

ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ ГАУССА – БОННЭ И ВОЗМОЖНОСТИ ИХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ПОИСКА

*С. О. Алексеев**, *К. А. Ранну***

*Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 9 сентября 2011 г.

Обсуждаются следствия моделей гравитации с поправками второго порядка по кривизне в виде члена Гаусса – Боннэ и возможности (или невозможности) их экспериментального поиска или наблюдений. Рассматривается полная версия решения «четырёхмерная черная дыра Шварцшильда – Гаусса – Боннэ» и ограничение на возможную минимальную массу черной дыры, следующее из данной модели. Использование полученного решения в качестве модели последних стадий хокинговского испарения черных дыр с небольшой исходной массой (до 10^{15} г), время жизни которых сравнимо со временем жизни нашей Вселенной, позволило выявить различия в картинах испарения: получены большие значения излучаемой энергии и показана невозможность экспериментального поиска первичных черных дыр по продуктам их испарения. Также обсуждаются сценарии испарения черных дыр Гаусса – Боннэ в многомерных моделях гравитации и возможности их экспериментального поиска.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	464	6. Многомерные неврацающиеся черные дыры Гаусса – Боннэ	477
2. Решения для случая четырехмерных неврацающихся черных дыр	465	6.1. Черные дыры в физике высоких энергий (несбывшиеся надежды)	477
2.1. Базовые решения	465	6.2. Температуры многомерных черных дыр .	478
2.2. Неврацающаяся незаряженная черная дыра Гаусса – Боннэ	466	6.3. Испарение черной дыры Шварцшильда – Гаусса – Боннэ	478
2.2.1. Пертурбативные решения	466	6.4. Практическая возможность измерения струнной константы связи	479
2.2.2. Численные решения и структура метрики	466	7. Многомерная черная дыра Керра – Гаусса – Боннэ	481
2.3. Неврацающаяся заряженная черная дыра Гаусса – Боннэ	468	7.1. Вырожденный случай для любого числа дополнительных измерений	481
3. Ограничение на минимальную массу черной дыры в гравитации Гаусса – Боннэ ..	471	7.2. Пятимерное аналитическое решение	483
4. Испарение черных дыр Гаусса – Боннэ	473	7.3. Термодинамические свойства решения ...	484
4.1. Закон испарения	473	8. Выводы	484
4.2. Спектр и интенсивность испарения	474	Литература	485
5. Пост-ньютоновский формализм	476		

*E-mail: alexeyev@sai.msu.ru

**E-mail: rannu@xray.sai.msu.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия теоретическая физика предложила целый ряд концепций для объединения всех взаимодействий. При этом с появлением новой модели встает вопрос об ее подтверждении [1–14]. Так как прямая экспериментальная проверка таких теорий, как, например, суперструны, невозможна, огромную роль играет поиск косвенных следствий, доступных для экспериментальной или наблюдательной проверки. В связи с этим приобретают большую роль новые типы решений и их анализ на самосогласованность, а именно: если теоретическая модель, претендующая на фундаментальность, хорошо описывает один класс явлений (например, космологические решения), то она также должна давать адекватные результаты и в смежных областях (в частности, в физике черных дыр).

Исследования влияния членов высших порядков по кривизне в четырехмерном случае начались с работ Ланцоза [19] 1932 и 1938 гг. Далее, в 1958 г. Стивенсон [20] и вслед за ним в 1959 г. Хиггс¹⁾ [21] рассмотрели действия, состоящие из квадратов скалярной кривизны, тензоров Риччи или Римана. В работе [21] было отмечено, что все лагранжианы инвариантны относительно преобразования Вейля. Он показал, что при наличии квадратов скалярной кривизны и тензора Риччи в лагранжиане, уравнения поля сводятся к уравнениям, аналогичным уравнениям Эйнштейна с космологической постоянной в новой метрике. Второй набор уравнений характеризует связь старой и новой метрик. Решив эти уравнения, можно найти функцию перехода (калибровочную функцию). Для случая квадрата тензора Римана такого преобразования найдено не было. Это была первая попытка расширить гравитацию с помощью метрических членов высших порядков по кривизне.

Важный шаг в поиске путей модификации действия общей теории относительности в произвольном числе измерений был сделан в 1971 г. благодаря работам Лавлока [22]. Он обобщил требования к действию для гравитации, являющемуся суммой членов высших порядков по кривизне. Эти требования формулируются следующим образом:

1. действие представляет собой сумму членов высших порядков по кривизне;

2. сохраняется общая ковариантность теории;

3. полевые уравнения являются уравнениями второго порядка.

При выполнении этих требований лагранжиан будет представлять собой сумму эйлеровых характеристик. Таким образом, наиболее общий вид лагранжиана, не создающего дополнительных нефизических решений в гравитации, следующий [23]:

$$L = \sqrt{-g} (R - 2\Lambda + \alpha_2 S_2 + \alpha_3 S_3 + \dots). \quad (1)$$

Здесь g — детерминант метрического тензора, R — скалярная кривизна, Λ — космологическая постоянная, α_i — константы связи при соответствующих порядках, S_2 — эйлерова характеристика второго порядка, т. е. топологический инвариант — член Гаусса–Бонне S_{GB} , имеющий вид

$$S_{GB} = R_{ijkl}R^{ijkl} - 4R_{ij}R^{ij} + R^2, \quad (2)$$

S_3 — эйлерова характеристика третьего порядка.

В последние десятилетия одним из популярных направлений теоретического анализа стало изучение новых физических явлений в четырехмерной теории, являющейся низкоэнергетическим эффективным пределом теории суперструн с поправками высших порядков по кривизне, имеющими, независимо от общей формы действия (1) вид²⁾

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} [-R + 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - e^{-2\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \lambda e^{-2\phi} S_{GB} + \dots]. \quad (3)$$

Здесь ϕ — дилатонное поле, $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ — электромагнитное (максвелловское) поле, а λ — константа связи теории струн. Именно четырехмерные решения этой теории будут обсуждаться нами в разд. 2 настоящей работы. Важность рассмотрения классических решений определяется тем фактом, что в областях пространства-времени с малой кривизной именно классическое решение дает основной вклад в общую структуру пространства-времени [15]. Конечно, в случае достаточно большой кривизны квантовые поправки могут существенно изменить свойства пространства.

Обычно рассмотрение ограничивается поправкой второго порядка по кривизне — членом Гаусса–Бонне. В этом приближении был найден ряд интересных решений [4, 16–18], описывающих области

¹⁾ Здесь необходимо отметить, что в те годы еще не было прямой необходимости в модификации общей теории относительности, это были попытки просто «выйти за рамки» и посмотреть, что будет, если немного расширить геометрическую формулировку теории.

²⁾ Именно поэтому развитие теории суперструн и ее низкоэнергетического эффективного предела возродило интерес к гравитации Лавлока.

вне и внутри черной дыры. При этом поведение решения внутри горизонта интересно, прежде всего, с точки зрения возможности построения общей квантовой теории гравитации. Конечно, в рамках теории относительности внутренняя область черной дыры для нас недоступна. Однако математическое продолжение решений под горизонт позволяет выявить граничные случаи с нетривиальной топологией, которые могут реализоваться и наблюдаться в нашей Вселенной. Именно рассмотрению возможности такого экспериментального поиска посвящена настоящая работа.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 представлены существующие решения для случая четырехмерной невращающейся черной дыры. Раздел 3 посвящен поиску ограничения на минимальную массу черной дыры в гравитации Гаусса–Боннэ, а разд. 4 — рассмотрению модели испарения черных дыр Гаусса–Боннэ и возможности их экспериментальной регистрации. В разд. 5 рассматриваются PPN параметры модели Гаусса–Боннэ в рамках пост-ньютоновского формализма. Раздел 6 посвящен случаю многомерных невращающихся черных дыр, возможной связи с физикой высоких энергий и работающему ускорителю БАК, а разд. 7 — случаю многомерных вращающихся черных дыр. В разд. 8 приведены выводы.

Везде, где это не оговорено особо, мы пользуемся системой единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

2. РЕШЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ НЕВРАЩАЮЩИХСЯ ЧЕРНЫХ ДЫР

2.1. Базовые решения

Одним из первых решений струнной гравитации с поправками в виде члена Янга–Миллса, которое впоследствии послужило «базовым» для моделей с поправками по кривизне, является решение Гиббонса–Маеды–Гарфинкла–Горовица–Стромингера (ГМ–ГГС) [24]. Поскольку рассмотренное решение должно быть сферически-симметричным, была выбрана наиболее общая метрика (являющаяся основой для всего дальнейшего изложения):

$$ds^2 = \Delta(r) dt^2 + \frac{\sigma(r)^2}{\Delta(r)^2} dr^2 - f(r)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4)$$

где метрические функции Δ , f и σ зависят только от радиальной координаты r . Для тензора Максвелла выбран анзац вида

$$F = q \sin \theta d\theta \wedge d\varphi,$$

где q — магнитный заряд. Решение было получено аналитически:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r \left(r - \frac{q^2 e^{2\phi_0}}{M}\right) d\Omega, \quad (5)$$

$$\exp(-2\phi) = \exp(-2\phi_0) - \frac{q^2}{Mr}, \quad (6)$$

$$F = q \sin \theta d\theta \wedge d\varphi, \quad (7)$$

где ϕ_0 — асимптотическое значение дилатонного поля на бесконечности. Решение с электрическим зарядом может быть получено путем поворота в пространстве зарядов.

Теории гравитации с поправками вида $f(R)$ представляют интересную альтернативу моделям с космологической постоянной (темной энергией). Ускоренное расширение Вселенной описывается с помощью таких комбинаций метрических членов, как, например, $\ln R$ или $1/R$, имеющих геометрическую природу [25]. Поправки подобного рода (логарифмические или с отрицательными степенями) становятся существенными в тех областях, где значение кривизны мало. Разложения по положительным или отрицательным степеням кривизны (тензоров Риччи, Римана и их комбинаций) не противоречат современным астрофизическим данным или точным измерениям в нашей Солнечной системе. Необходимо также отметить, что модели с разложением по степеням кривизны могут адекватно описывать Вселенную с доминированием материи и переход от расширения к сжатию и наоборот. Таким образом, модели гравитации с поправками в виде рядов по степеням скалярной кривизны или тензоров кривизны могут рассматриваться как альтернатива моделям ОТО с космологической постоянной.

Основной идеей предложенного подхода является существование ряда по кривизне, в который входят члены как с положительными, так и с отрицательными степенями R . В зависимости от типа задачи какие-то члены становятся существенными, а какими-то, напротив, можно пренебречь. В работе

[26] предложена схема, следуя которой, можно восстановить лагранжиан для любого вида космологического решения. В этой работе также показано, что физически интересные результаты получатся, если добавить в уравнения Эйнштейна члены, описывающие обычную материю. В этом случае можно воспроизвести результаты модели холодной темной материи с лямбда-членом (Λ-ХТМ). В работе [26] также отмечено, что результаты предложенной модели согласуются с данными трехлетней работы космического аппарата WMAP.

Далее, если рассматривать теорию суперструн как единую теорию всех четырех видов физических взаимодействий, включая гравитацию, базовым значением (нулевым порядком) такого разложения должен быть хорошо известный лагранжиан теории относительности, а последующие члены будут поправками по кривизне, представленными в действии (1). Именно наличие этого ряда является основной причиной интереса к гравитации Лавлока, моделям с рядами по степеням R , R_{ij} , которые, таким образом, приобретают фундаментальную основу.

2.2. Невращающаяся незаряженная черная дыра Гаусса – Боннэ

2.2.1. Пертурбативные решения

В 1993 г. Миньями и Стюарт [27] рассмотрели заряженную дилатонную черную дыру, причем в эффективном действии были учтены и члены Янга–Миллса, и поправки второго порядка по кривизне в виде произведения члена Гаусса–Боннэ на дилатонный фактор. Решение было получено методом последовательных приближений по малому параметру $\alpha' \ll 1$.

Отдельно был рассмотрен случай нейтрального решения с $F_{\mu\nu} = 0$. Помимо связи с теорией струн, он интересен как пример нетривиальных скалярных волос в связи с теоремой Уиллера об их отсутствии [28, 29].

Цель нашего рассмотрения — поиск сферически-симметричных решений, имеющих горизонт событий. Стартовой точкой приближения является решение Шварцшильда (при $\phi_0 = 0$). После ряда вычислений статическая сферически-симметричная метрика может быть записана в виде

$$ds^2 = -e^{2\nu(r)} dt^2 + e^{2\mu(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (8)$$

где метрические функции разлагаются в ряды:

$$\nu(r) = \nu_0 + (\alpha')^2 \tau(r), \quad (9)$$

$$\mu(r) = \mu_0 + (\alpha')^2 \sigma(r), \quad (10)$$

а

$$e^{2\nu_0} = e^{-2\mu_0} = 1 - 2m/r,$$

с учетом отсутствия поправок к метрическим функциям порядка α' . Входящие в эти разложения функции σ и τ имеют вид

$$\sigma(r) = \frac{1}{2m^4} \left[\frac{49}{40} \frac{m}{r} + \frac{29}{20} \frac{m^2}{r^2} + \frac{19}{10} \frac{m^3}{r^3} - \frac{203}{15} \frac{m^4}{r^4} - \frac{463}{15} \frac{m^5}{r^5} - \frac{184}{3} \frac{m^6}{r^6} \right], \quad (11)$$

$$\tau(r) = \frac{1}{2m^4} \left[\frac{49}{40} \frac{m}{r} + \frac{49}{20} \frac{m^2}{r^2} + \frac{137}{30} \frac{m^3}{r^3} + \frac{7}{15} \frac{m^4}{r^4} - \frac{52}{15} \frac{m^5}{r^5} - \frac{40}{3} \frac{m^6}{r^6} \right]. \quad (12)$$

Постоянная интегрирования в (11) выбрана так, чтобы функция σ была непрерывна на горизонте $r = 2m$.

2.2.2. Численные решения и структура метрики

В 1996 г. в работе Канти и др. [16] численно было найдено решение типа «черная дыра» в четырехмерной эффективной струнной гравитации с квадратичными поправками в виде члена Гаусса–Боннэ (3). Как уже было показано [27], решение типа «черная дыра» существует и обладает нетривиальными дилатонными «волосами». В работе [16] с помощью невозмущенных численных методов было получено решение вне горизонта. Однако вопрос о поведении решения под горизонтом оставался открытым. Как было показано в работах [30, 31], полученные решения устойчивы относительно линейных возмущений во всех особых точках.

В 1997 г. авторами работы [1], независимо от авторов [16], было получено решение во всех областях, в том числе и описывающее внутреннюю структуру черной дыры в модели с действием (3). Решение было получено в калибровке кривизны $f(r) = r$ в метрике (4). После подстановки выражений для скалярной кривизны R и члена Гаусса–Боннэ S_{GB} в действие (3) и интегрирования получившегося выражения по частям и по угловым координатам можно получить полевые уравнения, которые в матричной форме имеют вид

$$a_{i1} \Delta'' + a_{i2} \sigma' + a_{i3} \phi'' = b_i, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= 0, \\
 a_{12} &= -r\sigma^2 + 4e^{-2\phi}\lambda\phi'(\sigma^2 - 3\Delta), \\
 a_{13} &= 4e^{-2\phi}\lambda\sigma(\Delta - \sigma^2), \\
 a_{21} &= \sigma^3r + 4e^{-2\phi}\lambda\phi'2\Delta'\sigma, \\
 a_{22} &= -\sigma^2\Delta'r - 2m_{Pl}^2\sigma^2\Delta - 4e^{-2\phi}\lambda\phi'6\Delta\Delta', \\
 a_{23} &= 4e^{-2\phi}\lambda\sigma\Delta\Delta', \\
 a_{31} &= 4e^{-2\phi}\lambda(\Delta - \sigma^2), \\
 a_{32} &= 2\sigma^2\Delta r^2\phi' - 4e^{-2\phi}\lambda\Delta'(\sigma^2 - 3\Delta), \\
 a_{33} &= -2\Delta\sigma^3r^2, \\
 b_1 &= -\sigma^3r^2\phi^2 + 4e^{-2\phi}\lambda\sigma(\Delta - \sigma^2)2(\phi')^2, \\
 b_2 &= -2\sigma^32(\Delta' + \Delta r) + 4e^{-2\phi}\lambda2\phi'\Delta'\sigma(2\Delta\phi' - \Delta'), \\
 b_3 &= 2\sigma^3\phi'r(\Delta'r + 2\Delta) - 4e^{-2\phi}\lambda(\Delta')^2\sigma.
 \end{aligned}$$

Поведение решения (13) вблизи горизонта описывается асимптотическими рядами. Ряд для функции Δ имеет вид

$$\Delta = d_1(r - r_h) + d_2(r - r_h)^2 + O((r - r_h)^3), \quad (14)$$

$r - r_h \ll 1.$

Ряды для σ и ϕ записываются аналогично.

Путем подстановки этих рядов в систему получаются рекуррентные соотношения между коэффициентами разложения. Решение было получено путем предложенного в [1] метода численного интегрирования по дополнительному параметру. Решение приведено на рис. 1³⁾. Оказалось, что поведение метрических функций Δ и σ и дилатонного поля ϕ вне горизонта имеет обычный характер, не отличается от найденного в работах [16, 27] и выглядит как стандартное решение Шварцшильда. В области под горизонтом (при $r < r_h$) решение существует только до сингулярности в точке $r = r_s$. Другая ветвь решения начинается в $r = r_s$ и существует только до внутреннего горизонта r_x , т. е. не является физической. Асимптотическое поведение метрических функций Δ и σ и дилатонного поля ϕ вблизи сингулярной поверхности $r = r_s$ имеет вид

$$\Delta = d_s + d_2(\sqrt{r - r_s})^4 + O((\sqrt{r - r_s})^2), \quad (15)$$

³⁾ В настоящей работе радиальная координата r и связанные с ней переменные r_h и M измеряются в условных единицах. Данная условная единица имеет по величине порядок планковской длины, но может от нее отличаться ввиду наличия пока неопределенных свободных параметров модели, таких, например, как λ или ϕ_h .

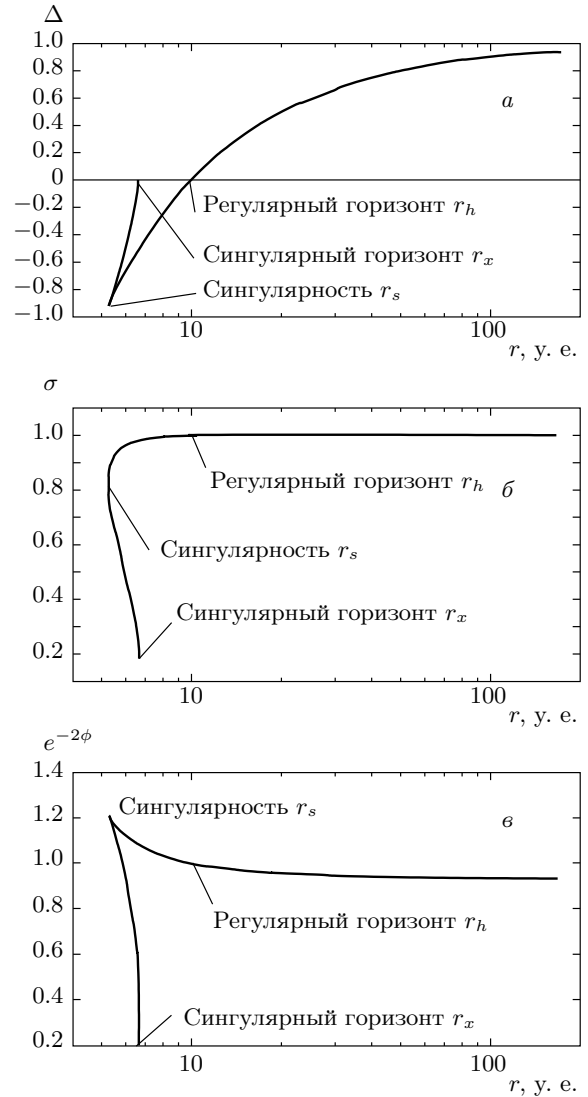


Рис. 1. Зависимости метрических функций Δ (а) и σ (б) и дилатонной экспоненты $\exp(-2\phi)$ (в) от радиальной координаты r при r_h равном 10.0 у. е.

$$f = f_s + f_{s2}(\sqrt{r - r_s})^2 + f_{s3}(\sqrt{r - r_s})^3 + O((\sqrt{r - r_s})^3), \quad (16)$$

$$\phi = \phi_s + \phi_1((\sqrt{r - r_s})^2) + O((\sqrt{r - r_s})^2), \quad (17)$$

где малый параметр $r - r_s \ll 1$. Величины σ_s , ϕ_s и r_s трактуются как свободные параметры. Другие коэффициенты разложения (d_s , f_2 , d_2/r_2) могут быть вычислены с помощью рекуррентных соотношений.

Инвариант кривизны $R_{ijkl}R^{ijkl}$ в рассматриваемых координатах имеет вид

$$\begin{aligned}
 R_{ijkl}R^{ijkl} &= 4\frac{\Delta^2}{\sigma^4 r^4} + 8\frac{\Delta^2(\sigma')^2}{\sigma^6 r^2} - 8\frac{\Delta}{\sigma^2 r^4} - \\
 &- 8\frac{\Delta\Delta'\sigma'}{\sigma^5 r^2} + \frac{(\Delta'')^2}{\sigma^4} + 4\frac{(\Delta')^2}{\sigma^4 r^2} - \\
 &- 2\frac{\Delta''\Delta'\sigma'}{\sigma^5} + \frac{(\Delta')^2(\sigma')^2}{\sigma^6} + \frac{4}{r^4} \approx \\
 &\approx (r - r_s)^{-1} \rightarrow \infty. \quad (18)
 \end{aligned}$$

В соответствии с классификацией из работы [32], r_s является «чисто скалярной сингулярностью», хотя и очень слабой и интегрируемой. В окрестности точки $r = r_s$ выполняются все (сильное, слабое и энергодоминантности) энергетические условия [33].

Интересным результатом оказалось существование второй ветви решения с внутренним «сингулярным» горизонтом r_x . Асимптотическое поведение метрических функций Δ и σ и дилатонного поля ϕ вблизи r_x имеет вид

$$\begin{aligned}
 \Delta &= d_2(\sqrt{r - r_x})^2 + d_3(\sqrt{r - r_x})^3 + \\
 &+ O((\sqrt{r - r_x})^3), \\
 f &= f_x + f_{x1}\sqrt{r - r_x} + f_{x2}(\sqrt{r - r_x})^2 + \\
 &+ O((\sqrt{r - r_x})^2), \quad (19) \\
 \phi &= \phi_x + \phi_2(\sqrt{r - r_x})^2 + \phi_3(\sqrt{r - r_x})^3 + \\
 &+ O((\sqrt{r - r_x})^3),
 \end{aligned}$$

где $x = r_x - r \ll 1$, а свободными параметрами считаются $\sigma_0, \sigma_1, \phi_0 = \exp(-2\phi_x), d_1$ и r_x . Другие коэффициенты находятся из условий

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \frac{m_{Pl}^2[d_1(1 + r_x) - \sigma_0^2]}{4\phi_0\lambda d_1}, \\
 \phi_2 &= \frac{-m_{Pl}^2 r_x \sigma_1 + 4\phi_0 \lambda \phi_1 \sigma_1}{6\phi_0 \lambda \sigma_0}, \quad (20) \\
 d_2 &= \frac{2}{3} \frac{d_1 \sigma_1}{\sigma_0}.
 \end{aligned}$$

Значение инварианта кривизны ведет себя как

$$R_{ijkl}R^{ijkl} \propto (r - r_x)^{-5} + O(x^{1/2}) \rightarrow \infty, \quad (21)$$

а это значит, что r_x — сингулярность. «Расстояние» между r_x и r_h достаточно велико для массивных черных дыр (не планковского масштаба) и уменьшается с уменьшением r_h . Когда все особые точки сливаются воедино, т. е. $r_h = r_s = r_x$, получается граничный случай, определяющий предел существования горизонта, а значит, и самого решения типа «черная дыра».

Полученное решение устойчиво относительно возмущений начальных условий. Эти решения

имеют невозмущенную природу, поскольку остаются адекватными при любом наборе значений параметров.

Значения метрических функций вблизи предельного случая $r_h = r_{hmin}$ могут быть приближенно заданы с помощью соотношений:

$$\begin{aligned}
 \Delta &= 1 - \frac{r_h}{r}, \\
 \sigma &= 1 - \frac{s_h}{r^8}, \quad (22)
 \end{aligned}$$

где $s_h = s(r_h)$. Минимальные значения размера предельной черной дыры можно получить аналитически, рассматривая случай, в котором для детерминанта

$$D_{main} = \Delta [A\Delta^2 + B\Delta + C] \quad (23)$$

выполняется соотношение

$$\Delta = 0, \quad C \neq 0. \quad (24)$$

Тогда, полагая без потери общности, что $\phi_\infty = 0$, получаем для точной нижней границы значений размера горизонта [3]

$$r_h^{inf} = \sqrt{\lambda} \sqrt{4\sqrt{6}}. \quad (25)$$

Аналогичное выражение было рассмотрено в работе [16]. При наличии заряда $|q| > 0$ такое ограничение уже не действует и размер горизонта может принимать любое значение в интервале $[0 \dots \infty)$. Следовательно, точка r_{hmin} представляет собой горизонт и сингулярность в одной и той же точке. Ввиду того, что параметр λ является комбинацией фундаментальных струнных постоянных, выражение (25) можно интерпретировать как ограничение на минимальный размер (массу) черной дыры в рамках данной модели. Это ограничение проявляется при наличии поправок второго порядка по кривизне и отсутствует в минимальной гравитации Эйнштейна – Шварцшильда.

2.3. Невращающаяся заряженная черная дыра Гаусса – Боннэ

Результаты предыдущего рассмотрения естественным образом обобщаются добавлением тензора Максвелла в действие (3). Снова мы будем искать статические, сферически-симметричные решения, поэтому метрику выбираем в виде (4) в ГГС-калибровке ($\sigma = 1$). В этом случае для тензора Максвелла $F_{\mu\nu}$ наиболее удобным будет следующее представление (анзац):

$$F = q \sin \theta d\theta \wedge d\varphi$$

(см. [24]). Соответствующие уравнения поля имеют вид

$$a_{i1}\Delta'' + a_{i2}f'' + a_{i3}\phi'' = b_i, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0, \\ a_{12} &= f + 4e^{-2\phi}\lambda\phi'2\Delta f', \\ a_{13} &= 4e^{-2\phi}\lambda(\Delta(f')^2 - 1), \\ a_{21} &= f + 4e^{-2\phi}\lambda\phi'2\Delta' f', \\ a_{22} &= 2\Delta + 4e^{-2\phi}\lambda\phi'2\Delta\Delta', \\ a_{23} &= 4e^{-2\phi}\lambda2\Delta\Delta' f', \\ a_{31} &= 4e^{-2\phi}\lambda(\Delta(f')^2 - 1), \\ a_{32} &= 4e^{-2\phi}\lambda2\Delta\Delta' f', \\ a_{33} &= -2\Delta f^2, \\ b_1 &= -f^2(\phi)^2 + 4e^{-2\phi}\lambda2(\phi')^2(\Delta(f')^2 - 1), \\ b_2 &= -2(\Delta' f' + \Delta f(\phi')^2) + \\ &\quad + 4e^{-2\phi}\lambda\phi'\Delta' f'(2\Delta\phi' - \Delta') - 2e^{-2\phi}q^2 f^{-3}, \\ b_3 &= 2\phi' f(\Delta' f + 2\Delta f') - \\ &\quad - 4e^{-2\phi}\lambda(\Delta')^2(f')^2 + 2e^{-2\phi}q^2 f^{-2}. \end{aligned}$$

В данном случае «базовым» является решение ГМ–ГГС (5)–(7) при $\lambda = 0$. Для уравнений (26) оно играет роль асимптотики на бесконечности.

Для решения в максимально широкой области пространства-времени, включая внутреннюю часть, вновь был применен метод интегрирования по независимому параметру. Решение уравнений (26) существует только для некоторых значений магнитного заряда $0 \leq q \leq M\sqrt{2}$. Поведение решения вне регулярного горизонта r_h выглядит таким же, как в случае ГМ–ГГС и совпадает с результатами работ [27, 34] и нашего предыдущего рассмотрения. Поведение решений под регулярным горизонтом r_h зависит от величины магнитного заряда q . Если q достаточно мало, решение принимает вид, соответствующий решению полевых уравнений для действия (3) в отсутствие заряда, потому что вклад от члена с кривизной второго порядка оказывается «сильнее», чем от максвелловского.

Инвариант кривизны $R_{ijkl}R^{ijkl}$ и компоненты тензора энергии-импульса T_0^0 и T_2^2 расходятся вблизи поверхности r_s . Отсюда можно сделать вывод о том, что эта поверхность продолжает оставаться «чисто скалярной сингулярностью» (классификацию сингулярностей можно найти в работах [32, 33]). С увеличением заряда q вклад тензора Максвелла становится значительнее, и при $q = q_{cr}$ поведение решения меняется — точка поворота r_s

исчезает (данное поведение принимается за определение q_{cr}). Когда $q < q_{cr}$, т. е. величина q достаточно мала, во всех особых точках (r_h, r_s, r_x) можно использовать асимптотические разложения для нейтрального решения. При $q > q_{cr}$ главная асимптотически плоская ветвь ($\infty \dots r_h \dots r_s$) и дополнительная нефизичная ветвь ($r_s \dots r_x$) превращаются в единую асимптотически плоскую ветвь, существующую от бесконечности до точки, в которой метрическая функция f становится равной нулю. Функция f и дилатонная экспонента $e^{-2\phi}$ ведут себя так же, как в случае ГМ–ГГС. У метрической функции Δ имеется локальный минимум недалеко от точки, где f обращается в нуль — это отличает описываемое решение от решения в случае ГМ–ГГС.

Массу Арновитта–Десера–Мизнера M и дилатонный заряд D , как и в случае незаряженной черной дыры, можно получить из рядов асимптотического поведения метрических функций Δ и σ и дилатонного поля ϕ на бесконечности:

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - \frac{2M}{r} + O\left(\frac{1}{r}\right), \\ \sigma &= 1 + O\left(\frac{1}{r}\right), \\ \phi &= \phi_\infty - \frac{D}{r} + O\left(\frac{1}{r}\right). \end{aligned} \quad (27)$$

В работе [4] было исследовано влияние магнитного заряда черной дыры на поведение метрических функций и показано, что существует «критическое значение» заряда, по достижении которого максвелловский член начинает вносить больший вклад, чем член Гаусса–Боннэ, а внутренняя сингулярность при $r = r_s$ заменяется гладким локальным минимумом. При этом внимание было сконцентрировано на поведении инварианта кривизны $R_{ijkl}R^{ijkl}$ вблизи этой критической точки и окрестности главной сингулярности в $r = r_x$.

Чтобы определить две метрические функции и функцию, описывающую поле дилатона, требуется три уравнения. В выбранной метрической калибровке квадрат тензора Римана описывается выражением

$$\begin{aligned} R_{ijkl}R^{ijkl} &= \Delta'^2 + 4\Delta'^2 \frac{f'^2}{f^2} + 8\Delta^2 \frac{f''^2}{f^2} + \\ &\quad + 8\Delta\Delta' \frac{f'f''}{f^2} + \frac{4}{f^4} - 8\Delta \frac{f'^2}{f^4} + 4\Delta^2 \frac{f'^4}{f^4}. \end{aligned} \quad (28)$$

Поведение метрических функций Δ и f и дилатонной экспоненты $e^{-2\phi}$ под горизонтом черной дыры сильно зависит от заряда. Если заряд равен нулю или мал, то метрическая функция Δ определена

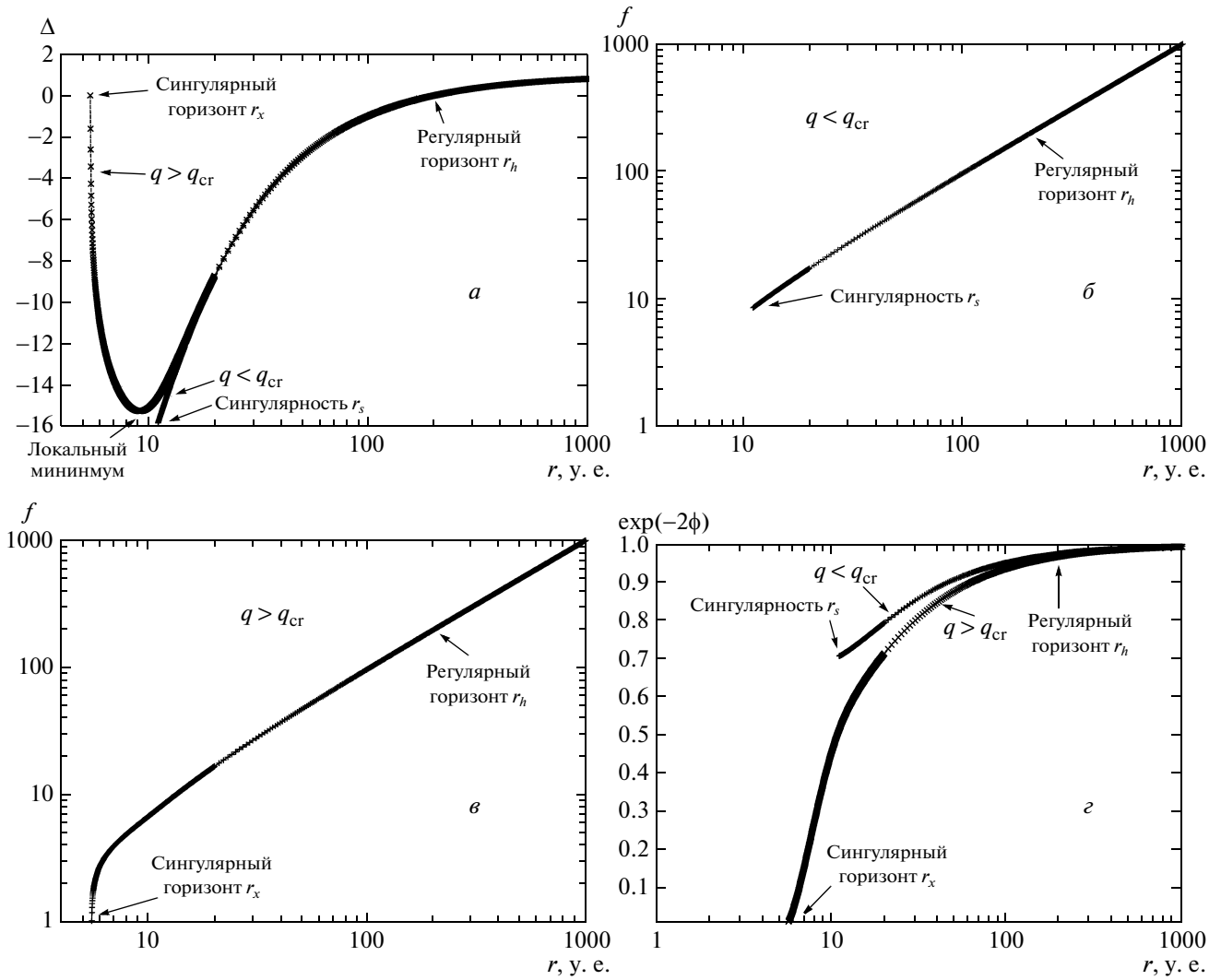


Рис. 2. Зависимости метрических функций Δ (а) и f (б, в), а также дилатонной экспоненты $\exp(-2\phi)$ (г) от радиальной координаты r при $q = 21.50 < q_{cr}$ и $q = 24.81 > q_{cr}$ для $r_h = 200.0$ у. е.

только для $r > r_s$ (r_s тем меньше, чем меньше радиус горизонта r_h) и существуют две ветви решения: физическая (она показана на рис. 2а) на промежутке от $r = r_s$ до бесконечности и нефизическая на промежутке от $r = r_s$ до $r = r_x$. Если величина заряда больше критического значения q_{cr} , то внутренняя сингулярность исчезает и, как показано на рис. 2а (правая кривая), у функции Δ наблюдается локальный минимум. Если увеличивать заряд черной дыры, то при $q = q_{cr}$ происходит фазовый переход, в результате которого внутренняя сингулярность заменяется локальным минимумом функции Δ и формируется внутренний горизонт при $r = r_x$. В этом заключается основное различие между рассмотренным решением и решением в случае ГМ–ГГС.

Поведение метрической функции $f(r)$ (рис. 2б, в) и дилатонной экспоненты $e^{-2\phi(r)}$ (рис. 2г) вне горизонта аналогично их поведению в случае ГМ–ГГС. При $q < q_{cr}$ они монотонно убывают вплоть до r_s . Для больших значений радиальной координаты имеет место зависимость $f(r) \propto r$. Однако при $q > q_{cr}$ они определены в более широком интервале $[r_x, \infty]$. Метрическая функция $f(r)$ и дилатонная экспонента $e^{-2\phi}$ приближаются к своим нулевым значениям вблизи точки $r = r_x$. В результате получается, что вблизи нулевого значения функции f вклады от членов Максвелла и Гаусса–Боннэ становятся несущественными и реализуется обычная гравитация Эйнштейна.

Когда $q < q_{cr}$, инвариант кривизны $R_{ijkl}R^{ijkl}$

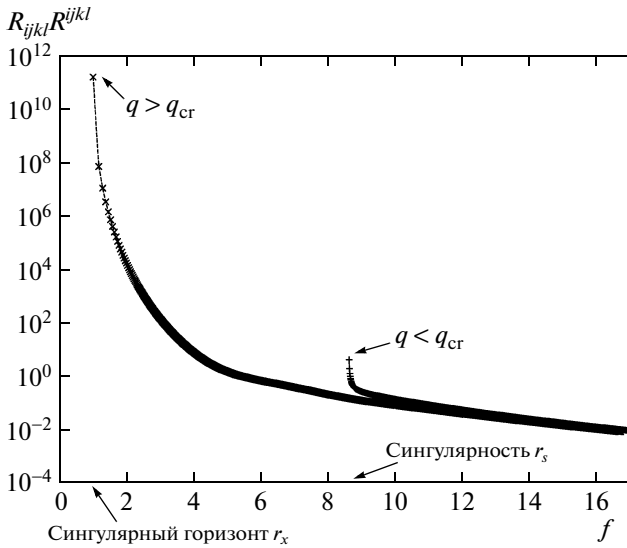


Рис. 3. Зависимость инварианта кривизны $R_{ijkl}R^{ijkl}$ от метрической функции f при $q = 21.50 < q_{cr}$ (правая кривая) и $q = 24.81 > q_{cr}$ (левая кривая) для $r_h = 200.0$ у. е.

под горизонтом черной дыры расходуется при $r \rightarrow r_s$. В случае, когда заряд черной дыры достигает критического значения и у метрической функции Δ появляется локальный минимум вместо сингулярности при $r = r_s$, значение инварианта кривизны в этой точке оказывается конечным и, таким образом, локальный минимум функции Δ уже не является сингулярным.

Когда $q > q_{cr}$ (т. е. когда сингулярность r_s исчезает), особой точкой становится r_x , в которой функция f стремится к нулю. Численные расчеты показали, что в этой точке инвариант кривизны расходится, так что $r = r_x$ становится новым внутренним сингулярным горизонтом черной дыры. Когда $q < q_{cr}$, этот горизонт принадлежит нефизической ветви решения рассмотренной системы уравнений. Когда $q > q_{cr}$ (т. е. вблизи внутреннего сингулярного горизонта r_x), инвариант кривизны возрастает намного быстрее, чем в окрестности сингулярности r_s при $q < q_{cr}$.

На рис. 3 изображена зависимость инварианта кривизны от метрической функции f , которая в выбранной метрике имеет смысл радиуса двусферы. Из рисунка видно, что вблизи упомянутых особых точек инвариант кривизны ведет себя следующим образом:

$$R_{ijkl}R^{ijkl} \propto (r - r_x)^{-5}, \quad q < q_{cr},$$

$$R_{ijkl}R^{ijkl} \propto (r - r_s)^{-1}, \quad q > q_{cr}.$$

Асимптотическое поведение метрической функции f в этих окрестностях можно выразить как [1]

$$f(r \rightarrow r_s) = f_s + f_{s2}(\sqrt{r - r_s})^2 + f_{s3}(\sqrt{r - r_s})^3 + \dots,$$

$$f(r \rightarrow r_x) = f_x + f_{x1}\sqrt{r - r_x} + f_{x2}(\sqrt{r - r_x})^2 + \dots,$$
(29)

где f_i — численные коэффициенты разложения.

Таким образом, возрастание инварианта кривизны в зависимости от метрической функции f имеет вид

$$R_{ijkl}R^{ijkl} \propto \text{const}_1 \cdot (f - f_s)^{-1}, \quad f \rightarrow f_s,$$

$$R_{ijkl}R^{ijkl} \propto \text{const}_2 \cdot (f - f_x)^{-5}, \quad f \rightarrow f_x.$$
(30)

На рис. 4 показаны трехмерные зависимости инварианта кривизны от метрической функции f и заряда q .

3. ОГРАНИЧЕНИЕ НА МИНИМАЛЬНУЮ МАССУ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ В ГРАВИТАЦИИ ГАУССА – БОННЭ

На рис. 5 представлены трехмерные зависимости метрической функции $\Delta(r)$ и дилатонной функции $\exp(-2\phi(r))$ от радиальной координаты r и радиуса горизонта r_h в калибровке кривизны для случая незаряженной черной дыры.

На рис. 6 показаны зависимости метрической функции Δ от радиальной координаты r при различных значениях величины горизонта r_h при $q = 0$. Кривая 1 соответствует случаю больших (по сравнению с планковскими) значений r_h (а именно, $r_h = 30.0$ у. е.). Кривая 2 показывает изменения в поведении $\Delta(r)$ при уменьшении r_h ($r_h = 7.5$ у. е.). Кривая 3 соответствует граничному случаю $r_h = r_{hmin}$, когда все особые точки сливаются и внутренняя структура черной дыры перестает существовать. Кривая 4 соответствует случаю $2M = 1.5r_{pl} \ll r_{min}$, при этом горизонт отсутствует вообще. Для минимального и около минимального значений r_h метрика аппроксимируется соотношениями

$$\Delta = 1 - \frac{r_h}{r},$$

$$\sigma = 1 - \frac{s_h}{r^8},$$
(31)

где $s_h = s_h(r_h)$.

Аналитическая формула для минимального размера черной дыры, полученная в работе [35] из анализа асимптотик на горизонте, имеет вид

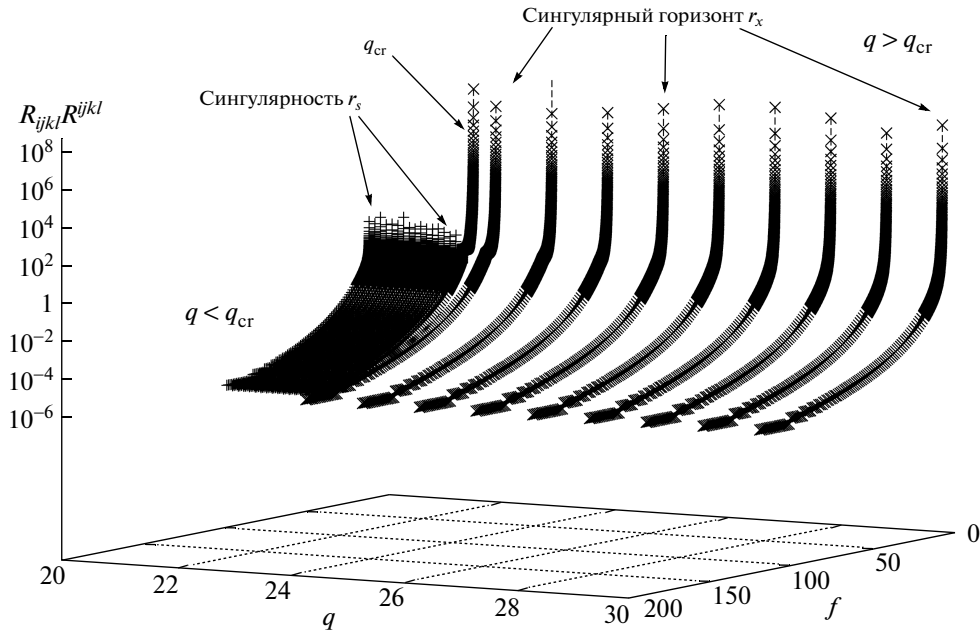


Рис. 4. Трехмерная зависимость инварианта кривизны $R_{ijkl}R^{ijkl}$ от заряда q и метрической функции f для $r_h = 200.0$ у. е.

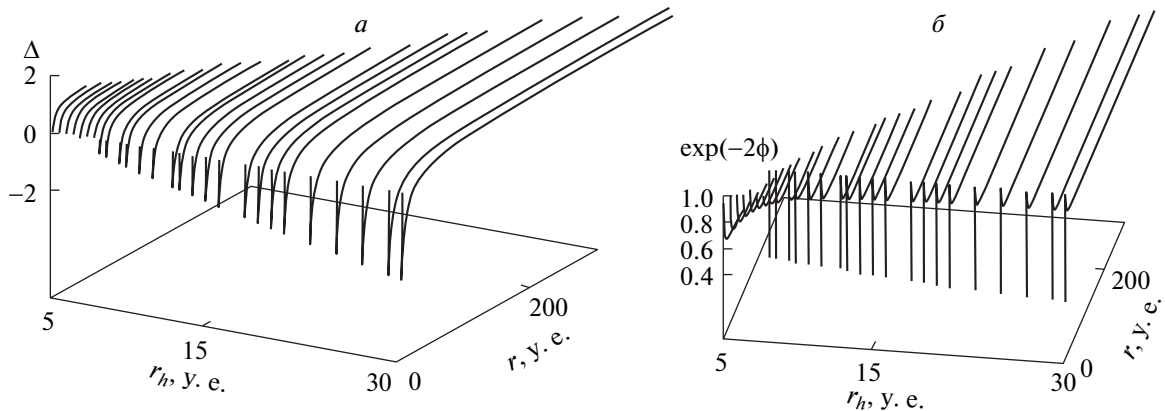


Рис. 5. Трехмерная зависимость метрической функции Δ (а) и дилатонной экспоненты $\exp(-2\phi)$ (б) от радиальной координаты r и радиуса горизонта r_h

$$r_h^{inf} = \sqrt{\lambda} \sqrt{\frac{4\sqrt{6}}{m_{Pl}^2}}. \tag{32}$$

Действительно, вблизи горизонта решение аппроксимируется следующими асимптотическими рядами:

$$\Delta = d_1 x + d_2 x^2 + O(x^2), \tag{33}$$

$$\sigma = s_0 + s_1 x + O(x), \tag{34}$$

$$e^{-2\phi} = \phi_0(1 - 2\phi_1 x + 2(\phi_1^2 - \phi_2)x^2) + O(x^2), \tag{35}$$

где $x = r - r_h \ll 1$. Подставляя выражения (33)–(35)

в уравнения движения (26), получаем рекуррентные соотношения между коэффициентами разложения, которые сводятся к квадратному уравнению относительно коэффициента d_1 :

$$z_1 d_1^2 + z_2 d_1 + z_3 = 0, \tag{36}$$

где

$$\begin{aligned} z_1 &= 24\lambda^2 \phi_0^2, \\ z_2 &= -m_{Pl}^4 r_h^3 s_0^2, \\ z_3 &= m_{Pl}^4 r_h^2 s_0^4. \end{aligned}$$

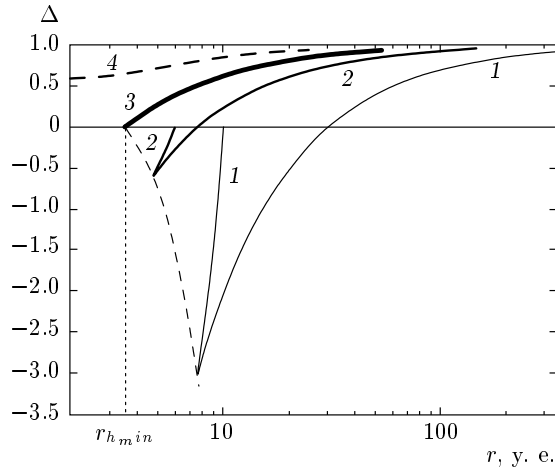


Рис. 6. Зависимость метрической функции Δ от радиальной координаты r при различных значениях радиуса горизонта r_h . Вычисления велись в координатах кривизны при $q = 0$, $r_h = 30.0$ у.е. (1), 7.5 у.е. (2), $r_{h_{min}}$ (3). Кривая 4 соответствует случаю $2M = 1.5r_{Pl} \ll r_{h_{min}}$. Огибающая (5) показывает положение внутренней сингулярности r_s при значениях $r_h \geq r_{h_{min}}$

Решение квадратного уравнения (36) существует, если его дискриминант положителен или равен нулю, т. е. при

$$r_h^2 \geq 2\lambda\phi_0\sqrt{14 + 8\sqrt{3}}.$$

Тогда существуют одна или две ветви, причем одна из них всегда асимптотически плоская. Если $\phi_\infty = 0$ (и, как мы проверили, $1.0 \leq \phi_0 < 2.0$), точная нижняя грань значений горизонта имеет вид (32), что и представляет собой ограничение на минимальную массу черной дыры в струнной гравитации.

Приведенные выше рассуждения означают, что теория струн сама по себе обеспечивает существование ограничения снизу на размер черной дыры, которое можно интерпретировать как последнюю стадию хокинговского испарения первичных черных дыр (т. е. черных дыр, которые появились во время инфляции и в момент создания имели массу не более 10^{15} г). Анализ возможных сценариев и ограничений на них приведен ниже, здесь лишь отметим, что предельные (или околопредельные) черные дыры с околупланковской массой в случае своей устойчивости могут составлять часть темной материи во Вселенной. Так как данная черная дыра является очень

слабо взаимодействующим объектом⁴), необходимо найти способы ее экспериментальной регистрации. Сечение взаимодействия очень мало ($\approx 10^{-66}$ см²), поэтому следует искать непрямые методы.

4. ИСПАРЕНИЕ ЧЕРНЫХ ДЫР ГАУССА – БОННЭ

4.1. Закон испарения

При исследовании финальной стадии испарения черных дыр наличие ограничения на минимальную массу в гравитации Гаусса – Боннэ приводит к нетривиальным следствиям [3].

Все физически интересные процессы происходят вблизи горизонта черной дыры, поэтому можно использовать приближение Вентцеля – Крамерса – Бриллюэна. В случае черных дыр Гаусса – Боннэ была реализована техника, развитая в работах [36, 37] (замечания по этому методу и его критика приведены в конце раздела). Аналогичный метод был развит в работе [38]. Другие методы описания испарения можно найти в работах [39, 40].

В соответствии с [3], метрические функции Δ и σ зависят от радиальной координаты r и массы черной дыры M , т. е. $\Delta = \Delta(M, r)$ и $\sigma = \sigma(M, r)$, поэтому были использованы первые члены асимптотических рядов на горизонте (14) (зависимость от r частично игнорируется). Тогда метрические функции принимают вид

$$\begin{aligned} \Delta(M, r) &= 1 - \frac{2M}{r} \epsilon(M), \\ \sigma(M, r) &= \sigma_0(M), \end{aligned} \tag{37}$$

где $\epsilon(M)$ и $\sigma_0(M)$ — дополнительные поправочные к метрике функции, показывающие отличие поведения метрических функций черной дыры Гаусса – Боннэ от черной дыры Шварцшильда. Аналитические аппроксимационные функции были найдены путем численного интегрирования. Так как в данном случае важны именно последние стадии испарения, где существенно отличие от стандартного сценария Бекенштейна – Хокинга, были использованы ряды Тейлора в окрестности минимальной массы M_{min} . Получена достаточно точная аппроксимация в виде полинома по M (или по $1/M$) и хорошо работающая в диапазоне от $M = M_{min} = 10M_{Pl}$ до примерно $M = 1000M_{Pl}$:

⁴) Согласно неопубликованным расчетам М. Помазанова, такой объект будет без взаимодействия целиком проходить через нейтронную звезду.

$$\begin{aligned} \epsilon &= 1 - \frac{\epsilon_1}{M} - \frac{\epsilon_2}{M^2} + \frac{\epsilon_3}{M^3} - \frac{\epsilon_4}{M^4}, \\ \sigma_0 &= \sigma_2(M - M_{min})^2 - \sigma_3(M - M_{min})^3 + \\ &+ \sigma_4(M - M_{min})^4 - \sigma_5(M - M_{min})^5, \end{aligned} \quad (38)$$

соответствующие коэффициенты приведены в [3].

Основная идея подхода к описанию испарения черных дыр как туннелирования через потенциальный барьер [37] заключается в изменении знака энергии частицы при пересечении ею горизонта. Поэтому пара виртуальных частиц, родившихся в непосредственной близости вне или внутри горизонта, может стать парой реальных частиц с нулевой полной энергией, если одна из частиц протуннелирует в противоположное состояние через потенциальный барьер горизонта. В силу законов сохранения разрешены только переходы между состояниями с одинаковой полной энергией. Используя квантово-механические вычисления, получаем выражение для мнимой части действия для частицы с положительной энергией, пересекающей горизонт изнутри из состояния r_{in} в r_{out} ,

$$\text{Im } S = \text{Im} \int_M^{M-\omega} \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{dr}{\dot{r}} dH, \quad (39)$$

где ω — энергия частицы, а H — полный гамильтониан (т. е. полная энергия системы). Поскольку параметризацию метрики необходимо выбрать так, чтобы избежать координатной сингулярности на горизонте, используем координаты Пенлеве [37]. Переход в эту метрику из координат кривизны возможен при следующей замене временной переменной t :

$$t = t_{old} + r \sqrt{\frac{\sigma^2}{\Delta^2} - \frac{1}{\Delta}}. \quad (40)$$

В результате всех преобразований мнимая часть приводится к виду [3]

$$2 \text{Im } S = \frac{840\pi}{M^2(M - \omega)^2} \alpha, \quad (41)$$

где значение α также приведено в [3].

Используя численные величины для коэффициентов ϵ_i и σ_j вблизи физически реалистичного значения $M_{min} = 10M_{Pl}$, из формулы (37) можно найти приближенное значение для $\text{Im } S$. Поскольку наша основная цель заключается в выявлении особенностей испарения на последних стадиях, когда роль поправок по кривизне существенна, мы рассматриваем предел $M - M_{min} \ll 1$. При этом мы получаем

спектр испарения, отличный от стандартного планковского спектра [41]. С учетом закона сохранения энергии величину ω можно ограничить как

$$0 \leq \omega \leq M - M_{min}. \quad (42)$$

Тогда аппроксимацию выражения для $\text{Im } S$ в зависимости от M и ω для заданного M_{min} можно взять в виде

$$\text{Im } S = k (M - M_{min})^3, \quad (43)$$

где константа $k = 5 \cdot 10^{-4}$. Заметим, что в данном случае мы применили аппроксимацию кубической функцией, наиболее точно описывающей поведение исходного выражения.

Следуя работе [37], спектр излучения в зависимости от спина частиц можно записать как:

$$\frac{d^2 N}{dE dt} = \frac{\Gamma_s}{2\pi\hbar} \frac{\Theta((M - M_{min})c^2 - E)}{e^{\text{Im } S} - (-1)^{2s}}, \quad (44)$$

где $\Gamma_s(M, E)$ — вероятность поглощения частиц со спином s . Функция Хевисайда Θ вводится для учета закона сохранения энергии при массах излучаемых частиц, сравнимых с M_{min} . Поскольку нам необходимо вычислить реальные потоки частиц для оценки возможности регистрации в эксперименте, следует перейти к стандартной системе единиц вместо планковской.

Скорость испарения равна (см. рис. 7)

$$-\frac{dM}{dt} = \int_0^{(M - M_{min})c^2} \frac{d^2 N}{dE dt} \frac{E}{c^2} dE, \quad (45)$$

где верхний предел интегрирования $(M - M_{min})c^2$ вводится для предотвращения достижения запрещенного состояния с массой, меньшей минимальной (т. е. «голой сингулярности»). Вероятности излучения также можно рассматривать в пределе $GME/\hbar c^3 \ll 1$, так как мы изучаем конечную статистику, когда необходимо учитывать обрезание, вносимое наличием минимальной массы M_{min} . Используя формулы из работы [42], разложим $\exp(\text{Im } S)$ в ряд и возьмем первый порядок аппроксимации.

4.2. Спектр и интенсивность испарения

Если учитывать сохранение энергии как простое обрезание спектра излучения абсолютно черного тела, то в уходящем потоке будут преобладать частицы со спином $s = 1/2$, так как «вес» члена ME в

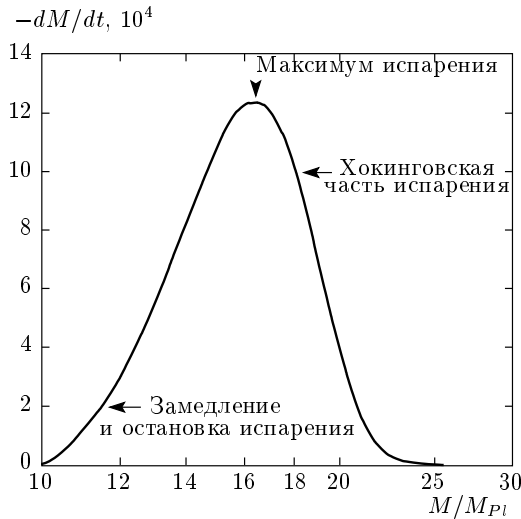


Рис. 7. Максимум скорости испарения черной дыры Гаусса – Боннэ при учете закона сохранения энергии. Правая часть графика — обычный закон испарения Бекенштейна–Хокинга $(-dM/dt) \propto 1/M^2$. Левая часть — замедление и остановка испарения на последних стадиях при подходе к минимальной массе («основному состоянию»)

вероятности излучения будет минимален. Если ограничиться безмассовыми частицами, которые с наибольшей вероятностью будут излучаться при приближении к M_{min} , модификация метрики из-за влияния члена Гаусса–Боннэ изменит тип излучения на последней стадии с нейтрино на фотоны. Реальная скорость испарения будет выше еще в два раза благодаря учету электромагнитных состояний [3].

В случае, когда известна зависимость dM/dt , можно вычислить массу M в заданный момент времени t после появления черной дыры с массой M_{init} :

$$t = \int_M^{M_{init}} \frac{dM}{f(M)} \approx \approx \frac{9\pi k \hbar^5 c^2}{32 G^4 M_{Pl}^3} \frac{1}{M_{min}^4 (M - M_{min})^2}, \quad (46)$$

где доминантным является член, «выживающий» при рассмотрении предела $t \rightarrow \infty$. Результат не зависит от начальной массы M_{init} . Важно подчеркнуть, что время, необходимое для эволюции от M_{init} до нескольких M_{min} , много меньше, чем время, необходимое для эволюции от нескольких M_{min} вниз по массовой шкале ($M_{init} \ll 10^{15}$ г для $t \approx 10^{17}$ с). В момент времени t масса будет равна

$$M \approx M_{min} + \sqrt{\frac{9k\pi\hbar^5 c^2}{8M_{min}^4 G^4 M_{Pl}^3 t}}. \quad (47)$$

Тогда спектр принимает вид

$$\frac{d^2 N}{dE dt} \approx \frac{32}{3\pi} \left(\frac{8}{9\pi}\right)^{3/2} G^{10} \hbar^{-25/2} c^{-15} M_{Pl}^{15/2} M_{min}^{10} \times \times k^{-5/2} t^{3/2} E^4 \Theta \left(\sqrt{\frac{9k\pi\hbar^5 c^6}{8M_{min}^4 G^4 M_{Pl}^3 t}} - E \right), \quad (48)$$

и, следовательно, частота излучения ν равна

$$\nu = \int_0^{(M - M_{min})c^2} \frac{d^2 N}{dE dt} dE \approx \frac{36}{15} \frac{1}{t}. \quad (49)$$

Таким образом, излучение от первичных черных дыр с малыми массами имеет частоту примерно $6 \cdot 10^{-18}$ Гц с типичной энергией порядка $1.8 \cdot 10^{-6}$ эВ. Эта скорость испарения очень мала и соответствует образованию фотонов с длиной волны, много большей собственного размера черной дыры. Заметим, что этот спектр — монотонно возрастающая (вплоть до обрезания) функция энергии ($\propto E^4$).

Нельзя обойти вниманием еще один примечательный факт. В 2008 г. еще раз был детально проанализирован обсуждаемый метод изучения испарения черных дыр [43–45]. Было показано, что трактовка испарения черных дыр как просачивания через барьер горизонта событий может приводить к ошибке в численном коэффициенте закона испарения, по утверждению автора работы [43], в два раза. В связи с этим мы еще раз внимательно проанализировали полученные результаты и пришли к выводу, что поскольку этот численный коэффициент «проходит» через операции интегрирования и дифференцирования без изменений, а при вычислениях используются лишь оценочные значения порядков, на полученные в настоящем разделе результаты и выводы данная возможная неточность не влияет.

Таким образом, оказалось, что решение «черная дыра Гаусса–Боннэ» может служить основой для моделирования последних стадий хокинговского испарения черных дыр, время полного испарения которых меньше, чем время жизни Вселенной. Такие черные дыры с начальной массой меньше 10^{15} г могли образоваться на стадии инфляции (особенно во время вторичного разогрева). Установлено, что картина испарения на последних стадиях не полностью соответствует предложенной ранее Хокингом и Бекенштейном [41]. В рассматриваемой модели в точке, близкой к минимально возможному значению

и составляющей $(10-10^3)M_{Pl}$, интенсивность испарения достигает максимума, причем поток от черной дыры будет значительно больше, чем в стандартной картине Бекенштейна–Хокинга, а затем процесс останавливается. В то же время, с учетом теорий ранней Вселенной, показано, что таких черных дыр не должно быть много. Точнее, в возможном эксперименте, в пересчете на установку, одно событие — вспышка в точке максимума испарения — ожидается раз в 100000 лет. Таким образом, путь поиска черных дыр по продуктам их распадов на последней стадии хокинговского испарения пока нереализуем. При этом вспышки на последних стадиях могут быть частично ответственными за наличие космических лучей сверхвысоких энергий. Здесь стоит отметить, что количество зарегистрированных событий и моделей для их объяснения (см., например, [46]) значительно выросло с момента первичной публикации приведенных в данном разделе результатов.

5. ПОСТ-НЬЮТОНОВСКИЙ ФОРМАЛИЗМ

В разд. 2 обсуждалось получение решения типа «черная дыра», являющегося аналогом метрики Шварцшильда. Поэтому для описания сферически-симметричного распределения вещества вдали от гравитирующего центра допустимо использовать и метрику (4), и геометрию Шварцшильда. В рамках пост-ньютоновского формализма [47–49] можно оценить необходимую точность эксперимента, который сможет «почувствовать» влияние гравитации второго порядка в Солнечной системе.

В калибровке ГГС ($\sigma = 1$) метрика (4) задается выражением

$$ds^2 = \Delta dt^2 - \frac{dr^2}{\Delta} - f d\Omega^2. \quad (50)$$

Установим космологические граничные условия. Считая пространство однородным и изотропным, определим асимптотические значения метрических функций вдали от гравитирующего центра для выбранного момента времени и асимптотической системы координат [47]. В изотропных координатах системы покоя Вселенной с учетом симметрии задачи удобно выбрать динамические переменные в виде

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &\rightarrow g_{\mu\nu}^{(0)} = \text{diag}(c_0, -c_1, -c_1, -c_1), \\ \phi &\rightarrow \phi_0, \\ \Delta &\rightarrow \Delta_0, \\ \sigma &\rightarrow \sigma_0, \end{aligned} \quad (51)$$

а геометрические переменные — в виде $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ и $t = t$ при $\nabla t = (1, 0)$. Метрику $g_{\mu\nu}$ можно считать асимптотически плоской (метрика Минковского), т. е. $c_0 = c_1 = 1$.

Разложим интересующие нас величины в пост-ньютоновские ряды вокруг асимптотических значений:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu}, \\ \phi &= \phi_0 + f, \\ \Delta &= \Delta_0 + d, \\ \sigma &= \sigma_0 + s. \end{aligned} \quad (52)$$

В общем случае порядки пост-ньютоновских возмущений таковы:

$$\begin{aligned} h_{00} &\sim O(2) + O(4), \\ h_{0j} &\sim O(3), \\ h_{ij} &\sim O(2), \\ f &\sim O(2) + O(4). \end{aligned} \quad (53)$$

Отсюда легко получить, что

$$d \sim O(2) + O(4), \quad s \sim O(2) + O(4).$$

После подстановки разложений (53) в изотропическую форму метрики (50) получим

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 - \frac{2M}{\tilde{r}} + \frac{2M(M+D)}{\tilde{r}^2} - \\ &- \frac{(3/2)M(M^2+D^2) + 5M^2D}{\tilde{r}^3} + \\ &+ \frac{M(M^3+D^3) + 7M^2D(M+D)}{\tilde{r}^4}, \\ g_{ij} &= 1 + \frac{2M}{\tilde{r}}. \end{aligned} \quad (54)$$

Сопоставив полученную метрику с метрикой параметризованного пост-ньютоновского формализма, получим значения пост-ньютоновских параметров β и γ :

$$\begin{aligned} \beta &= 1 + \frac{D}{M}, \\ \gamma &= 1. \end{aligned} \quad (55)$$

Таким образом, только параметр β «чувствует» присутствие членов второго порядка по кривизне, и их влияние определяется значением дилатонного заряда D .

6. МНОГОМЕРНЫЕ НЕВРАЩАЮЩИЕСЯ ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ ГАУССА – БОННЭ

6.1. Черные дыры в физике высоких энергий (несбывшиеся надежды)

Любое теоретическое рассмотрение подразумевает возможность прямой или косвенной экспериментальной проверки. В течение последних десяти лет активно обсуждались предположения (на данный момент не оправдавшиеся на уровне энергий в 7 ТэВ [50]), что черные дыры можно получать в экспериментах на современных ускорителях (например, на БАК), если фундаментальная планковская шкала лежит в диапазоне 1 ТэВ, как это имеет место в некоторых моделях с некомпактными дополнительными измерениями [51, 52]. Полагалось, что появившиеся черные дыры можно адекватно описывать при помощи \mathcal{D} -мерных ($\mathcal{D} \geq 5$) обобщенных метрик Шварцшильда или Керра. Хотя на данный момент эти предположения не оправдались, сам подход еще не исчерпал своих возможностей и представляет несомненный интерес.

Идея некомпактности дополнительных измерений [53] является одним из путей решения проблемы иерархии фундаментальных взаимодействий. Основная отличительная особенность моделей такого рода — это положение о том, что только гравитационное взаимодействие может распространяться в дополнительное пространство. Закон Остроградского – Гаусса следующим образом связывает планковский масштаб четырехмерной эффективной низкоэнергетической теории M_{Pl} с фундаментальной планковской шкалой $M_{\mathcal{D}}$ через объем дополнительного пространства $V_{\mathcal{D}-4}$ [53–55]:

$$M_{\mathcal{D}} = \left(\frac{M_{Pl}^2}{V_{\mathcal{D}-4}} \right)^{1/(\mathcal{D}-2)}. \quad (56)$$

Значение $M_{\mathcal{D}} \sim 1$ ТэВ не противоречило экспериментальным данным на момент создания модели (сейчас $M_{\mathcal{D}} > 7$ ТэВ). А ведь речь уже идет о величинах порядка долей миллиметра — в зависимости от радиуса дополнительного пространства (которое предполагается имеющим характерный размер такого же масштаба и плоским в соответствии с идеями модели Аркани – Хамеди – Димопулоса – Двали [53]). Более того, такая величина фундаментальной планковской энергии «уменьшает расстояние» между характерными энергиями электрослабого взаимодействия и суперобъединения. Как показано в работе [53], в пятимерном и шестимерном пространствах

такую локализацию можно построить непротиворечивым образом.

Еще один путь построения гравитации на масштабах 1 ТэВ — изучение свойств геометрии дополнительного пространства модели Рэндалл – Сандрума [56]. Если параметр модели мал по сравнению с размером браны, массы частиц лежат в диапазоне 1 ТэВ (более 7 ТэВ на данный момент), что объясняет проблему иерархии [51, 57]. Расчет эффектов сильных гравитационных полей при рассеянии частиц высоких энергий на бране [58] также представляет значительный интерес.

В рамках обсуждаемых моделей с некомпактными дополнительными измерениями черные дыры могут рождаться на БАК. А именно, два партонa с энергией (в системе центра масс) \sqrt{s} , двигающиеся в противоположных направлениях с прицельным параметром, меньшим радиуса горизонта r_+ , могут сформировать черную дыру с массой $M \approx \sqrt{s}$ с сечением рассеяния порядка $\sigma \approx \pi r_+^2$. Все эти величины, конечно, очень приближительны, так как масса черной дыры может быть лишь частью энергии в системе центра масс, точное ее значение зависит также от размерности пространства и углового момента родившейся черной дыры [59, 60]. Необходимо учитывать и другие возможные каналы. Так как точные значения величин неизвестны, для их оценки применялся квазиклассический анализ эффекта рождения черных дыр. Для вычисления реальной вероятности рождения черных дыр на БАК также необходимо было учитывать, что лишь часть полной энергии в системе центра масс приносится каждым партонem из-за эффектов свечения [52]. Возможны различные каналы взаимодействия [51], поэтому, в зависимости от величины фундаментальной планковской массы, на БАК ожидалось появление миллиардов (!) черных дыр.

Поиск возможных экспериментальных следствий существования черных дыр Гаусса – Боннэ может стать одним из шагов в понимании эффективного предела квантовой гравитации. Использование решения «черная дыра Гаусса – Боннэ» имеет более широкие границы применимости, так как общую теорию относительности можно рассматривать как предел слабого поля и низких энергий для квантовой теории гравитации. Как показано в работе [61], среди поправок по кривизне наиболее важен член Гаусса – Боннэ, моделирующий гравитационные возмущения возле основного состояния. В литературе также отмечалось, что этот член появляется в гетеротических струнах [62, 63] и позволяет локализовать нулевую моду гравитона на бране [64–66]. Член Гаусса –

са-Боннэ успешно применялся и в задачах космологии, например, в исследовании проблемы космологической постоянной [67–74].

6.2. Температуры многомерных черных дыр

Эффективное действие многомерной гравитации имеет вид (см. выражение для действия (1))

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^D x \sqrt{-g} [R + \lambda (R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} - 4R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + R^2) + \dots]. \quad (57)$$

В работах [7–9] было предложено рассмотреть возможность измерения струнной константы связи λ на основании действия (57). Это могло бы стать важным шагом вперед в понимании природы гравитационного поля. Для этого, следуя работе [75], рассмотрим метрику вида

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\alpha} dr^2 + r^2 h_{ij} dx^i dx^j, \quad (58)$$

где ν и α — функции только радиальной переменной r , $h_{ij} dx^i dx^j$ — линейный элемент $(D - 2)$ -мерной гиперповерхности с постоянной кривизной $(D - 2) \times (D - 3)$. Часто рассматривают все три знака кривизны, называя черные дыры общего вида «топологическими» [75]. Мы считаем физическим и поэтому рассматриваем только случай с $k = +1$ [61]. Напомним, что решение «многомерная черная дыра Шварцшильда-Гаусса-Боннэ» имеет вид [61, 75]

$$e^{2\nu} = e^{-2\alpha} = 1 + \frac{r^2}{2\lambda(D-3)(D-4)} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{32\pi^{(3-D)/2} G \lambda (D-3)(D-4) M \Gamma((D-1)/2)}{(D-2)r^{D-1}} \right), \quad (59)$$

причем массу черной дыры M можно выразить через размер ее внешнего горизонта r_+ как

$$M = \frac{(D-2)\pi^{(D-1)/2} r_+^{D-3}}{8\pi G \Gamma((D-1)/2)} \times \left(1 + \frac{\lambda(D-3)(D-4)}{r_+^2} \right), \quad (60)$$

где Γ — гамма-функция. Температура получается из условия отсутствия конической сингулярности на горизонте в евклидовом секторе:

$$T_{BH} = \frac{1}{4\pi} (e^{-2\alpha})' \Big|_{r=r_+} = \frac{(D-3)r_+^2 + (D-5)(D-4)(D-3)\lambda}{4\pi r_+ (r_+^2 + 2\lambda(D-4)(D-3))}. \quad (61)$$

Отношение температур

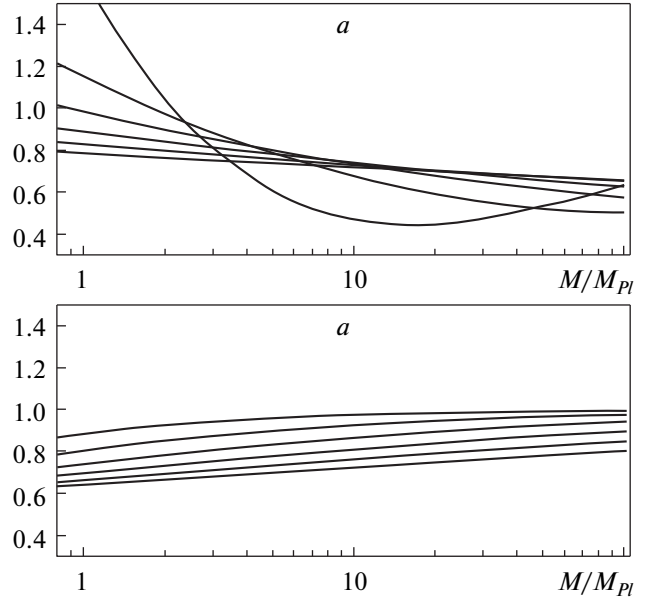


Рис. 8. Зависимости отношения температур черных дыр Шварцшильда и Шварцшильда-Гаусса-Боннэ от массы для $D = 6, 7, 8, 9, 10, 11$ (сверху вниз) при $\lambda = 1 \text{ ТэВ}^{-2}$ (а) и 0.01 ТэВ^{-2} (б)

В случае $D = 5$ решение демонстрирует сингулярное поведение [75] и, в зависимости от величины λ , может стать термодинамически неустойчивым или сформировать ветвь, описывающую устойчивый остаток. Для случая $D > 5$, который является более подходящим для исследования (так как при $D = 5$ возможны нарушения динамики Солнечной системы при стремлении фундаментальной планковской энергии к величине порядка ТэВ), ожидается иной сценарий испарения. На рис. 8 приведены зависимости отношения температур черных дыр Шварцшильда и Шварцшильда-Гаусса-Боннэ от массы для различных значений D и λ , рассчитанные в работах [7–9]. Легко заметить, что разница между приведенными зависимостями весьма существенна (во многих случаях превышает 5%), хотя немонотонное поведение отношения температур делает точное определение типа черной дыры весьма сложным и требует учета всей динамики испарения.

6.3. Испарение черной дыры Шварцшильда-Гаусса-Боннэ

Используя многомерные форм-факторы [76] в пределе высоких энергий, дифференциальный спектр испарения частиц типа i со спином s в

пересчете на единицу времени t и энергии Q можно выписать в следующем виде [71–74]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N_i}{dQ dt} &= \\ &= \frac{4\pi^2 ((D-1)/2)^{2/(D-3)} ((D-1)/(D-3)) Q^2 r_+^2}{e^{Q/T_{BH}} - (-1)^{2s}}. \end{aligned} \quad (62)$$

Приближения такого рода хорошо работают при подстановке точных значений форм-факторов в режиме низких энергий и с учетом того, что нам известны зависимости форм-факторов от размерности пространства-времени и спина испущенной частицы. Как было показано в работе [77], в четырехмерном случае псевдо-осциллирующее поведение форм-факторов делает ошибку малой. В случае пространства-времени с размерностью $D > 5$ радиус горизонта уже нельзя считать функцией только массы черной дыры, поэтому для вычисления интегрального спектра dN_i/dQ необходима следующая замена переменных:

$$\frac{dN_i}{dQ} = \int_{r_{init+}}^0 \left(\frac{dM}{dt} \right)^{-1} \frac{dM}{dr_+} \frac{d^2 N_i}{dQ dt} dr_+, \quad (63)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dr_+} &= \frac{(D-2)\pi^{(D-1)/2} r_+^{D-6}}{8\pi G \Gamma((D-1)/2)} \times \\ &\times [(\mathcal{D}-3)r_+^2 + (\mathcal{D}-5)(\mathcal{D}-4)(\mathcal{D}-3)\lambda], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= -\frac{4\pi^6}{15} \left(\frac{D-1}{2} \right)^{2/(D-3)} \left(\frac{D-1}{D-3} \right) \times \\ &\times r_+^2 T_{BH}^4 \left[\frac{7}{8} N_f + N_b \right], \end{aligned}$$

а N_f и N_b — полное число степеней свободы бозонов и фермионов. Число испущенных частиц N_{tot} можно записать как

$$\begin{aligned} N_{tot} &= \frac{15(D-2)\pi^{(D-9)/2} \zeta(3)}{\Gamma((D-1)/2) G} \frac{(3/4)N_f + N_b}{(7/8)N_f + N_b} \times \\ &\times \left[\frac{r_{init+}^{D-2}}{D-2} + 2(D-3)\lambda r_{init+}^{D-4} \right], \end{aligned}$$

где r_{init+} — начальный размер горизонта черной дыры с массой M_{init} . Отношение числа частиц типа i к полному числу испущенных частиц равно

$$\frac{N_i}{N_{tot}} = \frac{\alpha_s g_i}{(3/4)N_f + N_b},$$

где $\alpha_s = 1$ для бозонов и $\alpha = 3/4$ для фермионов, а g_i — число внутренних степеней свободы рассматриваемых частиц. После подстановки значений оказалось, что для $M_D \sim 1$ ТэВ и $M_{init} \sim 10$ ТэВ среднее число частиц, испущенных черной дырой Шварцшильда–Гаусса–Боннэ, в зависимости от значений λ и D лежит в диапазоне от 25 до 4.7 (см. рис. 9). Эти величины уменьшаются до 5 и 1.05, соответственно, если M_{init} положить равной 2 ТэВ. На рис. 9 показаны полные потоки частиц при различных значениях λ и D . Несмотря на то что некоторые состояния сильно вырождены, величины λ и D можно весьма точно восстановить из результатов экспериментов.

6.4. Практическая возможность измерения струнной константы связи

Для исследования возможности измерения значения фундаментального параметра λ на ускорителе БАК (здесь мы воспроизводим выкладки, впервые изложенные в работах [7–9]) зафиксируем планковскую энергию на значении 1 ТэВ. Незначительные колебания вокруг этого значения не повлияют на наши выводы. В то же время, ее нельзя фиксировать на значительно меньшем значении из-за быстрого падения числа родившихся черных дыр с увеличением M_D . Следуя работе [52], будем рассматривать число образующихся в диапазоне от 1 до 10 ТэВ черных дыр как гистограмму с шириной 500 ГэВ (что много больше разрешения детектора). Влияние члена Гаусса–Боннэ заключается в изменении величины r_+ . Для каждой черной дыры испущенные ею в ходе испарения частицы (см. (62)) выбираются случайным образом с помощью метода Монте-Карло с учетом статистического веса соответствующих степеней свободы. Как показано в работе [78], излучение идет в основном по S -каналу, поэтому моды дополнительного пространства можно не учитывать. Это означает, что испарение целиком идет на брану. Начальный спектр dN_i/dQ сильно искажается дополнительными распадами, поэтому рассматривается только прямое излучение электронов и протонов с энергиями выше 100 ГэВ.

С помощью пакета для расчета взаимодействий адронов Pythia [79] можно показать, что только пренебрежимо малая часть γ -лучей и электронов придет из фонового потока адронов ускорителя, т. е. фон стандартной модели при работе ускорителя, имеющий вид $Z(ee)$ +потоки и γ +потоки, останется много меньшим, чем ожидаемый сигнал от испарения черных дыр.

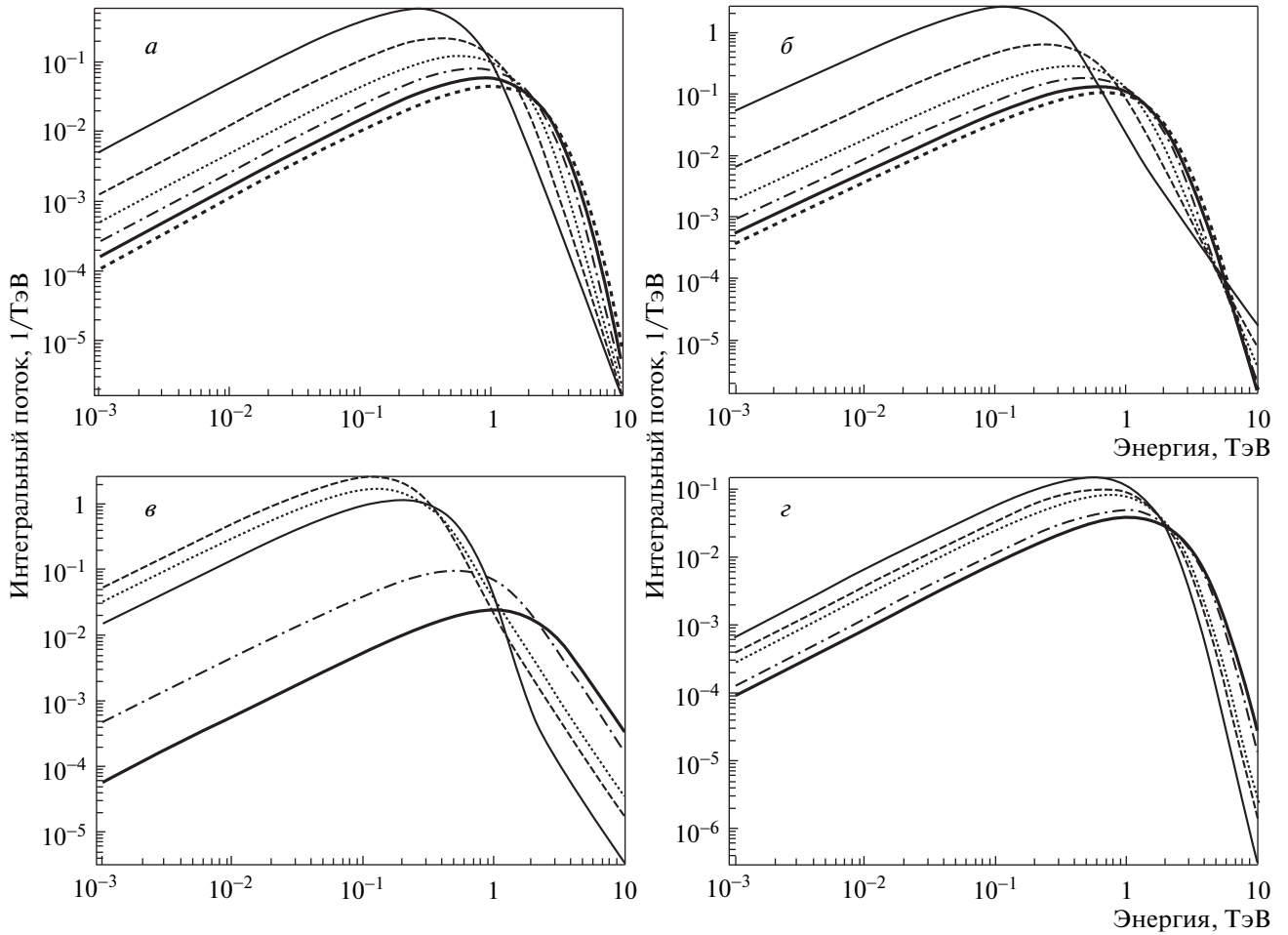


Рис. 9. Зависимости интегрального потока от энергии испущенных частиц при начальной массе черной дыры $M_{init} = 10$ ТэВ. Вверху: $\lambda = 0$ (а) и 0.5 (б), $\mathcal{D} = 6, 7, 8, 9, 10, 11$ (сверху вниз). Внизу: $\mathcal{D} = 6$ (в) и 11 (г), $\lambda = 0.1, 0.5, 1, 5, 10$ ТэВ $^{-2}$ (сверху вниз)

Отличие значения фундаментальной планковской энергии от заданного проявится в размывании получаемых данных. Для каждого события начальная масса черной дыры считалась известной, так как она легко определяется полным спектром взаимодействующих частиц (предполагалась потеря только 5% энергии из-за малого числа степеней свободы нейтрино и гравитонов). Разрешение детектора параметризовано как

$$\sigma E = \sqrt{a^2 E + b^2},$$

где $a \approx 10\% \sqrt{\text{ТэВ}}$ и $b \approx 0.5\%$ [80]. При развитии идей, изложенных в работе [52], также был учтен закон испарения черной дыры и полная аппроксимация для каждого события. После генерации всех частиц случайным образом спектр восстанавливался во всех массовых интервалах и сравнивался с те-

оретическими расчетами. Целью было прояснение возможности воспроизвести значения величин \mathcal{D} и λ , сравнимых с полученными в расчетах. На рис. 10 показана статистическая достоверность χ^2 для каждого реконструированного спектра при двух различных значениях исходных параметров: $\lambda = 1$ ТэВ $^{-2}$, $\mathcal{D} = 10$ (рис. 10а) и $\lambda = 5$ ТэВ $^{-2}$, $\mathcal{D} = 8$ (рис. 10б). На правых диаграммах рис. 10 показаны вероятности рождения черных дыр при соответствующих значениях дополнительного числа измерений \mathcal{D} и константы связи λ .

Заметим, что к полной статистической достоверности χ^2 надо относиться с осторожностью, так как аккуратный статистический анализ требует использования метода Монте-Карло и для моделирования работы детектора.

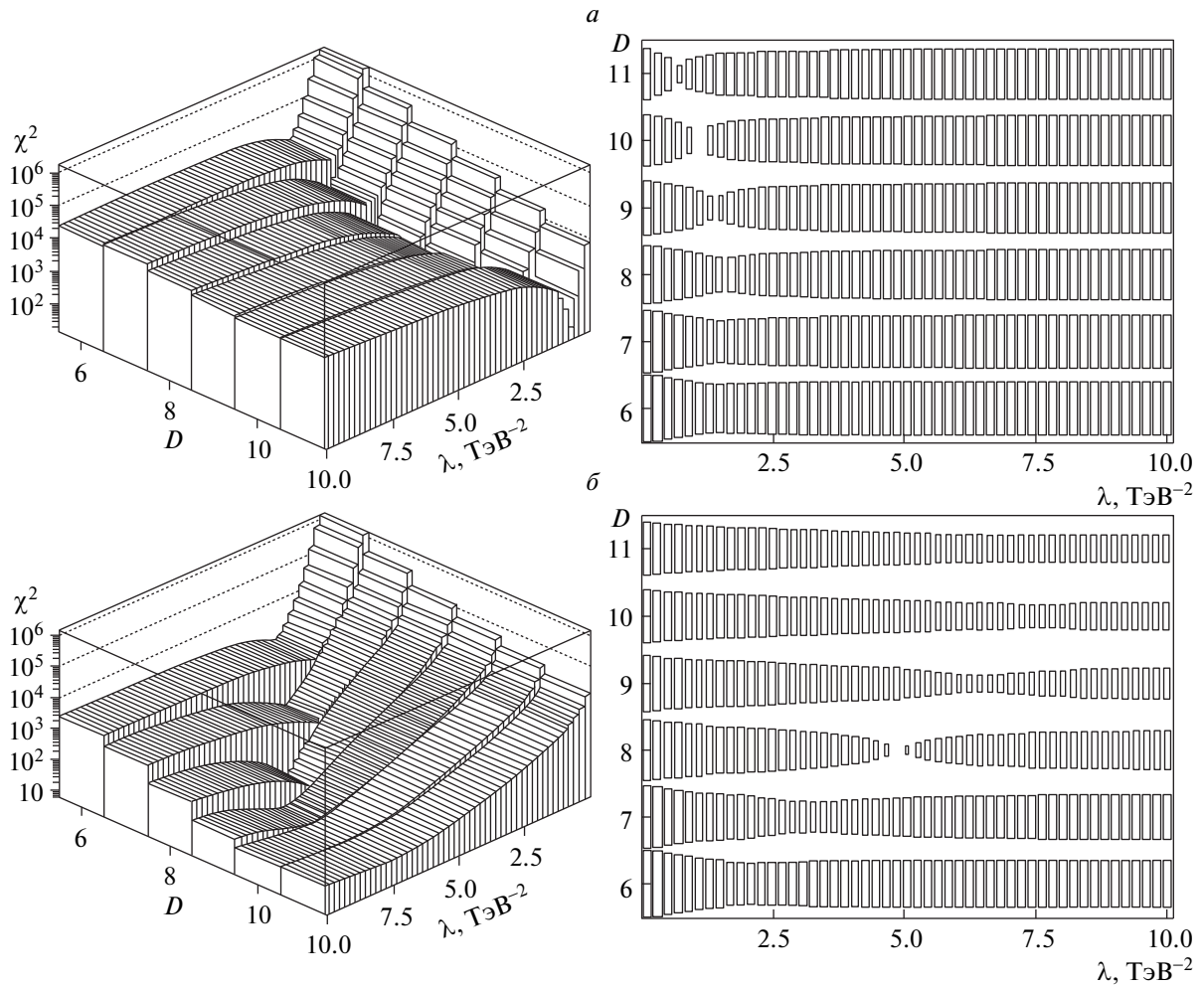


Рис. 10. Статистическая достоверность χ^2 для различных значений исходных параметров: *a* — $\lambda = 1$ ТэВ, $\mathcal{D} = 10$; *б* — $\lambda = 5$ ТэВ, $\mathcal{D} = 8$. На правых диаграммах показаны вероятности рождения черных дыр при соответствующих значениях λ и \mathcal{D}

Из приведенных на рис. 10 результатов видно, что для физически допустимых значений λ (в районе шкалы возможного появления эффектов квантовой гравитации, т.е. в нашем случае — в районе ТэВ^{-2}) по результатам эксперимента можно определить тип родившихся черных дыр. Для каждого набора параметров λ и \mathcal{D} сечение процесса считалось равным

- 1) (πr_+^2) ,
- 2) $(\pi r_+^2/10)$,
- 3) $(\pi r_+^2/100)$,
- 4) $(\pi r_+^2/1000)$

для учета неизвестных процессов при $\mathcal{D} > 4$ с ненулевыми неучтенными параметрами. С использованием методов, предложенных в работе [59], а также гипотезы [60], было проведено несколько расчетов,

подтвердивших неизбежность формирования горизонта при соответствующих значениях λ и \mathcal{D} .

7. МНОГОМЕРНАЯ ЧЕРНАЯ ДЫРА КЕРРА – ГАУССА – БОННЭ

7.1. Вырожденный случай для любого числа дополнительных измерений

В моделях рождения черных дыр в экспериментах при взаимодействиях с высокими энергиями (порядка 1 ТэВ) есть важная особенность. Черная дыра, родившаяся в результате столкновения адронов, с необходимостью должна иметь момент вращения, т.е. должна описываться с помощью расширенных версий метрики Керра. В соответствии с классиче-

скими результатами [81], скорость уменьшения момента вращения при испарении много больше, чем потери массы, так как

$$-\frac{dM}{dt} \propto \frac{1}{M^2},$$

$$-\frac{dJ}{dt} \propto \frac{1}{M},$$

где J — угловой момент. Поэтому вскоре после начала испарения черную дыру можно рассматривать уже как невращающуюся, на чем и основаны выводы многих авторов. Для повышения точности моделирования этих процессов необходимо исследовать свойства метрик, которыми описываются объекты сразу после рождения, т. е. поведение метрики для черной дыры Керра–Гаусса–Боннэ в пространстве-времени с размерностью $\mathcal{D} > 4$. Такие исследования были проведены, их результаты изложены в работах [10–13]. Ввиду математической сложности задачи в общем случае, а также того, что цель состояла в нахождении возможных отличий от метрики и свойств многомерной черной дыры Керра, изначально было получено «вырожденное» решение [10] для всех значений размерности дополнительного пространства. Для частного случая $\mathcal{D} = 5$ [14] была найдена аналитическая версия приближенного решения, которая дала возможность убедиться в правильности полученного ранее численного решения и более точно проверить его термодинамические характеристики. «Вырожденное» решение [10–13] отличается от полной версии наличием только одного момента вращения, как в четырехмерном случае. Стоит заметить, что поскольку существуют $[N_s/2]$ операторов Казимира группы $SO(N)$, где N_s — число пространственных измерений, число моментов аксиально-симметричной метрики равно

$$N_J = \text{Int} \left(\frac{N_s}{2} \right).$$

Наиболее удобным выбором метрики для изучения многомерного решения действия (57) является параметризация Керра–Шильда. Несмотря на некоторую потерю общности, данный формализм выбран по той причине, что при правильном подборе метрических функций одно из уравнений поля, как правило, оказывается обыкновенным дифференциальным уравнением, которое решать значительно проще, проверив систему на совместность. В общем случае уравнения Гильберта–Эйнштейна представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных с не всегда понятной возможностью разделения переменных.

Следуя работе [82], для получения «вырожденной» версии решения Керра–Гаусса–Боннэ метрику удобно параметризовать следующим образом:

$$ds^2 = -(du+dr)^2 + dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + 2a \sin^2 \theta dr d\varphi +$$

$$+ \sin^2 \theta d\varphi^2 + \beta(r, \theta) (du - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 +$$

$$+ r^2 \cos^2 \theta (dx_5^2 + \sin^2 x_5 (dx_6^2 +$$

$$+ \sin^2 x_6 (\dots dx_N^2) \dots), \quad (64)$$

где u — временная координата метрики в виде Керра–Шильда, $\beta(r, \theta)$ — неизвестная функция, описывающая вклад поправок второго порядка по кривизне, $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, a — угловое ускорение черной дыры. Рассматриваемая метрика естественным образом разбивается на сумму двух матриц: четырехмерной метрики Керра и оставшейся диагональной метрики. При помощи такого упрощения можно выявить принципиальный характер поведения решения.

Подставив метрику (64) в уравнения Эйнштейна с космологической постоянной Λ [75], получаем систему уравнений, ur -компонента которых имеет вид

$$(g_2 \beta^2 + g_1 \beta + g_0) + (h_1 \beta + h_0) \frac{d\beta}{dr} = 0. \quad (65)$$

Конкретный вид $h_i = h_i(\mathcal{D}, r, \beta)$ и $g_i = g_i(\mathcal{D}, r, \beta)$ приведен в работе [14].

Уравнение (65) — это обыкновенное дифференциальное уравнение. Решение при всех физически интересных значениях размерности пространства-времени было найдено с помощью численного интегрирования, после чего полученное решение было подставлено в остальные уравнения Эйнштейна для проверки на совместность.

Поведение метрической функции $\beta(r, \theta)$ на бесконечности соответствует обычному многомерному решению Керра [82] (так как член Гаусса–Боннэ не дает преобладающего вклада на бесконечности и выходит на свое асимптотическое поведение быстрее скалярной кривизны). В координатах Бойера–Линквиста метрика имеет вид

$$ds^2 = - dt^2 [1 - \beta^2] +$$

$$+ \left[\frac{r^4 (1 - \beta^2) + a^2 (r^2 + \beta^2 a^2 \cos^4 \theta) + a^2 \beta^2 \rho^2}{\rho^2 (1 - \beta^2)} \right] dr^2 +$$

$$+ \rho^2 d\theta^2 - 2\beta^2 a \sin^2 \theta dt d\varphi +$$

$$+ d\varphi^2 \sin^2 \theta [r^2 + a^2 + \beta^2 a^2 \sin^2 \theta] +$$

$$+ r^2 \cos^2 \theta (dx_5^2 + \cos^2 x_5 (dx_6^2 + \dots)). \quad (66)$$

Из приведенного анализа видно, что решение типа «многомерная вращающаяся черная дыра Гаусса–Боннэ» не содержит каких-либо новых типов

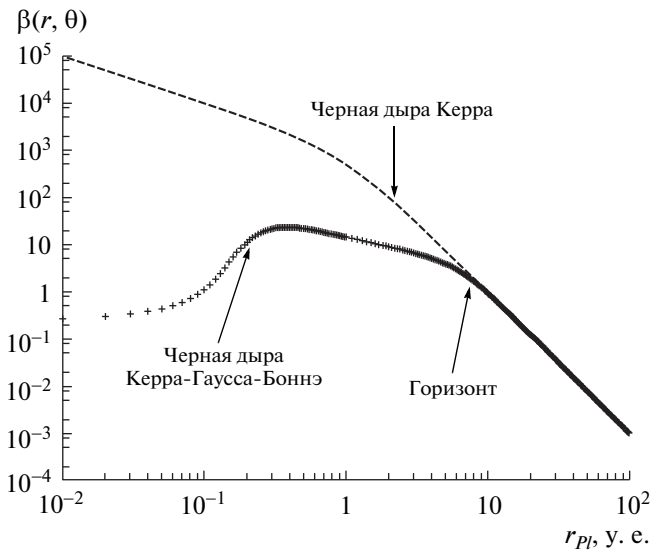


Рис. 11. Зависимость функции $\beta(r, \theta)$ от радиальной координаты r для черных дыр Керра ($\alpha = 0$) и Керра – Гаусса – Боннэ ($\alpha = 1$) при $\mathcal{D} = 6$ и при нулевом значении космологической постоянной

особых точек (как в четырехмерном случае), поэтому отличие поведения обсуждаемого типа черной дыры от стандартного поведения черной дыры Керра будет проявляться в различиях соответствующих параметров (температура, скорость испарения, состав испаряемых частиц). Более того, при сравнении кривых поведения метрической функции $\beta(r, \theta)$ в случаях черных дыр Керра (струнная константа связи $\alpha = 0$) и Керра – Гаусса – Боннэ (струнная константа связи $\alpha = 1$) легко заметить, что до горизонта различий между кривыми нет, т. е., разница в поведении метрики вблизи горизонта минимальна (на рис. 11 приведены зависимости, соответствующие шести пространственно-временным измерениям, при других значениях \mathcal{D} поведение будет аналогичным). Динамика изменения поведения решения в зависимости от значения момента это подтверждает.

Подчеркнем, что температура черной дыры определяется поведением метрики вблизи горизонта, поэтому различие между сценарием испарения двух обсуждаемых черных дыр будет минимальным. Из результатов предыдущего раздела (см., в частности, рис. 8–10) можно видеть, что различие между черными дырами Шварцшильда (Танхерлини) и Шварцшильда – Гаусса – Боннэ уменьшается при увеличении числа пространственно-временных измерений. Таким образом, максимальной эта разница будет

при $\mathcal{D} = 5$. Аналогичная картина наблюдается и в случае решений, содержащих вращение, поэтому оценка разницы температур в случае $\mathcal{D} = 5$ даст верхнюю оценку возможных значений этой величины.

7.2. Пятимерное аналитическое решение

Выпишем полный вариант метрики, в котором должно быть два угловых момента, в сферических координатах в параметризации Керра – Шильда, следуя [83]:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi_1^2 - (r^2 + b^2) \cos^2 \theta d\phi_2^2 - \rho^2 d\theta^2 - 2dr (a \sin^2 \theta d\phi_1 + b \cos^2 \theta d\phi_2) - \beta (dt - dr - a \sin^2 \theta d\phi_1 - b \cos^2 \theta d\phi_2)^2, \quad (67)$$

где

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta,$$

a и b — угловые ускорения, $t, r, \theta, \phi_1, \phi_2$ — координаты.

Рассмотрим $\theta\theta$ -компоненту уравнений Эйнштейна, которую можно представить в виде

$$A\beta'' + B\beta'^2 + C\beta' + D\beta + E = 0, \quad (68)$$

где

$$\begin{aligned} A &= r\rho^2 (4\alpha\beta - \rho^2), \\ B &= 4\alpha r\rho^2, \\ C &= 2 [4\alpha\beta(\rho^2 - r^2) - \rho^2(\rho^2 + r^2)], \\ D &= 2r (2r^2 - 3\rho^2), \\ E &= 2r\Lambda\rho^4. \end{aligned}$$

Решение уравнения (68) с учетом асимптотик на бесконечности можно выписать в виде [14]

$$\beta = \frac{\rho^2 - \sqrt{\rho^4 - 4\alpha M - (2/3)\alpha\Lambda r^2(\rho^2 - r^2)}}{2\alpha}. \quad (69)$$

Следующим шагом является проверка решения (69) на совместность с другими уравнениями Эйнштейна. Аналитическая подстановка полученного решения в другие компоненты уравнений Эйнштейна в нескольких случаях привела не к получению тождественного нуля, а к величине 10^{-8} , причем небольшие колебания значений параметров вблизи решения сразу приводят к возрастанию этой величины как минимум до 10^{-1} . Таким образом, найдено приближенное (с относительной точностью до 10^{-8}) решение. Необходимо еще раз заметить, что оно имеет ту же структуру, что и

точное решение из работы [84]. Решение (69) в предельных случаях воспроизводит известные решения, а именно, в случае $\alpha \rightarrow 0$ — метрику черной дыры Шварцшильда–Гаусса–Боннэ, полученную в работах [61, 75]. На бесконечности воспроизводится результат работы [82].

7.3. Термодинамические свойства решения

Для получения величины радиуса горизонта r_+ необходимо преобразовать метрику и записать ее в координатах Бойера–Линквиста [82]. С учетом того, что термодинамические характеристики определяются поведением метрики в окрестности горизонта, можно разложить полученное решение (69) (как это сделано в работе [14]) по параметру M/ρ^2 , который в окрестности горизонта действительно является малым. Тогда выражение для $\beta(r, \theta)$ примет вид

$$\beta = \frac{M}{\rho^2} + \frac{8M^2\alpha}{\rho^6}. \quad (70)$$

Таким образом, поверхностная гравитация κ имеет вид

$$\kappa = -\frac{1}{4}(1 + \beta) \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} - \frac{(\partial_\theta \beta)^2}{\rho^2} \right), \quad (71)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= (\beta r^2 \cos^2 \theta (a^2 - b^2) - (r^2 + a^2)(r^2 + b^2) + \\ &\quad + \beta r^2 (r^2 + b^2)) (\partial_r \beta)^2, \\ \kappa_2 &= -\cos^2 \theta (a^2 - b^2) + (r^2 + b^2). \end{aligned}$$

Графики зависимостей температуры черных дыр Керра и Керра–Гаусса–Боннэ приведены на рис. 12. Из рисунка видно, что для больших масс зависимости совпадают (чего и следовало ожидать), а при уменьшении размеров черной дыры различие между зависимостями увеличивается (в максимуме не превышая примерно 5%). Поскольку в пятимерном случае получается максимальная разница между температурами черных дыр Керра и Керра–Гаусса–Боннэ, реальное отношение температур будет еще меньше, т.е. на стадии, когда черная дыра еще описывается метрикой типа Керровской, различить черные дыры в эксперименте не представляется возможным. Однако обнадеживает приведенный ранее результат работы [81], заключающийся в том, что черная дыра при испарении очень быстро теряет момент и вскоре может рассматриваться как невращающаяся. Это делает результаты предыдущей главы актуальными, а выводы — более оптимистическими.

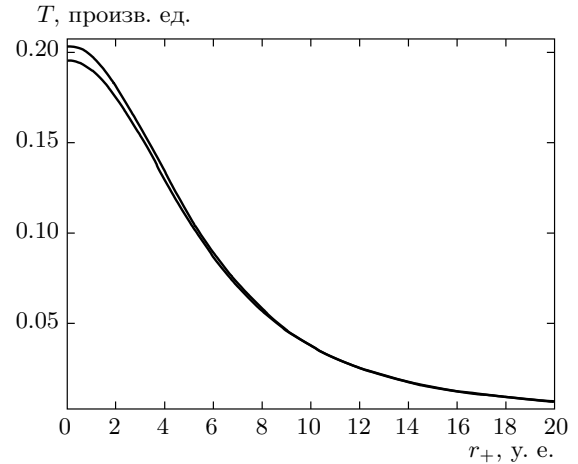


Рис. 12. Зависимости температуры T черных дыр Керра (нижняя кривая, $\lambda = 0$) и Керра–Гаусса–Боннэ (верхняя кривая, $\lambda = 1$) от радиуса горизонта r_+

В более поздней работе [84] было показано, что параметризация Керра–Шильда при рассмотрении многомерных действий с поправками второго порядка по кривизне не является наиболее общим случаем. В работе [84] был найден частный вид метрики Керра–Гаусса–Боннэ для $\mathcal{D} = 5$. Стоит отметить, что найденная метрика содержит большее количество параметров, однако имеет ту же структуру, что и описанная в работе [14]. При этом при сравнении термодинамических свойств с термодинамическими свойствами многомерной черной дыры Керра оказалось, что в [14] был найден приближенный (с относительной точностью 10^{-8}) вид метрики Керра–Гаусса–Боннэ для $\mathcal{D} = 5$.

8. ВЫВОДЫ

Таким образом, в работе продемонстрировано, что модели гравитации с поправками второго порядка по кривизне имеют целый ряд отличительных особенностей.

1. С учетом ограничения на минимальную массу черной дыры, полученного в моделях гравитации с поправкой в виде члена Гаусса–Боннэ, была предложена и развита модель реликтовых остатков (с массой 10^{-5} г) первичных черных дыр. На основе этого ограничения представлена модель испарения черных дыр с модификацией закона испарения на последних стадиях. На основе закона сохранения энергии был разработан механизм остановки испарения на массах $(10-10^3)M_{Pl}$, вычислены характерные

величины энергий излучаемых частиц в точке максимума спектра испарения ($\approx 10^{20}$ эВ) и на стадии остановки процесса ($\approx 10^{-6}$ эВ). Получена теоретическая оценка (одно событие на 100000 лет) частоты событий в экспериментальном поиске первичных черных дыр по продуктам их распада при условии отсутствия противоречий с моделями инфляции.

2. Рассмотрено влияние магнитного заряда на поведение метрических функций под горизонтом черной дыры Гаусса–Боннэ и показано, что существует некоторое «критическое» значение заряда, при котором реализуется ранее нефизическое решение относительно метрических функций и образуется внутренний сингулярный горизонт. Сингулярность, которая накладывала ограничение на минимальную массу черной дыры, в этом случае заменяется гладким локальным минимумом.

3. В модели многомерной гравитации с поправками второго порядка по кривизне в виде члена Гаусса–Боннэ был установлен закон испарения черной дыры, которая могла бы родиться в экспериментах на ускорителях. С учетом характеристик ускорителя БАК показано, что, благодаря 5%-му различию температур, в случае обнаружения черных дыр как объекта, возможно различить типы черных дыр по продуктам их испарения и измерить значение фундаментальной константы теории струн — струнной константы связи.

4. В модели многомерной гравитации с поправками второго порядка по кривизне в виде члена Гаусса–Боннэ было получено решение типа «вращающаяся черная дыра». Решение с одним моментом вращения получено численно для всех значений размерности пространства-времени. Для более точной оценки верхнего предела отношений температур черных дыр Керра и Керра–Гаусса–Боннэ в пятимерной модели найдено приближенное аналитическое решение. Кроме того, было показано, что максимальная разница в оценке температур обсуждаемых решений составляет менее 5%, т. е. различить типы черных дыр по продуктам распада сразу после рождения в эксперименте, когда необходимо учитывать вращение, не представляется возможным.

5. Был рассмотрен вид метрики, используемой для описания черных дыр Гаусса–Боннэ, в пост-ньютоновском формализме. На основании этого было найдено значение главных пост-ньютоновских параметров и показано, что влияние поправок второго порядка по кривизне определяется значением постоянной D , т. е. величиной дилатонного заряда.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям РФ (государственный контракт № 02.740.11.0575).

Авторы выражают благодарность П. И. Дядиной за помощь в подготовке статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. O. Alexeyev and M. V. Pomazanov, *Phys. Rev. D* **55**, 2110 (1997).
2. S. O. Alexeyev, M. V. Sazhin, and M. V. Pomazanov, *Int. J. Mod. Phys. D* **10**, 225 (2001).
3. S. O. Alexeyev and M. V. Sazhin, *Gen. Relativ. Grav.* **30**, 1187 (1998).
4. S. Alexeyev, A. Barrau, and K. Rannu, *Phys. Rev. D* **79**, 067503 (2009).
5. С. О. Алексеев, М. В. Сажин, О. С. Хованская, *Письма в АЖ* **28**, 163 (2002).
6. S. O. Alexeyev, A. Barrau, M. Sazhin et al., *Class. Quant. Grav.* **19**, 4431 (2002).
7. S. Alexeyev, A. Barrau, and J. Grain, *Phys. Lett. B* **584**, 114 (2004).
8. S. Alexeyev, A. Barrau, and J. Grain, *Grav. Cosmol.* **11**, 34 (2005).
9. S. Alexeyev, A. Barrau, and J. Grain, *Труды междунар. конф. «Кварки-2004»*, под ред. Д. Г. Левкова, В. А. Матвеева, В. А. Рубакова; <http://quarks.inr.ac.ru/>.
10. S. Alexeyev, N. Popov, A. Barrau et al., *J. Phys.: Conf. Series* **33**, 343 (2006).
11. S. Alexeyev, N. Popov, A. Barrau et al., *Труды 22-го Техасского симпозиума по релятивистской астрофизике*, Стэнфорд, США (2004).
12. S. O. Alexeyev, N. N. Popov, T. S. Strunina et al., *Труды междунар. конф. «Кварки-2006»*, под ред. В. А. Матвеева, В. А. Рубакова; <http://quarks.inr.ac.ru/>.
13. S. O. Alexeyev and N. N. Popov, in *Proc. Int. Conf. 11th Marcell Grossmann Meeting on General Relativity*, ed. by H. Kleinert, R. T. Jantzen, and R. Ruffini, Part A, World Scientific (2008), p. 1251.
14. С. Алексеев, А. Попов, М. Старцева и др., *ЖЭТФ* **133**, 710 (2008).
15. V. P. Frolov, M. A. Marko, and V. F. Mukhanov, *Phys. Lett. B* **216**, 272 (1989).

16. P. Kanti, N. E. Mavromatos, J. Rizos et al., Phys. Rev. D **54**, 5049 (1996).
17. D. L. Wiltshire, Phys. Lett. B **169**, 39 (1986).
18. G. W. Gibbons and K. Maeda, Nucl. Phys. B **298**, 741 (1988).
19. C. Lanczos, Z. Phys. A **73**, 147 (1932); Ann. Math. **39**, 842 (1938).
20. G. Stephenson, Il Nuovo Cimento **9**, 263 (1958).
21. P. W. Higgs, Il Nuovo Cimento **11**, 816 (1959).
22. D. Lovelock, J. Math. Phys. **12**, 498 (1971).
23. B. Zwiebach, Phys. Lett. B **156**, 315 (1985); E. Poisson, Class. Quant. Grav. **8**, 639 (1991); D. Witt, Phys. Rev. D **38**, 3000 (1988).
24. D. Garfinkle, G. Horowitz, and A. Strominger, Phys. Rev. D **43**, 3140 (1991).
25. А. А. Старобинский, Письма в ЖЭТФ **86**, 157 (2007).
26. S. Nojiri and S. D. Odintsov, J. Phys. A: Math. Theor. **40**, 6725 (2007).
27. S. Mignemi and N. R. Stewart, Phys. Rev. D **47**, 5259 (1993).
28. J. Wheeler, Nucl. Phys. **268**, 737 (1986).
29. J. Wheeler, Nucl. Phys. **273**, 732 (1986).
30. P. Kanti, N. E. Mavromatos, J. Rizos et al., Phys. Rev. D **57**, 6255 (1998).
31. O. Khovanskaya, Grav. Cosmol. **8**, 197 (2002).
32. E. Ellis and B. G. Schmidt, Gen. Rel. Grav. **8**, 915 (1977).
33. S. W. Hawking and E. Ellis, *Large-Scale Structure of the Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge (1973).
34. T. Torii, H. Yajima, and K. Maeda, Phys. Rev. D **55**, 261 (1995).
35. S. O. Alexeyev and O. S. Khovanskaya, Grav. Cosmol. **6**, 14 (2000).
36. S. Massar and R. Parentani, Nucl. Phys. B **19**, 2671 (2000).
37. M. K. Parikh and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **85**, 5042 (2000).
38. K. Srinivasan and T. Padamanabhan, Phys. Rev. D **60**, 24007 (1999).
39. D. N. Page, Phys. Rev. D **13**, 198 (1976).
40. B. Kleinhaus and J. Kunz, Phys. Rev. Lett. **79**, 1595 (1997).
41. И. Д. Новиков, П. В. Фролов, *Физика черных дыр*, Наука, Москва (1986).
42. J. M. Blatt and V. F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, Wiley, New York (1952).
43. T. Pilling, Talk at 15th Int. Seminar on High Energy Physics: Quarks-2008, arXiv:hep-th/0809.2701.
44. V. Akhmedova, T. Pilling, A. deGill, and D. Singleton, Phys. Lett. B **666**, 269 (2008).
45. T. Pilling, Phys. Lett. B **660**, 402 (2008).
46. Л. Д. Деденко, Г. Ф. Федорова, Т. М. Роганова и др., ЯФ **70**, 170 (2007).
47. К. Уилл, *Теория и эксперимент в гравитационной физике*, Энергоатомиздат, Москва (1985).
48. C. M. Will and K. N. Nordtvert, Astrophys. J. **177**, 757 (1972).
49. C. M. Will and K. N. Nordtvert, Astrophys. J. **177**, 775 (1972).
50. Y. Sirois, Nucl. Phys. B **216**, 169 (2011).
51. S. B. Giddings and S. Thomas, Phys. Rev. D **65**, 056010 (2002).
52. S. Dimopoulos and G. Landsberg, Phys. Rev. Lett. **87**, 161602 (2001).
53. N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. R. Dvali, Phys. Lett. B **429**, 257 (1998).
54. I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos et al., Phys. Lett. B **436**, 257 (1998).
55. N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. R. Dvali, Phys. Rev. D **59**, 086004 (1999).
56. L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999).
57. S. B. Giddings and E. Katz, J. Math. Phys. **42**, 3082 (2001).
58. В. А. Рубаков, УФН **171**, 913 (2001).
59. D. M. Eardley and S. B. Giddings, Phys. Rev. D **66**, 044011 (2002).
60. H. Yoshino and Y. Nambu, Phys. Rev. D **66**, 065004 (2002).
61. D. G. Boulware and S. Deser, Phys. Rev. Lett. **55**, 2656 (1985).

62. N. Deruelle and J. Madore, *Mod. Phys. Lett. A* **1**, 237 (1986).
63. N. Deruelle and L. Farina-Busto, *Phys. Rev. D* **41**, 3696 (1990).
64. S. Nojiri, S. D. Odintsov, and S. Ogushi, *Phys. Rev. D* **65**, 023521 (2002).
65. M. E. Mavromatos and J. Rizos, *Phys. Rev. D* **62**, 124004 (2000).
66. Y. M. Cho, I. P. Neupane, and P. S. Wesson, *Nucl. Phys. B* **621**, 388 (2002).
67. B. C. Paul and S. Mukherjee, *Phys. Rev. D* **42**, 2595 (1990).
68. B. Abdesselam and N. Mohammedi, *Phys. Rev. D* **65**, 084018 (2002).
69. C. Charmousis and J. F. Dufaux, *Class. Quantum Grav.* **19**, 4671 (2002).
70. J. E. Lidsey and N. J. Nunes, *Phys. Rev. D* **67**, 103510 (2003).
71. J. H. MacGibbon and B. R. Webber, *Phys. Rev. D* **41**, 3052 (1990).
72. M. Banados, C. Teitelboim, and J. Zanelli, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 957 (1994).
73. A. Padilla, *Class. Quantum Grav.* **20**, 3129 (2003).
74. C. M. Harris and P. Kanti, *JHEP* **0310**, 014 (2003).
75. R. G. Cai, *Phys. Rev. D* **65**, 084014 (2002).
76. P. Kanti, N. E. Mavromatos, J. Rizos et al., *Phys. Rev. D* **45**, 5049 (1996).
77. A. Barrau, G. Boudoul, F. Donato et al., *Astronom. Astrophys.* **388**, 676 (2002).
78. R. Emparan, G. T. Horowitz, and R. C. Myers, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 499 (2000).
79. T. Tjostrand, *Comput. Phys. Commun.* **82**, 74 (1994).
80. ATLAS TDR 14, 1, CERN/LHCC/99-14 (1999).
81. D. N. Page *Phys. Rev. D* **14**, 3260 (1976).
82. R. C. Myers and M. J. Perry, *Ann. Phys. (N. Y.)* **172**, 304 (1986).
83. G. W. Gibbons, H. Lu, D. N. Page, and C. N. Pope, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 171102 (2004).
84. A. Anabalón, N. Deruelle, Y. Morisawa et al., *Class. Quant. Grav.* **26**, 065002 (2009).