очевидно, что создание системы осцилляторов с заданным законом изменения частоты $\omega(t) \equiv \omega_L(t)$ и формированием на их основе коррелированных состояний с $|r| \rightarrow 1$ может быть осуществлено в системе таких частиц при монотонном уменьшении или периодическом изменении напряженности магнитного поля $H(t)$, что приводит к аналогичному изменению частоты осциллятора $\omega(t)$ по одному из законов:

$$\begin{aligned} H(t) &= H(0) \exp(-t/T), \\ \omega(t) &= \omega_0 \exp(-t/T), \\ H(t) &= H(0)(1 + g_\Omega \cos \Omega t), \\ \omega(t) &= \omega_0(1 + g_\Omega \cos \Omega t). \end{aligned} \quad (16)$$

В такой плазменной системе изменение внешнего магнитного поля $H(t)$, обеспечивающее необходимое изменение $\omega(t)$, приводит к возможности формирования коррелированного состояния заряженных частиц в плазме и к существенному увеличению вероятности подбарьерного взаимодействия этих частиц с окружающими их объектами (например, с ядрами, принадлежащими другим ионам, движущимся в магнитном поле, или с ядрами, которые жестко связаны с нейтральными атомами или молекулами, входящими в состав плазмы).

Отметим, что проведенный анализ не учитывает влияния затухания колебаний нестационарного гармонического осциллятора на процесс формирования коррелированного состояния квантовой системы. Учет такого затухания может быть осуществлен на основе анализа более общего, чем (8), уравнения движения осциллятора

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + 2\gamma \frac{d\varepsilon}{dt} + \omega^2(t)\varepsilon &= 0, \quad \varepsilon(0) = 1, \\ \left. \frac{d\varepsilon}{dt} \right|_0 &= i, \quad \omega(0) = \omega_0 \end{aligned} \quad (17)$$

и следующих из него уравнений (см. (11a))

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 2\gamma \frac{d\alpha}{dt} - e^{-4(\alpha-\gamma t)} &= -\omega^2(t), \\ \beta(t) &= \int_0^t \exp[-2(\alpha(t') - \gamma t')] dt', \end{aligned} \quad (18)$$

определяющих решение уравнения (17) на основе подстановки (10). В этих соотношениях величина $\gamma \equiv 1/\tau_{rel}$ определяет время затухания колебаний осциллятора τ_{rel} (фактически — время продольной релаксации населенности возбужденных уровней энергии осциллятора, находящегося в суперпозиционном состоянии, соответствующем сильной корреляции).

Обобщение (17) не изменяет формальный вид (11b) итогового выражения для коэффициента корреляции, но изменяет явный вид функции $\alpha(t)$, которая и определяет $|r|$. Из структуры соотношений (18) следует, что в том случае, когда длительность τ_c процесса формирования коррелированного состояния удовлетворяет условию $\tau_c \ll \tau_{rel}$, влияние затухания оказывается несущественным. Возможность

выполнения этого условия следует из простых оценок.

Выше было показано, что состояние, близкое к полностью коррелированному с $|r| \approx 1$, достигается за время $\tau_c \leq (100-150)/\omega_0 \equiv (16-25)T_0$, не намного превышающее период колебаний $T_0 = 2\pi/\omega_0$ начального состояния осциллятора. С другой стороны, для нестационарных «атомарных» или «ионных» осцилляторов, примеры которых рассмотрены выше, время затухания в большинстве случаев определяется радиационными процессами типа спонтанного электромагнитного излучения. В частности, движению иона с массой $M \approx 10^{-23}$ г и зарядом $|Q| = e$ в магнитном поле с напряженностью $H(0) \approx 10^4$ Э соответствует частота колебаний $\omega_L \approx 2 \cdot 10^7$ с $^{-1}$ с периодом $T_0 \approx 3 \cdot 10^{-7}$ с. Длительность радиационного затухания такого осциллятора в дипольном приближении определяется величиной $\tau_{rel} = 3\hbar c^3/4\omega_L^3 |\mathbf{d}_{nm}|^2$ и зависит как от частоты вращения иона, так и от матричного элемента \mathbf{d}_{nm} соответствующего дипольного момента. Если учесть, что радиус вращения иона в магнитном поле зависит от тепловой скорости частицы $v \approx 10^4$ см/с и может быть оценен величиной $R = v/\omega_L \approx 5 \cdot 10^{-4}$ см, то при использовании аппроксимации $|\mathbf{d}_{nm}| \leq eR$ находим, что $\tau_{rel} \geq 10^8$ с. Если сравнить эту величину с полученным выше выражением для времени установления коррелированного состояния, $\tau_c \leq (100-150)/\omega_L \approx (5-8) \cdot 10^{-6}$ с, то требуемое условие $\tau_c \ll \tau_{rel}$ выполняется с избытком.

Другие аспекты эволюции такого демпфированного нестационарного осциллятора были рассмотрены на основе модели Гейзенберга–Ланжевена в работах [12, 13]. Такое демпфирование в случае чисто полевого (электромагнитного) осциллятора может играть существенную роль в анализе нестационарного эффекта Казимира.

В заключение отметим, что когерентное коррелированное состояние, специфика влияния которого на вероятность проникновения в область под потенциальным барьером связана с синхронизацией флуктуаций импульса на разных уровнях суперпозиционного состояния и вызванной этой синхронизацией флуктуацией кинетической энергии частицы, может быть осуществлена не только в параболическом поле. Формирование такого состояния может быть осуществлено, по крайней мере в принципе, в пределах любой системы уровней квантованного движения, не подверженной внешнему интенсивному дефазированию воздействию, при условии наложения на нее определенного когерентного воздействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Субботин, В. П. Смирнов, Б. Ю. Шарков и др., *Ядерный синтез с инерционным удержанием*, Физматлит, Москва (2005).
2. J. P. Freidberg, *Plasma Physics and Fusion Energy*, Cambridge Univ. Press (2008).
3. В. И. Крауз, Ю. В. Мартыненко, Н. Ю. Свечников и др., УФН **180**, 1055 (2010).
4. D. Arnett, *Supernovae and Nucleosynthesis*, Princeton Univ. Press, New York (1996).
5. A. G. V. Cameron, *Astrophys. J.* **121**, 144 (1955).
6. В. И. Высоцкий, С. В. Адаменко, ЖТФ **80**(5), 23 (2010).
7. E. Schrodinger, *Ber. Kgl. Akad. Wiss., Berlin* **24**, 296 (1930).
8. H. P. Robertson, *Phys. Rev. A* **35**, 667 (1930).
9. В. В. Додонов, В. И. Манько, Труды ФИАН **183**, 71 (1987).
10. В. В. Додонов, А. В. Климов, В. И. Манько, Труды ФИАН **200**, 56 (1991).
11. *Controlled Nucleosynthesis. Breakthroughs in Experiment and Theory*, ed. by S. V. Adamenko, F. Selleri, and A. van der Merwe, Springer, Berlin (2007).
12. V. V. Dodonov and A. V. Dodonov, *J. Russian Laser Research* **26**, 445 (2005); **27**, 379 (2006).
13. V. V. Dodonov and A. V. Dodonov, *J. Phys. A* **39**, 6271 (2006).