

НОВЫЕ РЕШЕНИЯ В ТЕОРИИ САМОФОКУСИРОВКИ С НАСЫЩАЮЩЕЙСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

В. Ф. Ковалев^{a}, К. И. Попов^b, В. Ю. Быченко^c*

*^a Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук
125047, Москва, Россия*

*^b Department of Physics, University of Ottawa
150 Louis Pasteur, Ottawa, Ontario K1N 6N5, Canada*

*^c Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 20 апреля 2011 г.

На основе приближенного аналитического решения методом ренормгрупповых симметрий задачи Коши для нелинейного уравнения Шредингера, описывающего стационарные световые пучки в среде с насыщающейся нелинейностью, дана классификация самофокусирующихся решений в зависимости от двух управляющих параметров: относительного вклада дифракции и нелинейности и темпа насыщения нелинейности. Доказано существование самофокусирующихся решений трубчатого вида для входящего пучка с гауссовым радиальным распределением интенсивности. Проведенное численное моделирование позволило проверить развитую теорию и уточнить границы ее применимости.

1. ВВЕДЕНИЕ

В этом году исполняется 50 лет со дня открытия Аскарьяном [1] явления самофокусировки света в нелинейной среде. С тех пор, начиная с работы Таланова [2], для различных типов нелинейности среды и моделей распространения света решаются задачи математически строгого или математически обоснованного приближенного описания эффекта самофокусировки волнового пучка [3–8]. Самофокусировка волновых пучков наиболее полно исследована для нелинейных сред с кубической нелинейностью. Получены результаты, представленные, с одной стороны, точными и приближенными аналитическими теориями, а с другой, — многочисленными численными расчетами. Описание этих результатов можно найти в различных обзорах и монографиях [5–8]. С математической точки зрения самофокусировка для кубической, а также для других алгебраических нелинейностей выражается в возникновении особенности в решении уравнений, используемых для описания пространственного распределения электрического поля светового пучка. Условие возникновения

особенности и детальному исследованию структуры поля вблизи особенности посвящены многочисленные работы, например, [9–11].

Несмотря на понимание того, что учет эффекта насыщения нелинейности при больших интенсивностях светового пучка запрещает решения с особенностью, их аналитическое нахождение даже на основе приближенных подходов представляет собой трудную задачу. Описание пространственной продольно-радиальной структуры волнового пучка для сред с насыщающейся нелинейностью достигается только с помощью численного моделирования [12–15], поскольку соответствующие уравнения относятся к классу неинтегрируемых систем, которые, если и допускают, то только качественное исследование. Основные выводы из численного моделирования подтверждают качественно иные, по сравнению со средой с кубической нелинейностью, свойства самофокусировки в режиме насыщения нелинейности, в частности, ограничение роста интенсивности пучка на его оси и уплощение фазового фронта пучка вблизи его оси (см., например, [5, стр. 109]).

Что касается качественного анализа поведения решений в среде с насыщающейся нелинейностью, он зачастую проводится на основе так называемо-

*E-mail: vfkvvfkv@gmail.com

го безабберрационного приближения [12, 13] или его обобщений [16–19], а также вариационного подхода [20]. Качественные аналитические модели, использующие то или иное априорное предположение о структуре пучка, позволяют сделать выводы о характере изменения его параметров, таких как ширина пучка, доля мощности пучка, образующая самофокусированный канал, масштаб осцилляций вдоль оси пучка при периодическом изменении интенсивности на оси (периодической фокусировке–дефокусировке пучка). Дополнительные выводы о характере изменения решений в среде с насыщающейся нелинейностью можно получить также с использованием интегралов параболического уравнения, применяемого для описания самофокусировки [14]. Здесь, в частности, удастся доказать (и подтвердить численными экспериментами [15, 21]) возможность захвата части мощности пучка в волноводный режим.

В условиях подавления роста интенсивности пучка на его оси можно ожидать повышения его интенсивности во внеосевой области с образованием кольцевой структуры в распределении интенсивности. Отметим, что формирование немонотонных по радиусу распределений интенсивности пучка (изначально монотонно убывающего с ростом радиуса распределения интенсивности) при его распространении в нелинейной среде наблюдалось во многих численных экспериментах, в том числе и в средах с кубичной (не насыщающейся) нелинейностью [12]. На возникновение этой немонотонности влияет множество факторов, таких как вид нелинейности, быстрота убывания интенсивности по радиусу (например, для супергауссовых пучков), негладкость пучка, связанная, например, с наличием мелкомасштабных возмущений в распределении интенсивности пучка на границе нелинейной среды (плазмы) [22–24].

Среди множества вариантов немонотонного распределения интенсивности интерес представляют структуры с ярко выраженным по амплитуде (глобальным, не локальным) максимумом интенсивности, расположенным вне оси пучка. Также необходимо сформулировать условия возникновения таких кольцевых структур в зависимости от параметров нелинейной среды и пучка.

Однако до настоящего времени не существует установившегося представления о том, в каких условиях может реализовываться тот или иной режим самофокусировки в среде с насыщающейся нелинейностью для заданного профиля интенсивности входящего светового пучка, хотя такая задача и ставилась [16, 17]. В настоящей работе мы восполняем

этот пробел на основе приближенной теории¹⁾, дополненной численным моделированием.

В данной работе мы исходим из укороченного волнового уравнения для стационарного светового пучка, отвечающего параксиальному приближению для среды с насыщающейся по экспоненциальному закону нелинейностью. В частности, такая модель, описываемая нелинейным уравнением Шредингера (НУШ), используется для изучения распространения пучков электромагнитных волн в плазме при учете пондеромоторного эффекта [26]. В этой модели содержатся два параметра, a^2 и γ , первый из которых описывает относительный вклад дифракции и нелинейности, а второй — темп насыщения нелинейности с увеличением интенсивности пучка. Как и в случае среды с кубичной нелинейностью [27], ставится граничная задача (задача Коши), отвечающая гауссову распределению интенсивности пучка на входе в среду, хотя общие результаты могут быть распространены на произвольное начальное распределение интенсивности пучка. Для этой задачи строится приближенное аналитическое решение, на основе которого проводится классификация возможных решений НУШ в зависимости от параметров a^2 и γ . Основное внимание уделяется самофокусировочным решениям трубчатого вида, доказательство существования которых для входящего гауссова пучка до сих пор отсутствовало. При этом вопрос устойчивости таких решений в данной работе не рассматривается.

Помимо ответа на вопрос о реализации простейшего немонотонного радиального профиля лазерного канала в виде кольцевого распределения интенсивности, самосогласованного с гауссовым профилем светового пучка на входе, также представляет интерес ответ на вопрос о возможности существования более сложных мультикольцевых самофокусировочных распределений лазерной интенсивности для той же самой задачи Коши. Такая мотивация естественно вытекает из результатов решения задачи на собственные функции для решений вида бегущих волн [14, 28, 29]. Несмотря на то что мультикольцевые стационарные профили световых пучков в принципе допускаются такими решениями, до сих

¹⁾ Для нелинейной среды с полиномиальным законом изменения показателя преломления (отличным от закона для среды с кубичной нелинейностью) такой аналитический подход уже использовался одним из авторов [25]. В частности, было показано, как из исходного цилиндрического пучка с максимумом интенсивности на оси по мере его распространения в глубь среды формируется кольцевой пучок, имеющий максимум вне оси пучка.

пор не ясно, допустимы ли они для заданного входящего пучка, конкретно — для пучка с гауссовым распределением интенсивности по радиусу. С использованием численного моделирования мы доказываем, что они допустимы и указываем соответствующую область параметров a^2 и γ , хотя и не обсуждаем вопрос об устойчивости таких решений.

Работа разделена на пять разделов. В разд. 2 формулируются исходные уравнения для теоретического анализа процесса распространения волнового пучка в среде с насыщающейся нелинейностью, а именно, в плазме. При этом исходное НУШ сводится к паре уравнений для производной эйконала пучка и его интенсивности. В разд. 3 дается приближенное аналитическое решение этих уравнений методом ренормгрупповых (РГ) симметрий. Следствием приближенного аналитического подхода является появление особенности в самофокусировочном решении: профиль производной эйконала пучка по радиусу опрокидывается при конечном значении координаты вдоль оси пучка, что ограничивает применимость теории. Таким образом, аналитическая теория описывает самофокусировку на ограниченном расстоянии от границы среды и не претендует на описание поведения пучка вдали от нее, где нарушаются условия применимости теории и могут образовываться многофокусные структуры, расслоение пучка и т. п. Раздел 4 содержит анализ аналитических решений на примере гауссова пучка на входе в плазму, а также сравнение приближенных аналитических результатов с результатами численного решения НУШ, что позволяет проверить теорию и уточнить границы ее применимости. Заключительный разд. 5 посвящен обсуждению полученных результатов и подведению итогов работы.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Наиболее простой и продуктивной математической моделью для анализа эффектов самовоздействия светового пучка в плазме является НУШ

$$2ik\partial_z E + \Delta_{\perp} E + k^2(\epsilon_2/\epsilon_0)E = 0, \quad (1)$$

$$E(0, \mathbf{r}) = E_0(\mathbf{r})$$

для комплексной медленно меняющейся в направлении распространения z амплитуды $E(z, \mathbf{r})$ электрического поля с частотой ω (см., например, обзор [3]), которое отвечает параксиальному (квазиоптическому) приближению, описывающему стационарную структуру волнового пучка. Здесь $k = (\omega/c)\sqrt{\epsilon_0}$ — волновое число электромагнитной волны, Δ_{\perp} — опе-

ратор Лапласа в плоскости \mathbf{r} , перпендикулярной оси пучка z , а ϵ_0 и ϵ_2 — вещественные части соответственно линейной и нелинейной диэлектрической проницаемости плазмы с плотностью электронов n_e и возмущением плотности δn ,

$$\epsilon_0 = 1 - \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} n_e, \quad \epsilon_2 = -\frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \delta n. \quad (2)$$

Использование квазиоптического приближения (1), ограничивает предел применимости теории. Оно оправдано при выполнении условий, связывающих характерные продольный Λ_{\parallel} и поперечный Λ_{\perp} масштабы изменения комплексной амплитуды E [5],

$$k\Lambda_{\parallel} \gg 1, \quad k\Lambda_{\perp}^2 \approx \Lambda_{\parallel} \max\{1; (k\Lambda_{\perp})^2(\epsilon_2/\epsilon_0)\}. \quad (3)$$

Первое из условий позволяет пренебречь вкладом со второй производной электрического поля по продольной (вдоль оси пучка) координате z по сравнению с первым вкладом в (1), а второе соотношение связывает характерные поперечный и продольный масштабы изменения электрического поля, обусловленные дифракцией и нелинейностью.

Вид нелинейности в уравнении Шредингера (1) определяется параметрами как среды, так и лазерного пучка. Здесь мы рассматриваем плазму, нелинейность которой обусловлена пондеромоторным эффектом с учетом насыщения [26], что соответствует

$$n \equiv \delta n/n_e = \exp(-|E|^2/16\pi n_e T_e) - 1.$$

Здесь T_e и n_e — электронная температура и критическая плотность плазмы. Такая нелинейность отвечает распространению лазерного пучка нерелятивистской интенсивности в полностью ионизированной плазме. При использовании стандартного представления для комплексной амплитуды поля $E = A \exp(iks)$ и после введения интенсивности I и производной эйконала v по радиусу, связанных с амплитудой A и эйконалом s формулами

$$I \equiv A^2 = |E|^2, \quad \mathbf{v} = \{v, 0\} = \nabla_{\perp} s, \quad (4)$$

уравнение Шредингера (1) сводится к следующим двум уравнениям:

$$\partial_z v + v\partial_r v - \frac{\alpha}{2\beta} \varphi(I)\partial_r I - \partial_r \left[\frac{1}{2r\sqrt{I}} \partial_r (r\partial_r \sqrt{I}) \right] = 0, \quad (5)$$

$$\partial_z I + I\partial_r v + v\partial_r I + Iv/r = 0.$$

В уравнениях (5) использованы следующие безразмерные величины для координат и поля:

$$z \rightarrow \sqrt{2\beta} \frac{z}{d}, \quad r \rightarrow \frac{r}{d}, \quad I \rightarrow \frac{I}{I_0}, \quad v \rightarrow \frac{v}{\sqrt{2\beta}}, \quad (6)$$

где d — характерный поперечный размер пучка, I_0 — максимальное значение интенсивности цилиндрического (осесимметричного) пучка на границе среды, вклады, пропорциональные $\alpha = \gamma\omega_{pe}^2/2\omega^2\epsilon_0$ и $\beta = 1/2k^2d^2$ (ω_{pe} — электронная плазменная частота), определяют роль процессов нелинейной рефракции и дифракции. Величина постоянной $\gamma = I_0/16\pi n_c T_e$ в коэффициенте нелинейности α и функции нелинейности $\varphi = \partial_I \Phi(I)$ задает «темп» насыщения нелинейности в уравнении Шредингера с нелинейностью

$$\Phi = \frac{1}{\gamma} (1 - e^{-\gamma I}).$$

В пределе $\gamma I \ll 1$ данная функция Φ отвечает среде с кубичной нелинейностью, $\lim_{\gamma I \rightarrow 0} \Phi = \Phi_{cub} = I$.

Условия применимости квазиоптического приближения (3), будучи записанными в безразмерных переменных (6), принимают вид

$$2\beta \ll \Lambda_{\parallel}, \quad \Lambda_{\perp}^2 \approx \Lambda_{\parallel} \max\{1; (\Lambda_{\perp}^2/a^2)(1-e^{-\gamma I})\}. \quad (7)$$

Уравнения (5) следует дополнить краевыми условиями, определяющими структуру пучка на границе ($z = 0$) нелинейной среды. Мы будем рассматривать пучок с плоским начальным фазовым фронтом, т. е. с равной нулю производной эйконала, $v(0, r) = 0$, и произвольной гладкой функцией распределения начальной интенсивности $I(0, r) = J(r)$. В результате получаем систему следующих уравнений, которые и будут считаться исходными:

$$\begin{aligned} \partial_z v + v\partial_r v - \frac{1}{2a^2} \partial_I (1 - e^{-\gamma I}) \partial_r I - \\ - \partial_r \left[\frac{1}{2r\sqrt{I}} \partial_r (r\partial_r \sqrt{I}) \right] = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \partial_z I + I\partial_r v + v\partial_r I + \frac{Iv}{r} = 0, \\ v(0, r) = 0, \quad I(0, r) = J(r). \end{aligned}$$

В уравнениях (8) имеются два управляющих параметра, $a^2 = \beta\gamma/\alpha \equiv c^2/\omega_{pe}^2 d^2$ и γ , выбор соотношения между которыми задает различные режимы поведения пучка в среде с насыщающейся пондеромоторной нелинейностью.

3. ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Для построения аналитических решений уравнений (8) воспользуемся методом РГ-симметрий [30]. Суть данного метода заключается в нахождении симметрий специального вида, которые оставляют

инвариантными приближенные решения уравнений (8), построенные по теории возмущений для малого удаления от границы нелинейной среды, и использовании этих симметрий для продолжения приближенных решений в глубь нелинейной среды. Подобная процедура использует свойство оператора РГ-симметрии преобразовывать решение краевой задачи с заданными краевыми данными в решение той же краевой задачи (в общем случае произвольные преобразования, оставляющие инвариантными исследуемые уравнения, этим свойством не обладают). Отметим, что возможность построить РГ-симметрию для заданных краевых данных зависит от размерности допускаемой группы: как правило, чем шире группа симметрий исследуемых уравнений, тем для более широкого набора краевых данных реализуется процедура построения РГ-симметрий. Так, например, в пределе $\gamma \rightarrow 0$, который соответствует переходу от насыщающейся нелинейности к кубичной, группа симметрий НУШ (1) расширяется за счет двух дополнительных операторов группы точечных преобразований — оператора растяжений и оператора группы проективных преобразований²⁾. РГ-симметрии, построенные на линейной комбинации оператора проективной группы и оператора сдвига вдоль оси пучка [27], порождают известные аналитические решения как для коллимированного пучка (таунсов пучок), так и для предварительно сфокусированного пучка в среде с кубичной нелинейностью. При произвольных краевых данных используется алгоритм построения приближенных РГ-симметрий. Применительно к интересующей нас задаче искомая РГ-симметрия задается следующим оператором приближенной группы точечных преобразований [27, 31]:

$$\begin{aligned} R = \left[1 + \frac{z^2}{2} \partial_{\chi\chi} S \right] \partial_z + \frac{1}{2} \partial_{\chi} S \partial_v + \\ + \left[\frac{z}{2} \partial_{\chi} S + \frac{vz^2}{2} \partial_{\chi\chi} S \right] \partial_x - \\ - \frac{Iz}{2} \left[\left(1 + \frac{vz}{x} \right) \partial_{\chi\chi} S + \frac{1}{x} \partial_{\chi} S \right] \partial_I. \end{aligned} \quad (9)$$

Интегрированием уравнения Ли для этого оператора находятся конечные преобразования группы, свя-

²⁾ Конечные преобразования группы проективных преобразований отвечают так называемым преобразованиям фокусировки, а преобразования, порождаемые линейной комбинацией операторов сдвига (вдоль оси пучка), растяжения и проективной группы аналогичны более сложным линзовым преобразованиям (хотя и не исчерпывают их) (см., например, [5, гл. 6]).

зывающие значения интенсивности I пучка и производной эйконала v при $z > 0$ с аналогичными величинами на границе ($z = 0$) среды. Построенные таким образом приближенные аналитические решения уравнений (5) имеют вид [27, 31]

$$v(z, r) = \frac{r - \chi}{z}, \quad I(z, r) = J(\mu) \frac{\chi}{r} \frac{\partial \chi^2 S}{\partial \mu^2 S}. \quad (10)$$

Здесь параметры χ и μ определены через z и r с помощью соотношений

$$\begin{aligned} r &= \chi (1 + z^2 \partial_{\chi^2} S), \\ S(\mu) &= S(\chi) + (z^2/4)(\partial_{\chi} S)^2, \end{aligned} \quad (11)$$

включающих функцию S , зависящую от переменной $\chi = r - vz$,

$$S(\chi) = \frac{\gamma}{a^2} \Phi(J(\chi)) + \frac{\partial_{\chi} (\chi \partial_{\chi} \sqrt{J(\chi)})}{\chi \sqrt{J(\chi)}}, \quad (12)$$

и учитывающую влияние нелинейности среды.

В условиях баланса нелинейного и дифракционного вкладов в выражении (12), т. е. при $S = 0$, оператор (9) превращается в оператор сдвига по оси z , а условие РГ-инвариантности искомого решения уравнений (8) относительно этого оператора приводит к решениям в виде стационарных волноводных конфигураций [32], реализующихся только для выделенных распределений интенсивности пучка на входе в среду. В случае произвольного распределения интенсивности пучка на входе в среду, когда нелинейный и дифракционный вклады не уравновешивают друг друга, распределение электрического поля в среде отлично от стационарного волноводного.

При получении формул (10) в работах [27, 31] не делалось никаких априорных предположений о пространственной структуре пучка в среде, и эти соотношения пригодны для пучков с произвольными гладкими краевыми данными. Единственное ограничение, делающее соотношения (10) не точными, а приближенными, связано с малостью параметров $\alpha \ll 1$ и $\beta \ll 1$, являющихся коэффициентами при третьем и четвертом вкладах в первом из уравнений (5) (до его нормировки). Эти неравенства обусловлены алгоритмом построения приближенной группы точечных преобразований, когда координаты оператора группы представляются рядами по степеням параметров дифракции β и нелинейности α (см., например, [31, 33]). Ограничение конечным числом членов ряда в таком разложении подразумевает малость коэффициентов при соответствующих степе-

нях³⁾: ниже мы полагаем эти условия выполненными. В частности, одно из условий, $\beta \ll 1$, совпадает с уже использованным квазиоптическим приближением (7). Характерное изменение интенсивности пучка из-за нелинейности вдоль его оси происходит на масштабах

$$\Lambda_{nl} = \left| \frac{2a^2}{n} \right| = \frac{2a^2}{1 - e^{-\gamma I}},$$

поэтому другое условие, $\alpha \ll 1$, означает, что корректное описание обсуждаемой в следующем разделе пространственной структуры пучка возможно, если существенное искажение его профиля, например опрокидывание профиля производной эйконала $v(z, r)$, проявляется на масштабах $z_{nl} \gtrsim \Lambda_{nl}$.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ГАУССОВА ПУЧКА

4.1. Аналитические результаты

Из определения эйконала пучка следует, что знак его производной, т. е. положительность или отрицательность v , задает направление лучей пучка в пространстве: при $v > 0$ лучи отклоняются в сторону от оси пучка, т. е. происходит дефокусировка, а при $v < 0$ идет фокусировка к оси. Как следствие этого, происходит либо уменьшение интенсивности на оси пучка при $\partial_r v|_{r \rightarrow 0} > 0$, либо ее нарастание при $\partial_r v|_{r \rightarrow 0} < 0$. Это утверждение безотносительно к формулам (10) может быть проверено анализом решений системы уравнений (8) по теории возмущений по малому отклонению $z \rightarrow 0$ от границы плазмы. Представляя решение уравнений (8) вблизи оси пучка в виде степенных рядов по радиусу r ,

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_{2k+1}(z)}{(2k+1)!} r^{2k+1}, \quad I = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{I_{2k}(z)}{(2k)!} r^{2k}, \quad (13)$$

и подставляя эти разложения в исходные уравнения, запишем соотношения для коэффициентов $v_{2k+1}(z)$ и $I_{2k}(z)$ на оси пучка в пределе $z \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \partial_z v_1(0) + v_1^2(0) - \frac{I_4(0)}{3I_0(0)} + \frac{3I_2^2(0)}{4I_0^2(0)} - \frac{\gamma}{2a^2} \times \\ \times \exp[-\gamma I_0(0)] I_2(0) + O(z) = 0, \\ \partial_z I_0(0) + 2I_0(0)v_1(0) + \\ + z [2v_1(0)\partial_z I_0(0) + 2I_0(0)\partial_z v_1(0) + \partial_{zz} I_0(0)] + \\ + O(z^2) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

³⁾ Для обсуждающегося ниже гауссова профиля начально-го распределения интенсивности условие $\beta \ll 1$ не является существенным: оказывается, что в этом случае функция βS содержит лишь линейные по β вклады.

С учетом граничных условий в (8) последние уравнения дают $v_1(0) = 0$, $\partial_z I_0(0) = 0$ и выражения для производных $\partial_z v_1(0)$ и $\partial_{zz} I_0(0)$,

$$\partial_{zz} I_0(0) = -2I_0(0)\partial_z v_1(0) \equiv -2I_0(0) \times \left\{ \frac{I_4(0)}{3I_0(0)} - \frac{3I_2^2(0)}{4I_0^2(0)} + \frac{\gamma}{2a^2} \exp[-\gamma I_0(0)] I_2(0) \right\}. \quad (15)$$

При отличной, в общем случае, правой части уравнения (15) от нуля следует, что на малом удалении от границы изменение интенсивности пучка на оси квадратично по этому удалению и является тем большим, чем больше величина радиальной производной $v_1(0)$, т. е. чем круче пространственный профиль $v(0, r)$. Величина этой производной задается не только геометрией пучка, т. е. распределением его интенсивности по радиусу, но и соотношением параметров плазмы и пучка, задающим точку на плоскости $\{\gamma, a^2\}$. Например, вычисление коэффициентов $I_k(0)$ для начального гауссова профиля интенсивности пучка $J(r) = \exp(-r^2)$ дает следующие выражения для $\partial_z v_1(0)$ и $\partial_{zz} I_0(0)$:

$$\begin{aligned} \partial_z v_1(0) &= -(1/a^2)(\gamma e^{-\gamma} - a^2), \\ \partial_{zz} I_0(0) &= (2/a^2)(\gamma e^{-\gamma} - a^2). \end{aligned} \quad (16)$$

Из (16) следует, что характер поведения пучка при малом удалении от границы существенным образом зависит от того, выше или ниже кривой $\gamma \exp(-\gamma) - a^2 = 0$ расположена точка на плоскости $\{\gamma, a^2\}$: выше этой кривой, которую будем называть кривой I (см. рис. 1), интенсивность пучка на оси убывает, ниже — растет.

Данный результат, полученный из «примитивных» соображений на основе теории возмущений по малому отклонению от границы, имеет, однако, гораздо более широкую область применимости. Во-первых, нетрудно убедиться, что результат (16) воспроизводится решением (10). Во-вторых, формулы (10) имеют указанную в конце предыдущего раздела более широкую область применимости по величине отклонения от границы, чем для решений в рамках теории возмущений. Поэтому представляет интерес исследовать характер динамики пучка в зависимости от его положения на плоскости $\{\gamma, a^2\}$, используя аналогичные представления о фокусировке или дефокусировке пучка в зависимости от знака v .

Используя формулы (10), рассмотрим более подробно эволюцию пучка с гауссовым начальным профилем интенсивности $J(r) = \exp(-r^2)$, для которого функция $S(\chi)$ после введения новой переменной $\eta = \chi^2$ принимает вид

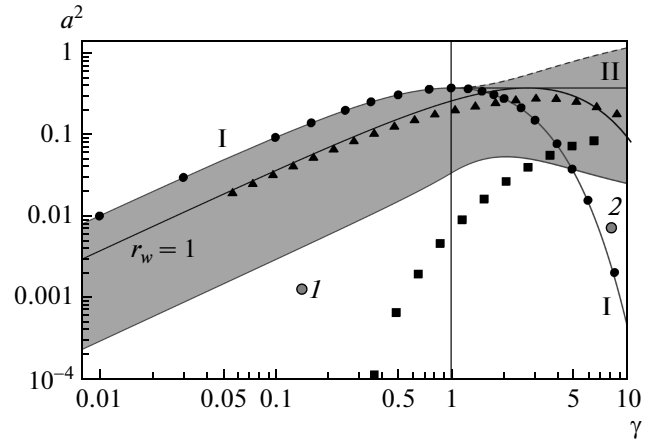


Рис. 1. Границы волноводных конфигураций на плоскости параметров $\{\gamma, a^2\}$, определенные условиями $(\partial_\eta S)^{axis} = 0$ (кривая I) и $(\partial_\eta S)^{min} = 0$ (кривая II). Значки — результаты численного моделирования (разд. 4.2). Кривая $r_w = 1$ задает аналитические решения с радиусом волновода равным единице. В затемненной области условия применимости аналитической теории плохо выполняются

$$S(p) = \frac{1}{a^2} (1 - e^{-\gamma p}) + \ln\left(\frac{1}{p}\right) - 2, \quad p = e^{-\eta}. \quad (17)$$

Из формул (10), (11) следует, что необходимым условием существования лучей, отклоняющихся к оси пучка (т. е. лучей, для которых $v < 0$), является отрицательность производной $\partial_\eta S < 0$, где

$$\partial_\eta S = 1 - (\gamma p/a^2)e^{-\gamma p}. \quad (18)$$

Минимального значения, равного

$$(\partial_\eta S)^{min} = 1 - 1/ea^2, \quad (19)$$

производная $\partial_\eta S$ достигает в точке $p = p_{min} = 1/\gamma$. Отсюда следует, что при $a^2 > 1/e$, что соответствует условию $\omega_{pe}^2 d^2/c^2 < e$, производная S_η всюду положительна, т. е. все лучи отклоняются от оси. С уменьшением величины a^2 , когда выполняется противоположное условие, $a^2 < 1/e$, возникают области с $v < 0$, в которых лучи отклоняются к оси пучка. Учитывая естественное ограничение $0 \leq p \leq 1$, нетрудно понять, что при $\gamma < 1$ величина $(\partial_\eta S)^{min}$ не достигается: функция $\partial_\eta S$ монотонно убывает, принимая свое минимальное значение $(\partial_\eta S)^{axis}$ при $p = 1$, т. е. на оси пучка $r = 0$,

$$(\partial_\eta S)^{axis} = 1 - (\gamma/a^2)e^{-\gamma}. \quad (20)$$

Соотношение (20) свидетельствует о том, что при $\gamma < 1$ граница области с $v < 0$ лежит ниже прямой

$a^2 = 1/e$ (кривая II на рис. 1) и задается условием $(\partial_\eta S)^{axis} = 0$, т. е. совпадает с кривой I, как указано на рис. 1. Ниже кривой I имеем $(\partial_\eta S)^{axis} < 0$, что соответствует условию $\gamma(\omega_{pe}^2 d^2/c^2) \exp(-\gamma) > 1$, т. е. в приосевой области лучи направлены к оси пучка, и при распространении в глубь плазмы происходит укручение профиля $v(z, r)$: производная $\partial_r v(z, r)$ на оси пучка,

$$\begin{aligned} (\partial_r v(z, r))_{r \rightarrow 0} &\equiv \left[\frac{(z/2) (\partial_{\chi\chi} S)}{1 + (z^2/2) (\partial_{\chi\chi} S)} \right]_{r \rightarrow 0} = \\ &= \frac{z [1 - (\gamma/a^2) e^{-\gamma}]}{1 + z^2 [1 - (\gamma/a^2) e^{-\gamma}]}, \end{aligned} \quad (21)$$

растет по абсолютной величине при увеличении координаты z и на расстоянии z_{axis} от границы,

$$z_{axis} = [(\gamma/a^2) e^{-\gamma} - 1]^{-1/2}, \quad (22)$$

происходит опрокидывание профиля $v(z, r)$. Предел $\gamma \rightarrow 0$ отвечает хорошо известному результату, полученному для среды с кубичной нелинейностью [3], а именно, описывает «взрывное» нарастание интенсивности на оси пучка, когда влияние нелинейного слагаемого оказывается более существенным, чем дифракционный вклад, $\alpha > \beta$. Сравнение формул (16) и (21) показывает, что найденное аналитическое решение в пределе $z \rightarrow 0$ воспроизводит решение по теории возмущений, а при больших z описывает укручение профиля $v(z, r)$ вплоть до его опрокидывания.

При $\gamma > 1$ точка p_{min} , в которой достигается минимум производной $\partial_\eta S$, лежит внутри допустимого интервала, $p_{min} \in [0, 1]$, и можно ожидать наиболее сильного искажения волнового фронта на радиусах, задаваемых величиной p_{min} . Нарастание искажений волнового фронта с ростом координаты z приводит к его опрокидыванию также вне оси пучка. Условие опрокидывания соответствует моменту нарушения однозначности в зависимости $r(\chi)$, задаваемому условиями $\partial_\chi r = \partial_{\chi\chi} r = 0$. В результате получается пара соотношений, задающих радиальную координату точки опрокидывания

$$r_{br} = \sqrt{\ln \frac{1}{p_{br}}} \left\{ 1 + z_{br}^2 \left[1 - \frac{1}{a^2} \gamma p_{br} \exp(-\gamma p_{br}) \right] \right\}$$

и соответствующую координату z_{br} вдоль оси пучка,

$$\begin{aligned} 3(1 - \gamma p_{br}) - 2 \ln p_{br} [3\gamma p_{br} - 1 - (\gamma p_{br})^2] &= 0, \\ z_{br} &= [(\gamma p_{br}/a^2) \exp(-\gamma p_{br}) \times \\ &\times (1 + 2(1 - \gamma p_{br}) \ln p_{br}) - 1]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Из формул (10) следует, что значение радиуса r_w , на котором v обращается в нуль, одинаково для всех z , на которых задано решение. Проинтегрированная по радиусу в пределах $0 \leq r \leq r_w$ и с весом r интенсивность пучка

$$M_w = \int_0^{r_w} dr r I$$

сохраняется, согласно второму уравнению в (8), внутри области радиуса r_w . Перераспределение интенсивности внутри этой области, которое сопровождается изменением координаты z , не меняет долю полной энергии, заключенной внутри области радиуса r_w . Поэтому можно назвать такую конфигурацию пучка волноводной с радиусом волновода r_w . Число точек r_{wi} , в которых выполняется условие обращения в нуль величины v (иными словами, число вложенных друг в друга волноводных конфигураций), зависит от положения на плоскости $\{\gamma, a^2\}$. В области $\gamma < 1$ при любом $a^2 < \gamma e^{-\gamma}$, т. е. для любой точки на плоскости $\{\gamma, a^2\}$ под кривой I и левее вертикали $\gamma = 1$, существует лишь одно значение радиуса $r_w = \sqrt{\ln(1/p_w)}$, задаваемого величиной p_w , которая находится из равенства нулю правой части выражения (18); выше кривой I и левее вертикали $\gamma = 1$ волноводных конфигураций нет.

Правее вертикали $\gamma = 1$ и ниже прямой $a^2 = 1/e$, т. е. ниже кривой II, существование одного или двух вложенных волноводов зависит от того, находимся ли мы выше или ниже кривой I на плоскости параметров $\{\gamma, a^2\}$. Ниже этой кривой, как и при $\gamma < 1$, имеется лишь одно значение радиуса $r_w = \sqrt{\ln(1/p_w)}$, вычисляемого из уравнения $\partial_\eta S(p = p_w) = 0$. Выше кривой I одновременно существуют два волновода с радиусами r_{w1} и r_{w2} . Большему радиусу $r_{w1} = \sqrt{\ln(1/p_{w1})}$ соответствует корень p_{w1} уравнения $\partial_\eta S(p = p_{w1}) = 0$, лежащий в интервале $p_{w1} \in [p_*, 1/\gamma]$, где p_* — отличный от единицы корень уравнения $\partial_\eta S(p = p_*) = \partial_\eta S(p = 1)$. Меньшему радиусу $r_{w2} = \sqrt{\ln(1/p_{w2})}$ соответствует корень p_{w2} уравнения $\partial_\eta S(p = p_{w2}) = 0$, лежащий в интервале $p_{w2} \in [1, 1/\gamma]$. При приближении к прямой $a^2 = 1/e$ разница между p_{w1} и p_{w2} , а значит, и между r_{w1} и r_{w2} стремится к нулю, область с отрицательными v сужается и, в конце концов, пропадает, т. е. выше прямой $a^2 = 1/e$ волноводных конфигураций нет.

Поскольку внутри волновода с радиусом r_{w2} величина $v > 0$, по мере роста z интенсивность в нем перераспределяется так, что ее максимум локализуется на внешней стенке волновода. Напротив, для

трубчатого волновода с $r_{w1} \leq r \leq r_{w2}$ величина $v < 0$ внутри волновода, что приводит к такому перераспределению интенсивности, когда ее максимум оказывается вблизи внутренней границы трубчатого волновода, точнее вблизи r_{br} . Рассматривая распределение интенсивности пучка по радиусу «в целом», можно назвать такое распределение интенсивности кольцевой структурой (или проще — кольцом). Впрочем, для точек ниже кривой I максимум интенсивности с ростом z также расположен вблизи $r_{br} \neq 0$, поэтому и здесь можно говорить о формировании кольцевой структуры пучка, однако в отличие от предыдущего варианта при этом интенсивность пучка на оси растет. На плоскости параметров $\{\gamma, a^2\}$ для примера приведена кривая, соответствующая волноводам радиуса $r_w = 1$. При $\gamma > 1$ эта кривая рассчитывается по внешнему радиусу r_{w1} вплоть до касания с кривой II, а для больших γ , когда эта кривая спадает, она характеризует внутренний радиус r_{w2} . В области ниже кривой II и правее кривой I через каждую точку на плоскости $\{\gamma, a^2\}$ проходят две кривые, характеризующие волноводы постоянного радиуса: восходящая кривая соответствует большему радиусу, нисходящая — меньшему.

Вывод о существовании волноводной структуры базируется на теории приближенных РГ-преобразований. Условием ее применимости, как было сказано выше, является малость параметров α и β приближенной группы. В пределе исчезающей нелинейности, $\alpha \rightarrow 0$, приведенное аналитическое решение (10), (11) является точным и характеризует дифракционное распывание лазерного пучка. Поэтому логично предположить, что область применимости полученного аналитического решения (см. также утверждение в конце разд. 3) ограничена такими значениями параметров a^2 и γ , при которых нелинейность, приводящая к существенному искажению лазерного пучка, проявляется на большом характерном масштабе $z_{nl} \gtrsim \Lambda_{nl}$, где в качестве z_{nl} следует использовать минимальную из двух величин, z_{br} и z_{axis} , т.е. $z_{nl} = \min\{z_{br}, z_{axis}\}$. Это ограничение выделяет на плоскости параметров $\{\gamma, a^2\}$ область, где результаты аналитического рассмотрения скорее всего носят качественный характер, и их справедливость нуждается в проверке, например, численными расчетами. Качественно, границы этой области можно получить, исходя из следующих оценок: будем считать верхней границей этой области при $\gamma < 1$ кривую, которая задается соотношением (22) при $z_{axis} = \infty$, т.е. кривую I, а при $\gamma > 1$ кривую, которая задается соотношениями (23) при $z_{br} = \infty$ и

обозначена на рис. 1 штрихами. Нижнюю границу условно зададим соотношением $\Lambda_{nl} = 3z_{nl}$, причем при вычислении Λ_{nl} выбираем значение интенсивности на оси пучка вблизи границы, $I = 1$. Полученная в результате область на плоскости параметров на рис. 1 выделена серым цветом.

4.2. Сравнение с численными результатами в области существования аналитического решения

Для проверки полученных аналитических результатов и уточнения области их применимости было проведено численное исследование уравнения (1). Здесь мы обсудим сравнение численных результатов с аналитическими в области их применимости, т.е., для таких значений z , при которых не происходит опрокидывания профиля производной эйконала в аналитическом решении.

Для начала отметим, что выше кривой I при $\gamma < 1$ и выше штриховой линии на рис. 1, где аналитика предсказывает дифракционное распывание пучка, отличие численных результатов от аналитического решения практически пренебрежимо. Поэтому основной интерес представляет сравнение численных и аналитических результатов в выделенной области (см. рис. 1) и под ней. Аналитическое решение (10), (11) определено лишь до точки опрокидывания профиля $v(z, r)$, но формально оно оказывается неприменимым несколько раньше, поскольку при подходе к точке опрокидывания профиля $v(z, r)$ становится важен учет поправок следующего порядка (по нелинейности) в операторе РГ-симметрии (9). Найденные особенности в точном решении, конечно, не возникают, однако изучение условий опрокидывания и сравнение численных и аналитических решений при подходе к точке опрокидывания позволит качественно (а в ряде случаев и количественно) предсказать различные типы решений.

В качестве первого теста мы рассмотрели поведение численного решения при очень малых z . В зависимости от параметров a^2 и γ значение интенсивности на оси пучка для таких z может либо нарастать, либо убывать с ростом z . Граница, разделяющая эти два типа численных решений, обозначена на рис. 1 кружками. Эта граница, вполне ожидаемо, совпадает с кривой I из аналитического решения, что свидетельствует о совпадении результатов аналитических и численных расчетов, по крайней мере, для малых z . С увеличением z численное решение начи-

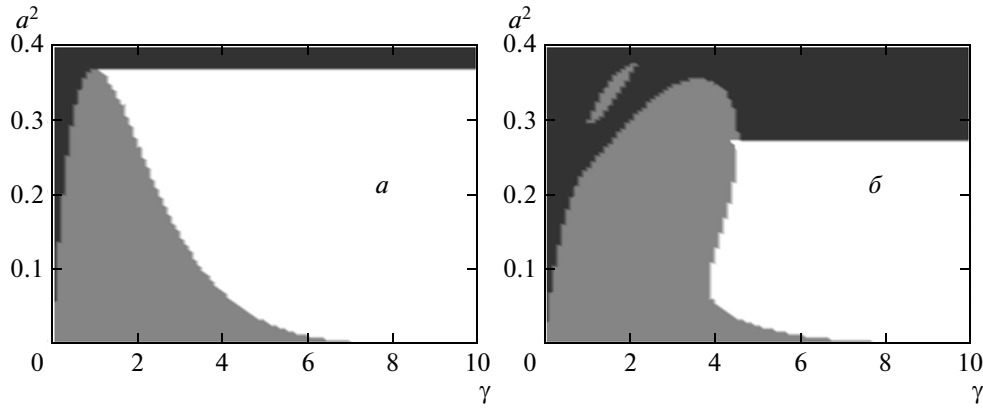


Рис. 2. Количество нулей производной эйконала для численного решения при $0 < r < 4$ и $z = 0.025 z_{max}$ (а), $z = 0.5 z_{max}$ (б). В черной области нет нулей, в серой — один нуль, в белой — два нуля

нает отличаться от приближенного аналитического. Это различие, как было сказано выше, должно сильнее проявляться в затемненной области, тогда как вне ее можно надеяться на качественно приемлемое согласие численных и аналитических расчетов.

Выше мы обсуждали существование волноводных решений, которые характеризуются наличием нулей у производной эйконала. Согласно результатам аналитического исследования, положение нулей, если они существуют, не зависит от z , и, таким образом, нули производной эйконала определяют стенки волноводов. Полная энергия, заключенная между этими стенками, остается постоянной. Одним из результатов аналитической теории, разработанной в предыдущем разделе, было указание областей на плоскости $\{\gamma, a^2\}$, в которых существуют волноводные решения. Нашим вторым тестом аналитических результатов явилось построение областей, в которых численный анализ обнаруживает формирование волноводных решений. Эти области показаны на рис. 2, где проанализированы численные решения для расстояний от границы до $z = 0.025 z_{max}$ и $z = 0.5 z_{max}$, где $z_{max} = z_{nl}$, в области под кривой I для $\gamma < 1$ и под кривой II для $\gamma > 1$. При этом в области над кривыми I и II принимаем длину z_{max} равной рэлеевской длине, $z_{max} = 1$.

Как было указано выше, численные и аналитические решения совпадают при малых z . Поскольку радиусы волноводных стенок в теории не зависят от z , при малых z анализ численных решений должен соответствовать классификации решений, которую иллюстрирует рис. 1. Именно это наблюдается на рис. 2а. Однако при увеличении z границы областей

начинают деформироваться (рис. 2б). Это связано с тем, что положения нулей производной эйконала в численном решении, вообще говоря, не постоянны (см. пример на рис. 3а), а являются функциями z . Последнее особенно хорошо выражено для решений в затемненной области на рис. 1 — области, где если и ожидалось, то только качественное совпадение приближенных аналитических результатов с истинными. Для некоторых значений параметров γ и a^2 возможно изменение числа нулей (как в примере на рис. 3б), вследствие чего тип решений тоже меняется. При подходе к точке $z = z_{max}$ обнаруживаются решения с большим, чем два, количеством нулей производной эйконала. В целом, однако, результаты численного моделирования подтвердили, что вне затемненной области на рис. 1 при $z \lesssim (3/4) z_{max}$ число нулей производной эйконала остается неизменным, а их положения меняются не более чем на несколько процентов. Иллюстрацией этого утверждения служат подробно обсуждаемые ниже примеры пространственного распределения производной эйконала, представленные на рис. 4 и 5.

Строго говоря, анализ численных решений показывает, что истинных волноводов, заданных условием постоянства положений нулей производной эйконала, не обнаруживается. Можно, однако, определить волновод как структуру, у которой мощность, заключенная в пределах заданного радиуса, не уменьшается на масштабах, существенно превышающих масштаб изменения его поперечной структуры. Подобный подход к анализу пучка с точки зрения изменения его интегральных характеристик ранее использовался, например, в работе [21].

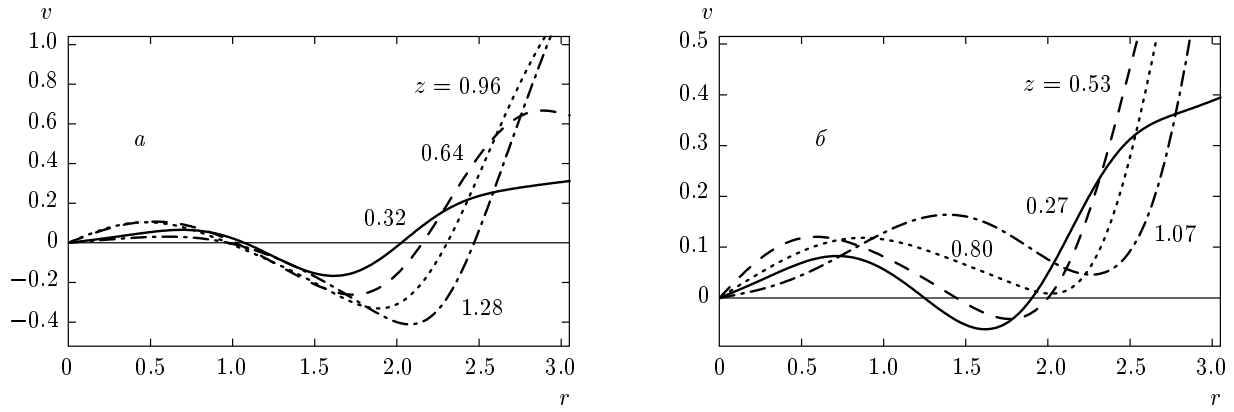


Рис. 3. Примеры поведения производной эйконала в затемненной области на рис. 1: *a* — изменение положения нулей ($a^2 = 0.16, \gamma = 9.9$); *b* — изменение числа нулей ($a^2 = 0.24, \gamma = 9.9$)

Для сравнения с аналитическим результатом на рис. 1 треугольниками даны значения параметров γ, a^2 , для которых мощность внутри области радиуса $r = 1$ при $z = z_{max}$ совпадает с мощностью, заключенной внутри области того же радиуса при $z = 0$. Сравнивая с линией $r_w = 1$ на рис. 1, задающей значения параметров γ, a^2 , для которых аналитическое решение является истинной волноводной структурой с внешним радиусом равным единице, видим, что точки практически ложатся на эту линию, несмотря на то что они проходят по выделенной области, где условия применимости теории плохо выполняются.

Следующим тестом был анализ кольцевых численных решений. На рис. 1 квадратами дана граница существования кольцевых численных решений при $z = z_{nl}$. Для точек на плоскости параметров $\{\gamma, a^2\}$, лежащих под этой кривой, моделирование дает кольцевое распределение интенсивности пучка. Под кольцевым распределением мы понимаем такое распределение интенсивности пучка, когда его интенсивность при фиксированном z достигает максимума при некотором $r > 0$. Возникнув при конечном $z < z_{nl}$, этот максимум нарастает при стремлении $z \rightarrow z_{nl}$. Здесь мы находим существенное отличие от результатов теоретического анализа, которое заключается в том, что аналитическое решение дает кольцевые структуры с одним внеосевым максимумом и только для $\gamma > 1$, тогда как в численном эксперименте наблюдаются немонотонные распределения интенсивности по радиусу и при $\gamma < 1$. Это различие связано с тем, что граница, показанная квадратами на рис. 1, измерена в точке $z = z_{nl}$, в то время как аналитическое решение становится неприменимым

уже при несколько меньших z . Заметим, что, в силу крутого профиля численной границы фокусировки в кольцо при $\gamma < 1$ и относительно пологого профиля этой границы при $\gamma > 1$, и здесь можно говорить о качественном подобии аналитических и численных результатов.

Наиболее явно различие и подобие численных и аналитических результатов можно проследить при прямом сравнении пространственных распределений интенсивности и производной эйконала пучка. Приведем два иллюстративных примера, отвечающих параметрам a^2 и γ из области, лежащей существенно ниже граничных кривых I, II на рис. 1.

В качестве первого примера рассмотрим кривые пространственного распределения производной эйконала и интенсивности пучка для параметров, соответствующих точке 1 на рис. 1: $\gamma = 0.1, a^2 = 0.001$. Эти кривые приведены на рис. 4. Нули в распределении производной эйконала указывают на существование пространственного волновода с радиусом $r_w \approx 2$. Что касается распределения интенсивности, то представленная на рис. 4*a* картина пространственной эволюции пучка в среде с насыщающейся нелинейностью схожа с типичной картиной его эволюции в среде с кубической нелинейностью, когда влияние эффектов насыщения нелинейности несущественно. Однако, в отличие от варианта, когда насыщение нелинейности отсутствует и интенсивность на оси пучка обращается в бесконечность, здесь, когда $\gamma \neq 0$, интенсивность на оси пучка при подходе к точке опрокидывания и за нею остается конечной, как следует из полученной в численном эксперименте кривой распределения интенсивности, представленной на рис. 4*b* и на вставке

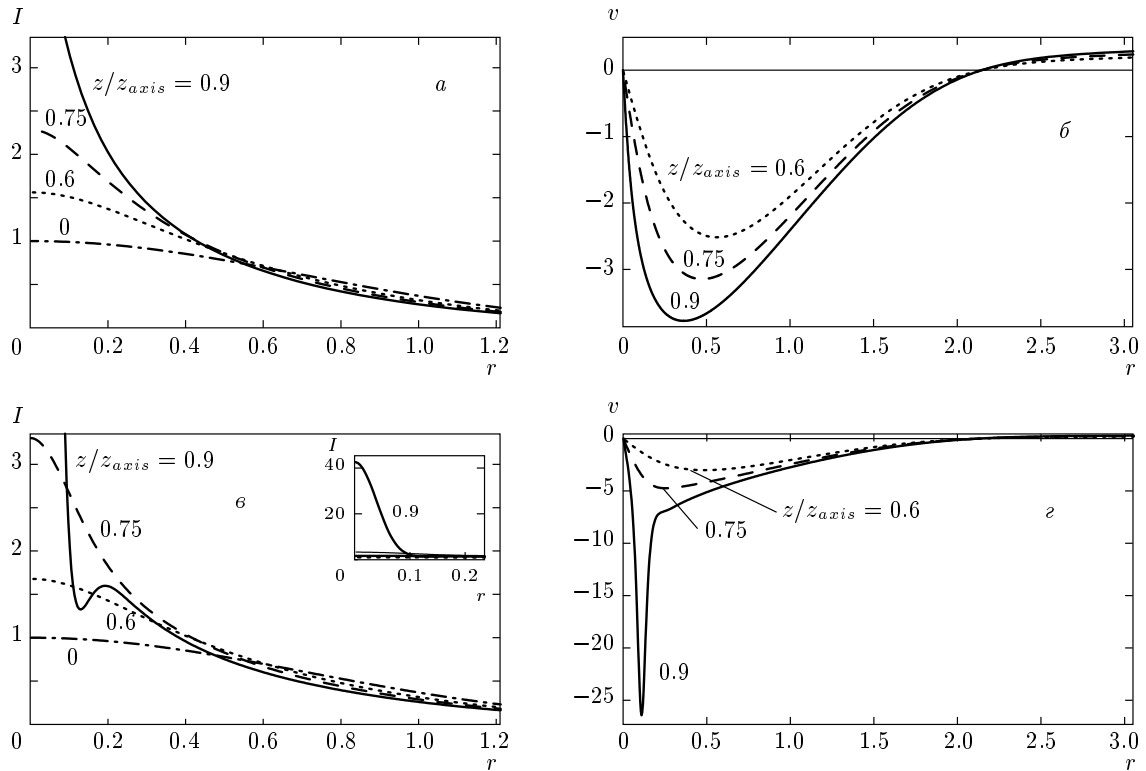


Рис. 4. Пространственное распределение интенсивности I (a, c) и производной эйконала v (b, d) лазерного пучка в плазме для $a^2 = 0.001$, $\gamma = 0.1$ (точка 1 на рис. 1) на различных расстояниях от границы плазмы: $z/z_{axis} = 0.9$ (1), 0.75 (2), 0.6 (3), 0 (4); a, b — аналитические результаты; c, d — результаты численного моделирования

к этому рисунку. Этот факт указывает на необходимость коррекции аналитического рассмотрения в окрестности точки опрокидывания, о чем уже говорилось выше. Сравнение приведенных на рис. 4 кривых показывает неплохое количественное совпадение аналитических и численных результатов вплоть до $z \approx 0.75 z_{axis}$. Далее согласие носит только качественный характер (наличие наблюдаемых в численном счете осцилляций в распределении интенсивности по радиусу в аналитическом подходе не подтверждается), теория предсказывает опрокидывание профиля $v(z, r)$ при $z = z_{axis}$. Имеется также хорошее согласие численных и аналитических результатов для границы r_w волноводной конфигурации (ср. точки пересечения кривых производной эйконала с осью на рис. 4б, д).

В качестве второго примера выбран случай, отвечающий точке 2 на рис. 1: $\gamma = 8.5$, $a^2 = 0.005$, для которой аналитические кривые распределения интенсивности и производной эйконала представлены на рис. 5. Наличие двух нулей во внеосевой области в распределении производной эйконала по ра-

диусу указывает на существование двух вложенных волноводных конфигураций с радиусами $r_{w1} \approx 2.73$ и $r_{w2} \approx 0.4$. Максимум интенсивности пучка формируется внутри трубчатого волновода на конечном расстоянии от оси волновода вблизи $r_{br} \approx 0.8983$, а интенсивность на оси пучка падает, хоть и незначительно. Сравнение рис. 5а, б и рис. 5в, д показывает, что кольцевая структура в численном счете образуется несколько позднее, чем в аналитике, а само образование кольца сопровождается возникновением вторичных локальных максимумов при больших r . Тем не менее и здесь можно говорить о неплохом соответствии результатов аналитического и численного подходов.

Подводя итог сравнению численных и аналитических расчетов, можно сказать, что качественное, а зачастую и количественное, их соответствие не противоречит приведенному в начале раздела утверждению о применимости аналитических результатов при условии возникновения нелинейных искажений пучка на расстояниях от границы плазмы $z_{nl} \gtrsim \Lambda_{nl}$.

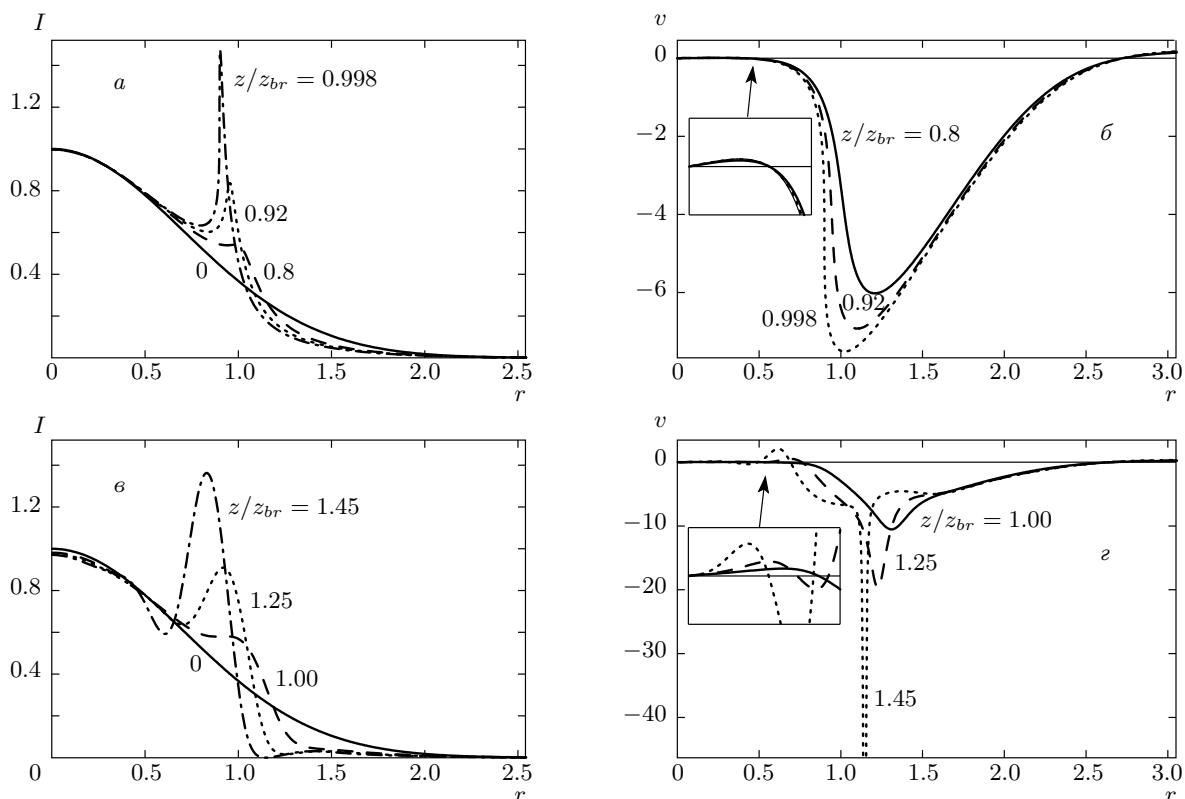


Рис. 5. То же, что на рис. 4 для $a^2 = 0.005$, $\gamma = 8.5$ (точка 2 на рис. 1)

4.3. Некоторые результаты численного анализа решений НУШ за пределами применимости аналитического решения

Рассмотренное выше аналитическое решение определено только до точки опрокидывания производной эйконала. Понимание того, о каких характерных значениях z_{nl} идет речь, дают представленные на рис. 6 кривые постоянных значений $z_{nl} = \text{const}$ на плоскости $\{\gamma, a^2\}$. Как продемонстрировано на рис. 6, расстояние от точки опрокидывания до границы плазмы во многих интересных случаях меньше, чем рэлеевская длина. На практике, однако, важно знать поведение пучка на расстояниях, существенно превышающих рэлеевскую длину. Здесь мы рассмотрим некоторые результаты численного моделирования на больших расстояниях от границы плазмы.

Для начала отметим, что численное моделирование за пределами применимости аналитической теории дает значительно более разнообразные типы решений по сравнению с рассмотренными выше. Так, например, можно выделить характерные типы решений, отвечающие каналированию, т. е., в сред-

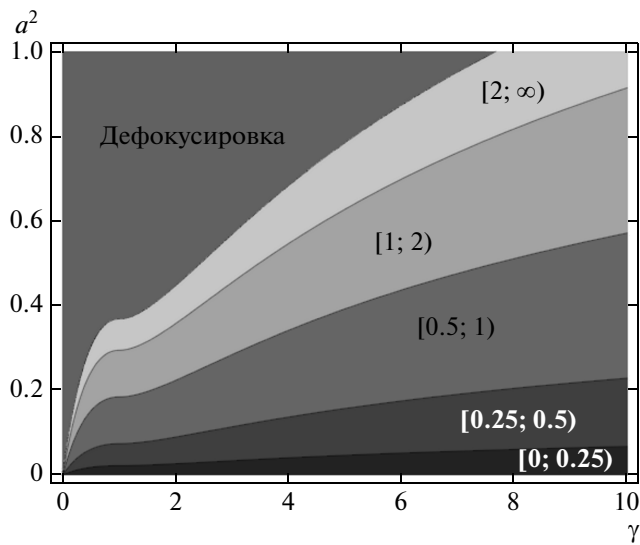


Рис. 6. Положение точки опрокидывания производной эйконала (в единицах рэлеевской длины пучка)

нем, неумению мощности, заключенной в волноводной структуре некоторого радиуса, на расстоянии, много большем рэлеевской длины (рис. 7а);

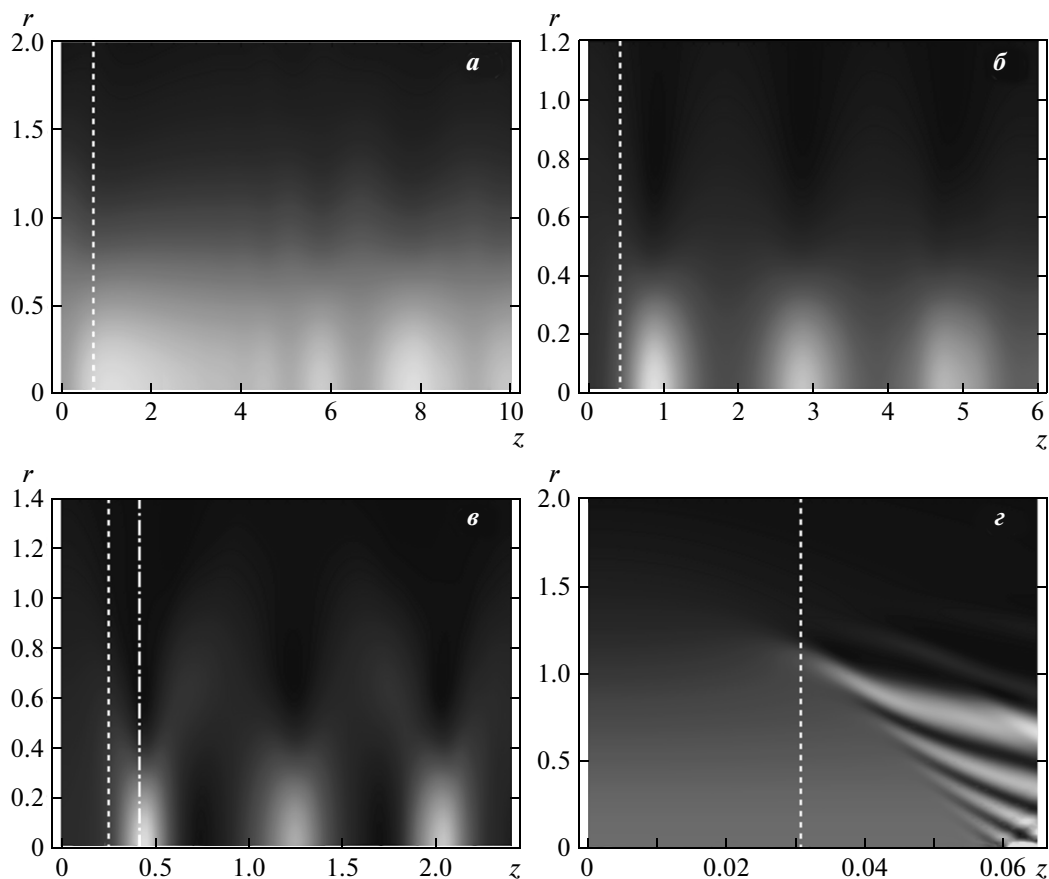


Рис. 7. Примеры различных типов решений за пределами области существования аналитического решения: *a* — канал ($\gamma = 0.5, a^2 = 0.1$); *б* — чередование фокусировки на ось и дефокусировки ($\gamma = 0.25, a^2 = 0.03$); *в* — чередование фокусировки в кольцо и дефокусировки ($\gamma = 2.5, a^2 = 0.03$); *г* — фокусировка в несколько вложенных колец ($\gamma = 8.5, a^2 = 0.001$). Штриховыми линиями даны границы существования аналитического решения

чередованию фокусировки на ось и дефокусировки (рис. 7б); чередованию фокусировки в кольцо и дефокусировки (рис. 7в); фокусировке в несколько вложенных колец (рис. 7г) и др.

Точно разделить эти типы решений представляется возможным не всегда. Например, зачастую при чередующейся фокусировке часть мощности всегда заперта в области определенного радиуса, т. е. эти типы решений могут быть интерпретированы и как каналы. Здесь мы не ставим себе целью осуществить подробное описание всех типов численных решений. Ввиду сложности эта задача требует отдельного исследования. Мы рассмотрим лишь, при каких условиях может проходить образование канала и могут ли эти условия быть предсказаны из аналитического решения, описанного выше.

В соответствии с уже обсуждавшимся выше, под каналом радиуса r_{ch} подразумевается волноводная

структура, для которой мощность, заключенная при $z = 0$ в пределах радиуса r_{ch} , также и при $z > 0$ содержится, в среднем, внутри канала этого же радиуса. Радиус канала, внутри которого заключена данная мощность, в отличие от возникающей в аналитическом решении величины r_w , может меняться с ростом z (например, в силу чередующихся фокусировки и дефокусировки), но если среднее по z значение этого радиуса не превышает r_{ch} , то мы говорим об образовании канала. В силу природы численного решения максимальное значение координаты z всегда конечно, и границы решений типа «канал» на плоскости $\{\gamma; a^2\}$ будут зависеть от выбора этого максимального значения. Тем не менее, если это значение выбрано достаточно большим, то выводы будут интересны с практической точки зрения.

На рис. 8 сплошной линией дана граница решений канал–дефокусировка, построенных в числен-

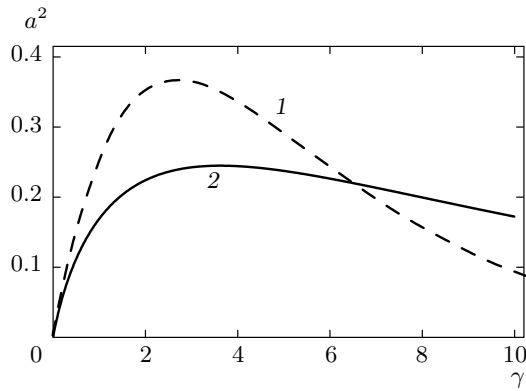


Рис. 8. Границы волноводных решений единичного радиуса в аналитическом подходе (кривая 1) и в численном моделировании за пределами применимости аналитической теории (кривая 2)

ном подходе для $r_{ch} = 1$ и максимального значения z , равного трем рэлеевским длинам. Как следует, например, из примера на рис. 7а, установившийся на такой длине тип решения уже, скорее всего, не изменится при дальнейшем росте z . Штрихами на рис. 8 дана граница волноводных конфигураций для $r_w = 1$ из аналитического подхода. Как следует из рис. 8, тенденция, обнаруженная в аналитическом решении при малых z , присутствует, в целом, и при больших z за пределами применимости последней. Граница волновода радиусом, равным единице, полученная из теории, отличается в худшем случае от точного решения не более чем на несколько десятков процентов, что свидетельствует о качественно верных предсказаниях теории.

Анализ особенностей каналирования, которые иллюстрирует рис. 7, позволяет сделать еще одно предположение о качественно-предсказательном характере предложенной теории. Как было показано в разд. 3, аналитическое рассмотрение справедливо до таких расстояний от границы плазмы, пока не наступает опрокидывание профиля производной эйконала. Такой эффект есть следствие приближенного математического рассмотрения и не проявляется в численном счете, где решение продолжается за эту точку. В области $\gamma < 1$ опрокидывание наступает на оси пучка. Координата z_{axis} точки опрокидывания выделена на рис. 7 штрихами. Видно, что для области применимости теории, т. е. ниже и вдали от затемненной области на рис. 1, величина z_{axis} с хорошей степенью точности дает положение первого максимума интенсивности пучка на оси. При

$\gamma > 1$ теория предсказывает опрокидывание вне оси пучка на расстояниях, меньших z_{axis} . Однако если применить теоретические результаты за границей z_{br} их формальной применимости, то и здесь точка z_{axis} , отмеченная штрихпунктирной линией на рис. 7б, с неплохой точностью дает положение максимума интенсивности пучка на его оси. Более того, периодическое изменение интенсивности пучка на оси (см. рис. 7б,в) можно характеризовать пространственным периодом, равным примерно $2z_{axis}$. Последнее, впрочем, нуждается в дальнейшей, более тщательной проверке, с использованием как результатов теории, так и численного моделирования.

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ВЫВОДЫ

В данной работе проведен параметрический анализ существования волноводных конфигураций в среде с насыщающейся нелинейностью. В качестве исходного был взят гауссов пучок (лазерный) на входе в нелинейную среду (плазму). Тип нелинейности определялся пондеромоторным механизмом воздействия лазерного пучка на электроны плазмы. Инструментом исследования служило приближенное аналитическое решение, построенное с использованием теории приближенных групповых преобразований. С целью проверки полученных аналитических результатов и уточнения области их применимости аналитическое исследование было дополнено численным моделированием процесса распространения гауссова пучка в плазме с экспоненциально насыщающейся нелинейностью. Сравнение численных и аналитических расчетов показало их хорошее качественное, а зачастую и количественное соответствие в пределах границ применимости развитой теории.

Достоинством найденного решения является возможность его формального применения для других, отличных от использованной в работе, функций S в выражении (12). Таким способом можно, например, проанализировать развитие исходно заданных мелкомасштабных возмущений на гауссовом профиле интенсивности, изучить другой тип насыщающейся нелинейности (скажем, хорошо известную нелинейность степенного или дробно-линейного вида) и рассмотреть другой тип распределения интенсивности пучка на входе в среду (например, гипергауссово распределение, имеющее практический интерес). Другим направлением исследований могло бы явиться улучшение уже полученных приближенных результатов с целью их продолжения за границу формаль-

ной неприменимости, т. е. за точку опрокидывания. На этом пути можно ожидать формулировку аналитического подхода к описанию процессов схлопывания пучка на ось, распада и филаментации пучка из-за развития мелкомасштабных возмущений, формирования многофокусных структур, учета конечной длительности пучка, т. п. Наглядные и разнообразные примеры подобных режимов в численном моделировании приведены в разд. 4.3.

Эффект нестационарности пучка вследствие конечной длительности лазерного импульса, впрочем, может быть оценен уже из полученных результатов. Для этого в полученных аналитических формулах надо заменить γ на $\gamma(\tilde{t})$, где $\tilde{t} = (t - z/v_{gr})/\tau_i$, v_{gr} — групповая скорость. Например, для гауссова импульса на входе в среду вида $I_0(t) = I_0 \exp(-t^2/\tau_i^2)$ последнее утверждение означает, что, с точки зрения проведенного анализа поведения пучка на плоскости $\{\gamma, a^2\}$, изменение интенсивности лазерного импульса длительности τ_i во времени эквивалентно движению по плоскости $\{\gamma, a^2\}$ с фиксированным значением a^2 от исчезающе-малого значения γ до максимально возможного, которое соответствует максимальной интенсивности I_0 пучка на входе в среду.

Подводя итог, подчеркнем, что в настоящей работе в модели НУШ исследовано приближенное аналитическое решение задачи об эволюции гауссова волнового пучка в плазме в условиях насыщающейся нелинейности. Найдены аналитически и уточнены с помощью численных экспериментов границы областей на плоскости параметров, характеризующих лазерный пучок и плазму, для которых свойственно качественно различное поведение пучка. Именно, исследование пространственной структуры пучка позволило выделить на плоскости параметров $\{\gamma, a^2\}$ области возникновения различных пространственных волноводных самофокусировочных структур: «обычный» самофокусировочный режим, при котором наиболее быстрый рост интенсивности происходит на оси пучка, и режим образования кольцевой структуры, при котором на конечном, отличном от нуля значении радиуса возникает максимум интенсивности пучка, превосходящий (по крайней мере на начальном этапе) значение интенсивности пучка на его оси. При этом радиальная структура пучка представляет набор трубчатых волноводов, внутри которых интегральная интенсивность пучка сохраняется. Численный эксперимент качественно подтверждает эту тенденцию и уточняет как границы возникновения волноводных конфигураций, так и характерные радиусы волноводов. Сравнение теорети-

чески предсказанных значений радиусов волноводов с величинами их средних радиусов (сохраняющих в среднем интегральную интенсивность внутри заданного радиуса) дает удовлетворительное согласие теоретических и численных результатов.

Численный эксперимент подтверждает существование найденных теоретически волноводных конфигураций и на больших расстояниях от границы вне области теоретического рассмотрения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 09-01-00610а, 09-02-00187а, 11-01-00267а) и гранта НШ-3810.2010.2. Один из авторов (К. И. П.) благодарен профессору Оттавского университета Л. Рамунно (Lora Ramunno) за обсуждение и финансовую поддержку. Другой автор (В. Ф. К.) благодарен ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет» за финансовую поддержку в рамках мегагранта № 11.G34.31.0042. Часть расчетов в работе была проведена на серверах консорциума SHARCNET.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Аскаръян, ЖЭТФ **42**, 1567 (1962).
2. В. И. Таланов, Изв. вузов, радиофизика **7**, 564 (1964).
3. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, УФН **93**, 19 (1967).
4. В. Н. Луговой, А. М. Прохоров, УФН **111**, 203 (1973).
5. С. Н. Власов, В. И. Таланов, *Самофокусировка волн*, Изд-во ИПФ РАН, Нижний Новгород (1997).
6. L. Bergé, Phys. Rep. **303**, 259 (1998).
7. C. Sulem and P.-L. Sulem, Springer Series: Appl. Mathem. Sci. Vol. 139, Springer-Verlag, New York (1999).
8. *Self-Focusing: Past and Present*, ed. by R. W. Boyd, S. G. Lukishova, and Y. R. Shen, Springer Series: Topics in Appl. Phys. Vol. 114, Springer-Verlag, New York (2009).
9. Г. М. Фрайман, ЖЭТФ **88**, 390 (1985).
10. B. J. Mesurier, G. C. Papanicolaou, C. Sulem et al., Physica D **32**, 210 (1988).
11. Е. А. Kuznetsov, in [8], p. 175.

12. В. И. Беспалов, А. Г. Литвак, В. И. Таланов, сб. *Нелинейная оптика. Труды симпозиума*, Наука, Новосибирск (1968), с. 428.
13. J. H. Marburger, *Progr. Quant. Electron.* **4**, part 1, 35 (1975).
14. В. Е. Захаров, В. В. Соболев, В. С. Сынах, *ЖЭТФ* **60**, 136 (1971).
15. Л. М. Дегтярев, В. В. Крылов, *ДАН СССР* **245**, 67 (1979).
16. M. Faisal, S. K. Mishra, M. P. Verma, and M. S. Sodha, *Physics Plasmas* **14**, 103103 (2007).
17. A. Sharma, G. Prakash, M. P. Verma, and M. S. Sodha, *Physics Plasmas* **10**, 4079 (2003).
18. G. Prakash, A. Sharma, M. P. Verma, and M. S. Sodha, *J. Opt. Soc. Amer. B* **22**, 1268 (2005).
19. D. Subbarao, K. Batra, and R. Uma, *Phys. Rev. E* **68**, 066403 (2003).
20. M. Karlsson, *Phys. Rev. A* **46**, 2726 (1992).
21. F. Vidal and T. W. Johnston, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1282 (1996).
22. G. Fibich, N. Gavish, and X.-P. Wang, *Physica D* **231**, 55 (2007).
23. G. Baruch, G. Fibich, and N. Gavish, *Physica D* **239**, 1968 (2010).
24. G. Fibich, in [8], p. 413.
25. M. E. Garcia, V. F. Kovalev, and L. L. Tatarinova, *Lobachevskii J. Mathem.* **31**, 123 (2010).
26. C. E. Max, *Phys. Fluids* **19**, 74 (1976).
27. V. F. Kovalev, V. Yu. Bychenkov, and V. T. Tikhonchuk, *Phys. Rev. A* **61**, 033809 (2000).
28. З. К. Янкаускас, *Изв. вузов, радиофизика* **9**, 412 (1966).
29. З. К. Янкаускас, *Письма в ЖЭТФ* **5**, 335 (1967).
30. Д. В. Ширков, В. Ф. Ковалев, *УФН* **178**, 849 (2008).
31. В. Ф. Ковалев, *ТМФ* **119**, 405 (1999).
32. R. Y. Chiao, E. Garmire, and C. H. Townes, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 479 (1964).
33. В. А. Байков, Р. К. Газизов, Н. Х. Ибрагимов, *Матем. сб.* **136(178)**, 435 (1988).