ЖЭТФ, 2012, том 141, вып. 4, стр. 738–747

АКУСТИЧЕСКАЯ САМОИНДУЦИРОВАННАЯ ПРОЗРАЧНОСТЬ ДЛЯ ТРЕХКОМПОНЕНТНЫХ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫХ ИМПУЛЬСОВ

С. В. Сазонов [a*], *Н. В. Устинов* [b**]

[a] *Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»*
123182, Москва, Россия

[b] *Калининградский филиал Московского государственного университета путей сообщения*
236039, Калининград, Россия

Поступила в редакцию 8 августа 2011 г.

На основе приближения медленно меняющихся огибающих исследованы особенности нелинейной динамики трехкомпонентных упругих импульсов в низкотемпературном кристалле, содержащем парамагнитные примеси электронных и ядерных спинов. Наличие электронной спиновой подсистемы позволило уравнять скорости продольного звука и поперечных акустических волн, вследствие чего все компоненты поля деформации эффективно взаимодействуют друг с другом через ядерную спиновую подсистему. Выведена система уравнений для огибающих гармоник компонент поля деформации и спиновых переменных. Установлены соотношения между амплитудами и фазами компонент, изучен спектральный состав и обсуждены режимы акустической прозрачности трехкомпонентных продольно-поперечных импульсов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Акустические импульсы, распространяющиеся в кристалле, помещенном во внешнее магнитное поле, могут выполнять при взаимодействии с парамагнитными примесями, находящимися в нем, две функции. Они могут, во-первых, возбуждать квантовые переходы между зеемановскими подуровнями парамагнитных примесей и, во-вторых, сдвигать частоты этих переходов. В случае, когда эффективный спин S парамагнитных примесей не равен $1/2$, такие особенности взаимодействия объясняются на основе квадрупольного эффекта Штарка (механизм Ван-Флека) [1, 2]. Градиенты внутрикристаллического электрического поля, которые создаются полем деформации проходящего акустического импульса, вызывают переходы между зеемановскими подуровнями парамагнитных ионов. Кроме того, при квадрупольном штарк-эффекте происходит смещение энергетических уровней зеемановских мультиплетов, снимающее вырождение по модулю проекции эффективного спина. Вследствие этого происходят динамические сдвиги частот квантовых переходов полем импульса. В случае, когда $S = 1/2$, спин-упругое взаимодействие возникает из-за модуляции полем деформации тензора Ланде [1, 3]. Переходы между спиновыми подуровнями внутри зеемановских мультиплетов парамагнитных ионов при этом тоже сопровождаются сдвигом частот.

Подобный характер взаимодействия имеет место также в ряде оптических задач. Электромагнитные импульсы, проходящие через среду, содержащую квантовые частицы с отличными от нуля постоянными дипольными моментами переходов, выполняют те же две функции: возбуждают квантовые переходы и сдвигают их частоты. Сдвиг частоты квантового перехода происходит за счет эффекта Штарка и пропорционален произведению его постоянного дипольного момента на напряженность электрического поля импульса. За средами, в которых электромагнитные импульсы выполняют обе эти функции, закрепилось название штарковские среды. Исследование особенностей нелинейной динамики электромагнитных импульсов в штарковских средах привлекло к себе большое внимание в последнее десятилетие [4–15]. Эти особенности оказались во многом схожими с таковыми в случае упругих импульсов в парамагнитных кристаллах [16–21].

*E-mail: sazonov.sergey@gmail.com
**E-mail: n_ustinov@mail.ru

Приближение медленно меняющихся огибающих (ММО) [22, 23] традиционно используется для описания эволюции импульсов, имеющих высокочастотное заполнение. Оно применялось для исследования распространения оптических и акустических импульсов, выполняющих сразу две функции при взаимодействии с квантовыми частицами и имеющих несущую частоту, близкую к резонансной частоте перехода, соответственно в работах [15] и [21]. При этом оказалось, что обычная схема приближения ММО требует дополнения. Разложение по гармоникам поля импульса должно содержать все гармоники несущей частоты, а не только нечетные, как это имеет место в случае, когда отсутствует сдвиг частоты квантового перехода. Еще одной особенностью явилось то, что в уравнениях для огибающих основных гармоник необходимо учитывать антирезонансные слагаемые [22, 24], в частности, сдвиг Блоха – Зигерта.

Важное отличие акустических задач от оптических заключается в том, что упругие импульсы могут обладать даже в пространственно-одномерном случае трехкомпонентной структурой (продольная и две поперечные компоненты). Однако из-за того, что скорость продольного звука в кристаллах существенно превосходит скорость поперечного звука [25], взаимодействие между данными компонентами поля деформации слабое и они практически не влияют друг на друга. Именно это происходило в ходе экспериментального наблюдения явления акустической самоиндуцированной прозрачности (АСИП) в низкотемпературных парамагнитных кристаллах [26, 27] и предполагалось в первых теоретических исследованиях этого явления [26, 28, 29]. С гиперзвуком могут взаимодействовать не только электронные, но и ядерные спины [3, 30]. Поэтому явление АСИП исследовалось также в условиях ядерного акустического резонанса [31].

С начала 2000-х гг. стали выходить работы, посвященные АСИП для продольно-поперечных импульсов [32–39]. При этом, правда, предполагалось, что скорости продольного и поперечного звуков равны друг другу. Данное предположение представляется идеалистичным, хотя и обеспечило эффективное взаимодействие между соответствующими компонентами гиперзвука. Механизм уравнивания данных скоростей был предложен в работах [40, 41]. Как известно [1, 2], продольный гиперзвук взаимодействует с парамагнитными ионами сильнее, чем поперечный, причем наиболее сильное взаимодействие имеет место в случае эффективного электронного спина $S = 1$. Это позволяет выбрать их в качестве замедлителей скорости продольного звука [40].

Если кристалл содержит два типа парамагнитных примесей (электронный и ядерный), один из которых (электронный) служит для уменьшения скорости продольного звука, то все три компоненты поля деформации могут эффективно взаимодействовать между собой посредством ядерных парамагнитных примесей. Именно такой подход без использования приближения ММО был применен в работе [41]. При этом особенности поведения полей деформации трехкомпонентных акустических импульсов, имеющих высокочастотное заполнение и выполняющих две отмеченные выше функции, а также сопутствующая эволюция состояния парамагнитных примесей остались не ясны.

В настоящей работе мы предлагаем оригинальную процедуру использования приближения ММО для описания динамики трехкомпонентных продольно-поперечных импульсов. Развиваемый ниже подход позволяет четко выявить физические механизмы АСИП для продольно-поперечных импульсов с учетом различия выполняемых функций каждой из компонент поля деформации.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 выводится система материальных и волновых уравнений, описывающая взаимодействие электронных и ядерных спинов с трехкомпонентным продольно-поперечным гиперзвуком при его распространении перпендикулярно внешнему магнитному полю. В приближении адиабатического следования электронной подсистемы за акустическим полем проводится исключение элементов матрицы плотности электронных спинов. В результате влияние электронной подсистемы сводится к перенормировке скоростей продольного и поперечного гиперзвуков. Это позволяет найти условие, при котором обе скорости становятся равны друг другу. В разд. 3 проводится разложение компонент акустического поля и материальных переменных ядерной подсистемы по гармоникам основной частоты с учетом вклада составляющей на нулевой частоте, сдвигающей частоту перехода, и антирезонансных слагаемых. Показано существование двух семейств трехкомпонентных акустических импульсов, качественно отличающихся друг от друга характером взаимодействия с парамагнитными примесями. Здесь же амплитуда гармоники на удвоенной частоте компоненты, сдвигающей квантовые уровни, выражена через амплитуду нулевой гармоники. В следующем разделе показано, что выведенные уравнения сводятся к системе материальных и волновых уравнений, содержащих основную и нулевую гармоники, которая интегрируема методом обратной задачи рассеяния (МОЗР) [42–44]. Проведен анализ односолитонного решения, на основе которого выделены режимы прозрачности. В Заключении сделаны основные выводы и намечены дальнейшие исследования в данном направлении.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть в кубическом кристалле, находящемся во внешнем магнитном поле **B**, содержатся парамагнитные примеси электронных $S = 1$ и ядерных $J = 1/2$ эффективных спинов. Из-за различия в массах электрона и ядра электронный магнетон μ_e на четыре порядка больше ядерного магнетона μ_n. На столько же порядков частоты электронных зеемановских расщеплений превосходят частоты ядерных расщеплений. Будем считать, что спектр акустического импульса захватывает ядерные спин-фононные переходы, но лежит ниже частот электронных расщеплений.

Введем декартову систему координат, оси которой совпадают с осями симметрии кристалла. Пусть внешнее магнитное поле направлено вдоль оси z, а акустический импульс распространяется перпендикулярно ему вдоль оси x (геометрия Фохта). Дальнейшее рассмотрение ограничим пространственно-одномерным случаем, когда все динамические переменные зависят только от координаты x и времени t.

Операторы Гамильтона электронных и ядерных спинов в таких условиях имеют вид [1, 16]

$$\hat{H}_e = \hbar\omega_e\hat{S}_z + \frac{3}{2}G_{11}\hat{S}_x^2\mathcal{E}_{xx} + G_{44}\left(\hat{S}_x\hat{S}_y + \hat{S}_y\hat{S}_x\right)\mathcal{E}_{yx} + G_{44}\left(\hat{S}_x\hat{S}_z + \hat{S}_z\hat{S}_x\right)\mathcal{E}_{zx}, \quad (1)$$

$$\hat{H}_n = -\frac{\hbar\omega_n}{2}\Big(\sigma_3 - F_{11}\sigma_1\mathcal{E}_{xx} + F_{44}\sigma_2\mathcal{E}_{yx} + F_{44}\sigma_3\mathcal{E}_{zx}\Big).$$

Здесь $\mathcal{E}_{xx}$, $\mathcal{E}_{yx}$ и $\mathcal{E}_{zx}$ — компоненты тензора деформации кристалла, равные

$$\mathcal{E}_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \mathcal{E}_{yx} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \mathcal{E}_{zx} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_z}{\partial x},$$

u_x, u_y, u_z — декартовы компоненты вектора **u** смещений узлов решетки, $\hat{S}_j$ $(j = x, y, z)$ — спиновые матрицы в представлении собственных функций $\hat{S}_z$:

$$\hat{S}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{S}_y = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{S}_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

σ_1, σ_2, σ_3 — матрицы Паули, G_{11}, G_{44} и F_{11}, F_{44} — компоненты тензоров взаимодействия соответственно электронных и ядерных спинов с акустическим полем (в обозначениях Фохта), $\omega_e = g_e\mu_e B/\hbar$ и $\omega_n = g_n\mu_n B/\hbar$ — частоты электронных и ядерных зеемановских расщеплений, g_e и g_n — электронный и ядерный факторы Ланде, $\hbar$ — постоянная Планка.

Для вывода уравнений, описывающих динамику эффективных спинов и поля деформации, применим полуклассический подход. В соответствии с ним поведение спиновых подсистем подчиняется квантовомеханическим уравнениям для электронной $\hat{\rho}^e$ и ядерной $\hat{\rho}^n$ матриц плотности:

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\rho}^{e,n}}{\partial t} = \left[\hat{H}_{e,n}, \hat{\rho}^{e,n}\right]. \quad (2)$$

При этом эволюцию поля деформации описываем классическими уравнениями Гамильтона для непрерывной среды [16]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} &= \frac{\delta}{\delta\mathbf{p}}\left(H_a + \int\left(n_e\langle\hat{H}_e\rangle + n_n\langle\hat{H}_n\rangle\right)d\mathbf{r}\right), \\ \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial t} &= -\frac{\delta}{\delta\mathbf{u}}\left(H_a + \int\left(n_e\langle\hat{H}_e\rangle + n_n\langle\hat{H}_n\rangle\right)d\mathbf{r}\right), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$H_a = \frac{1}{2}\int\left\{\frac{\mathbf{p}^2}{\rho} + 4\rho a_\perp^2\left(\mathcal{E}_{yx}^2 + \mathcal{E}_{zx}^2\right) + \rho a_\parallel^2\mathcal{E}_{xx}^2\right\}d\mathbf{r}$$

— гамильтониан поля деформации в отсутствие парамагнитных примесей, $a_\parallel$ и $a_\perp$ — линейные скорости продольной и поперечных акустических волн, ρ — средняя плотность кристалла, **p** — вектор плотности импульса локальных смещений узлов кристаллической решетки, $\langle\hat{H}_{e,n}\rangle = \mathrm{Tr}\,(\hat{\rho}^{e,n}\hat{H}_{e,n})$ — квантовые средние электронного и ядерного гамильтонианов, $n_{e,n}$ — концентрации электронных и ядерных спинов. Интегрирование в уравнениях (3) проводится по объему кристалла.

Мы пренебрегли диссипативными эффектами в уравнениях (2) и (3), предполагая, что длительность акустического импульса значительно короче времен необратимых фазовых и энергетических релаксаций, а также приняв во внимание то обстоятельство, что акустическое затухание, вызванное рассеянием когерентных фононов импульса на тепловых фононах или на дефектах кристаллической решетки, значительно меньше при гелиевых температурах, чем поглощение, вызванное парамагнитными примесями [1, 26].

Определим материальные переменные W и σ через элементы матрицы плотности $\hat{\rho}^n$ ядерных спинов как

$$W = \frac{\rho_{22}^n - \rho_{11}^n}{2}, \quad \sigma = \rho_{12}^n.$$

Уравнения, задающие их эволюцию, находим из формулы (2):

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\Omega_y + i\Omega_x}{2}\sigma - \frac{\Omega_y - i\Omega_x}{2}\sigma^*, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = i(\omega_n + \Omega_z)\sigma + (\Omega_y - i\Omega_x)W, \tag{5}$$

где использованы обозначения для полевых переменных

$$\Omega_x = \omega_n F_{11}\mathcal{E}_{xx}, \quad \Omega_y = \omega_n F_{44}\mathcal{E}_{yx}, \quad \Omega_z = \omega_n F_{44}\mathcal{E}_{zx}.$$

Видно, что в рассматриваемой геометрии функции компонент поля деформации импульса при взаимодействии с ядерной спиновой подсистемой строго различны: поперечная Ω_y и продольная Ω_x компоненты вызывают квантовые переходы между зеемановскими подуровнями, тогда как поперечная компонента Ω_z динамически смещает частоту переходов.

Будем считать, что длительность T_p упругого импульса имеет порядок 10^{-6} с. Взяв для частоты электронного зеемановского расщепления значение $\omega_e \sim 10^{11}$ с$^{-1}$ [1, 2], получим $\omega_e T_p \gg 1$. Выполнение этого неравенства позволяет применить приближение адиабатического следования [16, 45] к уравнению для электронной матрицы плотности $\hat{\rho}^e$ и найти следующие выражения для ее недиагональных элементов при $\partial\hat{\rho}^e/\partial t = 0$:

$$\rho_{21}^e = \frac{w_1 - w_2}{\sqrt{2}\,\hbar\omega_e}\,G_{44}\mathcal{E}_{zx}, \quad \rho_{32}^e = \frac{w_3 - w_2}{\sqrt{2}\,\hbar\omega_e}\,G_{44}\mathcal{E}_{zx},$$

$$\rho_{31}^e = \frac{w_3 - w_1}{2\hbar\omega_e}\left(\frac{3}{4}G_{11}\mathcal{E}_{xx} - iG_{44}\mathcal{E}_{yx}\right),$$

где w_1, w_2 и w_3 — равновесные населенности нижнего (основного), среднего и верхнего электронных спиновых подуровней. Подстановка этих выражений в (1) и затем в (3) дает систему волновых уравнений для компонент поля деформации:

$$\frac{\partial^2\Omega_x}{\partial t^2} - a_1^2\frac{\partial^2\Omega_x}{\partial x^2} = \frac{n_n\hbar\omega_n^2F_{11}^2}{2\rho}\,\frac{\partial^2(\sigma+\sigma^*)}{\partial x^2}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2\Omega_y}{\partial t^2} - a_2^2\frac{\partial^2\Omega_y}{\partial x^2} = -i\frac{n_n\hbar\omega_n^2F_{44}^2}{8\rho}\,\frac{\partial^2(\sigma-\sigma^*)}{\partial x^2}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2\Omega_z}{\partial t^2} - a_2^2\frac{\partial^2\Omega_z}{\partial x^2} = \frac{n_n\hbar\omega_n^2F_{44}^2}{4\rho}\,\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \tag{8}$$

в которую входят переопределенные скорости продольной a_1 и поперечной a_2 акустических волн:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{a_\parallel^2 - \frac{9n_eG_{11}^2}{16\rho\hbar\omega_e}(w_1 - w_3)}\ , \\ a_2 &= \sqrt{a_\perp^2 - \frac{n_eG_{44}^2}{2\rho\hbar\omega_e}(w_1 - w_3)}\ . \end{aligned} \tag{9}$$

Поскольку $|G_{11}| \gg |G_{44}|$ [1] и $a_\parallel > a_\perp$, наличие электронной спиновой подсистемы позволяет сблизить скорости акустических волн при термодинамически равновесной заселенности электронных спиновых подуровней (т. е. при $w_1 > w_3$).

Далее будем считать, что

$$a_1 = a_2 = a.$$

В таком случае нелинейное взаимодействие между компонентами упругого импульса через ядерную спиновую подсистему будет наиболее эффективным. Из формулы (9) при этом имеем

$$a_\parallel^2 - a_\perp^2 = \frac{n_e(w_1 - w_3)}{2\rho\hbar\omega_e}\left(\frac{9}{8}\,G_{11}^2 - G_{44}^2\right).$$

Пусть $|G_{11}| \sim 10^{-13}$ эрг [46], $\rho \sim 1$ г/см^3, $\omega_e \sim \sim 10^{11}$ с$^{-1}$ [1, 2], $a_\parallel \approx 5\cdot10^5$ см/с, $a_\perp \approx 3\cdot10^5$ см/с. Тогда $n_e \sim 10^{21}$ см$^{-3}$, т. е. концентрация электронных спинов составляет примерно один процент от концентрации атомов кристалла. При такой концентрации парамагнитной примеси и температурах жидкого гелия можно все еще не учитывать эффекты спин-фононной релаксации [40].

3. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ГАРМОНИКАМ

Применим приближение ММО к системе уравнений (4)–(8), описывающей распространение трехкомпонентных упругих импульсов в парамагнитном кристалле. Поскольку функции компонент поля деформации строго различны, они должны содержать или только нечетные, или только четные гармоники несущей частоты. В соответствии с этим используем следующие разложения по гармоникам полевых и материальных переменных:

$$\begin{aligned} \Omega_x + i\Omega_y = &-\Omega_0\exp(i\varphi) - \Omega_{-1}\exp(-i\varphi) - \\ &- \Omega_1\exp(3i\varphi) - \Omega_{-2}\exp(-3i\varphi), \end{aligned} \tag{10}$$

$$\Omega_z = \Omega_{z,0} + \Omega_{z,1}\exp(2i\varphi) + \Omega^*_{z,1}\exp(-2i\varphi), \qquad (11)$$

$$\sigma = \sigma_0\exp(i\varphi) + \sigma_{-1}\exp(-i\varphi) + \sigma_1\exp(3i\varphi) + \\ + \sigma_{-2}\exp(-3i\varphi), \qquad (12)$$

$$W = W_0 + W_1\exp(2i\varphi) + W_1^*\exp(-2i\varphi), \qquad (13)$$

где $\varphi = \omega(t - x/a)$, ω — несущая частота импульса. Огибающие гармоник являются медленно меняющимися, т. е. выполняются условия

$$\left|\frac{\partial\Omega_j}{\partial t}\right| \ll \omega\,|\Omega_j|\,,$$

$$\left|\frac{\partial\Omega_j}{\partial x}\right| \ll \frac{\omega}{a}\,|\Omega_j|$$

($j = -2, -1, 0, 1$) вместе с подобными условиями для огибающих $\Omega_{z,0}$, $\Omega_{z,1}$, $\sigma_{-2,-1,0,1}$, $W_{0,1}$. Индекс «0» в разложениях (10)–(13) соответствует основным гармоникам.

Пусть отстройка $\Delta = \omega_n - \omega$ несущей частоты импульса от резонанса и огибающие гармоник полевых переменных малы по сравнению с частотой ω_n ядерного зеемановского расщепления. Подставив (10)–(13) в систему уравнений (4)–(8) и усреднив по времени с учетом наложенных на огибающие гармоник условий, получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} = \frac{i}{2}(\Omega_0^*\sigma_0 - \Omega_0\sigma_0^*), \qquad (14)$$

$$\frac{\partial\sigma_0}{\partial t} = i\left(\Delta + \Omega_{z,0} + \frac{|\Omega_{-1}|^2}{4\omega_n}\right)\sigma_0 + i\Omega_0W_0, \qquad (15)$$

$$\frac{\partial\Omega_0}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial\Omega_0}{\partial t} = -i(\beta_\parallel + \beta_\perp)\omega_n\sigma_0 - \\ - i\left((\beta_\parallel + \beta_\perp)\Omega_0 - \frac{\beta_\parallel - \beta_\perp}{2}\Omega^*_{-1}\right)W_0, \qquad (16)$$

$$\frac{\partial\Omega_{-1}}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial\Omega_{-1}}{\partial t} = i(\beta_\parallel - \beta_\perp)\omega_n\sigma_0^* + \\ + i\left((\beta_\parallel - \beta_\perp)\Omega_0^* - \frac{\beta_\parallel + \beta_\perp}{2}\Omega_{-1}\right)W_0, \qquad (17)$$

$$\frac{\partial^2\Omega_{z,0}}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\Omega_{z,0}}{\partial t^2} = -4a\beta_\perp\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2}, \qquad (18)$$

$$\frac{\partial\Omega_1}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial\Omega_1}{\partial t} = -3i\omega_n\left((\beta_\parallel + \beta_\perp)\sigma_1 + (\beta_\parallel - \beta_\perp)\sigma^*_{-2}\right),$$

$$\frac{\partial\Omega_{-2}}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial\Omega_{-2}}{\partial t} = 3i\omega_n\left((\beta_\parallel + \beta_\perp)\sigma_{-2} + (\beta_\parallel - \beta_\perp)\sigma_1^*\right),$$

$$\frac{\partial\Omega_{z,1}}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial\Omega_{z,1}}{\partial t} = 4i\omega_n\beta_\perp W_1, \qquad (19)$$

и выражения для огибающих гармоник:

$$W_1 = \frac{\Omega^*_{-1}\sigma_0}{4\omega_n}, \quad \sigma_{-1} = -\frac{\Omega_{-1}W_0}{2\omega_n},$$

$$\sigma_1 = \frac{\Omega_0\Omega^*_{-1}\sigma_0}{8\omega_n^2} + \frac{\Omega_1W_0}{2\omega_n},$$

$$\sigma_{-2} = -\frac{\Omega^2_{-1}\sigma_0^*}{16\omega_n^2} - \frac{\Omega_{-2}W_0}{4\omega_n}.$$

Здесь использованы обозначения

$$\beta_\parallel = \frac{n_n\hbar\omega_n^2F_{11}^2}{4\rho a^3}, \quad \beta_\perp = \frac{n_n\hbar\omega_n^2F_{44}^2}{16\rho a^3}.$$

Из представленных равенств следует, что огибающие гармоник на утроенной частоте Ω_1 и Ω_{-2} (а также σ_1 и σ_{-2}) имеют одинаковые порядки малости. При этом порядок малости Ω_1 и Ω_{-2} более высокий, чем порядок малости у огибающей Ω_{-1}. Подчеркнем, что хотя гармоники Ω_{-1} и Ω_1 в частотном диапазоне одинаково близки к основной гармонике, их порядок малости разный.

Вклад антирезонансных гармоник учтен в уравнениях (14)–(18) третьим слагаемым в круглых скобках в правой части уравнения (15) (сдвиг Блоха–Зигерта [22, 24]) и вторыми слагаемыми в правых частях уравнений (16) и (17). Заметим, что сдвиг Блоха–Зигерта может быть сравним по величине со вторым слагаемым в круглых скобках в правой части уравнения (15), которое описывает динамический сдвиг частоты перехода компонентой Ω_z поля деформации импульса.

Из уравнений (16) и (17) в главном порядке (т. е. без антирезонансных слагаемых) имеем приближенное выражение для огибающей Ω_{-1}:

$$\Omega_{-1} = \frac{\beta_\parallel - \beta_\perp}{\beta_\parallel + \beta_\perp}\Omega_0^* + F\left(t - \frac{x}{a}\right), \qquad (20)$$

где $F(t - x/a)$ — некоторая функция. Правые части уравнений (14)–(18) содержат огибающую Ω_{-1} только в антирезонансных слагаемых, имеющих самый высокий порядок малости. Это позволяет нам исключить ее с помощью соотношения (20) из правых частей данных уравнений и остаться при этом в том же самом порядке точности приближения ММО.

Представление (20) согласуется с результатами работы [41], в которой было установлено существование двух семейств трехкомпонентных акустических бризеров. Бризеры первого семейства могут сильно возбуждать ядерные спины, что сопровождается существенным замедлением их скорости распространения. Бризеры второго семейства практически не взаимодействуют с ядерными спинами и имеют групповую скорость, близкую к линейной. Полученные в работе [41] выражения для трехкомпонентных бризеров оказались сложными для их детального изучения, но было высказано предположение, что определяющую роль в столь разной динамике играет соотношение между фазами компонент Ω_x и Ω_y, вызывающих переходы между спиновыми подуровнями. Подставив (20) в (10), получим

$$\begin{aligned}\Omega_x \approx \Omega_{x,0} = -\frac{2\beta_\parallel}{\beta_\parallel+\beta_\perp}\operatorname{Re}(\Omega_0\exp(i\varphi)) - \\ - \operatorname{Re}(F(t-x/a)\exp(-i\varphi)),\\ \Omega_y \approx \Omega_{y,0} = -\frac{2\beta_\perp}{\beta_\parallel+\beta_\perp}\operatorname{Im}(\Omega_0\exp(i\varphi)) - \\ - \operatorname{Im}(F(t-x/a)\exp(-i\varphi))\end{aligned} \tag{21}$$

(здесь отброшены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости). Видно, что в случае $F(t-x/a)=0$ фаза компоненты Ω_x примерно на $\pi/2$ больше фазы компоненты Ω_y, тогда как в случае $\Omega_0=0$ фаза Ω_x, наоборот, примерно на $\pi/2$ меньше фазы Ω_y, и к тому же скорость распространения импульса равна линейной скорости a, что соответствует бризерам второго семейства. Таким образом, разность фаз компонент поля деформации, которые возбуждают квантовые переходы, можно принять за признак, отличающий два семейства акустических импульсов.

В установившемся режиме распространения импульсов из начального профиля выделится часть, определяемая видом функции $F(t-x/a)$. Эта часть акустических импульсов не взаимодействует с ядерными спинами ($\sigma_0\approx 0$), хотя их несущая частота может быть равна резонансной частоте перехода. Как следует из (21), у таких импульсов амплитуды компонент Ω_x и Ω_y примерно одинаковы. Другая часть акустических импульсов соответствует условию $F(t-x/a)=0$. Отношение амплитуды компоненты Ω_x к амплитуде компоненты Ω_y у этих импульсов равно примерно $\beta_\parallel/\beta_\perp$.

Проведенное выше рассмотрение показало, что в рамках приближения ММО нашло подтверждение существование двух семейств акустических импульсов в задаче, где квантовые переходы вызываются двумя компонентами (Ω_x и Ω_y) поля деформации. Определены отношения фаз и амплитуд основных гармоник этих компонент для каждого семейства импульсов. Существование двух семейств отличает рассматриваемую задачу от случая, когда импульс имеет только одну компоненту, возбуждающую квантовые переходы.

Выясним особенности акустической прозрачности импульсов первого семейства, соответствующего условию $F(t-x/a)=0$. Подстановка (20) в (14)–(16) дает в рассматриваемом случае следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} = \frac{i}{2}(\Omega_0^*\sigma_0 - \Omega_0\sigma_0^*), \tag{22}$$

$$\frac{\partial\sigma_0}{\partial t} = i\left(\Delta+\Omega_{z,0}+\frac{(\beta_\parallel-\beta_\perp)^2|\Omega_0|^2}{4\omega_n(\beta_\parallel+\beta_\perp)^2}\right)\sigma_0 + i\Omega_0 W_0, \tag{23}$$

$$\frac{\partial\Omega_0}{\partial x}+\frac{1}{a}\frac{\partial\Omega_0}{\partial t} = -i(\beta_\parallel+\beta_\perp)\omega_n\sigma_0 - \frac{i}{2}\left(\beta_\parallel+\beta_\perp+\frac{4\beta_\parallel\beta_\perp}{\beta_\parallel+\beta_\perp}\right)\Omega_0 W_0, \tag{24}$$

которую необходимо для самосогласованности дополнить уравнением (18). Возникающая при этом система остается сложной для исследования. Для ее упрощения применим к уравнению (18) приближение однонаправленного распространения (ОР) [47, 48], иногда называемое приближением медленно меняющегося профиля [49]. Для этого введем безразмерный параметр

$$\eta = \frac{n_n\hbar\omega_n F_{44}^2}{\rho a^2},$$

характеризующий вклад правой части уравнения (18). Пусть $\omega_n\sim 10^7$ с$^{-1}$, $|F_{44}|\sim 10$, $n_n\sim n_e$, $a\sim a_\perp$. При таких условиях получим оценку для безразмерного параметра $\eta\sim 10^{-5}\ll 1$. Теперь определим переменные

$$\tau = t-\frac{x}{a}, \quad \zeta=\eta x.$$

В новых переменных имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial\tau}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\tau}+\eta\frac{\partial}{\partial\zeta}.$$

Малое значение параметра η позволяет отбросить слагаемые с η^2 и записать приближенно

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - 2\frac{\eta}{a}\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\zeta}$$

для левой части уравнения (18) и

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$$

для его правой части. Интегрирование получившегося уравнения по τ и возвращение к исходным переменным дает

$$\frac{\partial \Omega_{z,0}}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial \Omega_{z,0}}{\partial t} = i\beta_\perp(\Omega_0^*\sigma_0 - \Omega_0\sigma_0^*). \qquad (25)$$

Таким образом, удалось с помощью приближения однонаправленного распространения понизить порядок уравнения, определяющего динамику компоненты $\Omega_{z,0}$ упругого импульса.

Из уравнений (24) и (25) следует выражение

$$\Omega_{z,0} = -\frac{\beta_\perp}{\omega_n(\beta_\parallel + \beta_\perp)}|\Omega_0|^2 + f_1\left(t - \frac{x}{a}\right), \qquad (26)$$

где $f_1(t - x/a)$ — некоторая функция. В установившемся режиме распространения импульсов, когда $f_1(t - x/a) = 0$, видим, что выполняется неравенство $\Omega_{z,0} \le 0$. Таким образом, имеет место асимметрия по полярности основной гармоники компоненты, смещающей частоту перехода между спиновыми подуровнями: ее знак таков, что частота уменьшается при прохождении импульса.

В главном порядке из уравнений (19) и (24), приняв во внимание определение W_1 и соотношение (20), находим

$$\Omega_{z,1} = -\frac{\beta_\perp(\beta_\parallel - \beta_\perp)}{2\omega_n(\beta_\parallel + \beta_\perp)^2}\Omega_0^2 + f_2\left(t - \frac{x}{a}\right), \qquad (27)$$

где $f_2(t - x/a)$ — некоторая функция. В установившемся режиме из (26) и (27) имеем

$$\left|\frac{\Omega_{z,1}}{\Omega_{z,0}}\right| = \frac{|\beta_\parallel - \beta_\perp|}{2(\beta_\parallel + \beta_\perp)}. \qquad (28)$$

Величина этого отношения стремится при $\beta_\parallel \gg \beta_\perp$ (или при $\beta_\perp \gg \beta_\parallel$) к $1/2$. Примечательно, что именно такому значению равнялась абсолютная величина отношения гармоники на удвоенной частоте к нулевой гармонике в работах [15, 19] для случаев однокомпонентных и двухкомпонентных импульсов, сдвигающих частоты переходов. Полученное выражение для отношения гармоник также согласуется с результатами численного расчета фурье-спектра трехкомпонентных акустических импульсов, проведенного в работе [41].

4. АНАЛИЗ СОЛИТОННОГО РЕШЕНИЯ

Для дальнейшего упрощения выведенных уравнений сделаем замену переменных. Пусть

$$\begin{gathered}\tilde{\Omega}_0 = \Omega_0 \exp(i\theta), \quad \tilde{\sigma}_0 = \sigma_0 \exp(i\theta), \\ \tilde{\Omega}_{z,0} = \Omega_{z,0} - \frac{2\beta_\parallel\beta_\perp}{\omega_n(\beta_\parallel + \beta_\perp)^2}|\Omega_0|^2.\end{gathered} \qquad (29)$$

Здесь

$$\theta = -\frac{1}{4\omega_n}\left(1 + \frac{4\beta_\parallel\beta_\perp}{(\beta_\parallel + \beta_\perp)^2}\right) \times \\ \times \int_{-\infty}^{t} |\Omega_0|^2\, dt' + \gamma W_\infty x, \qquad (30)$$

где

$$\gamma = \frac{\beta_\parallel}{2} + \frac{\beta_\perp}{2} + \frac{2\beta_\parallel\beta_\perp}{\beta_\parallel + \beta_\perp},$$

W_∞ — инверсия населенностей ядерных спиновых подуровней до прохождения акустического импульса. Приняв во внимание выполнение равенства

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}\right)|\Omega_0|^2 = -2(\beta_\parallel + \beta_\perp)\omega_n\frac{\partial W_0}{\partial t},$$

из (22)–(25) получим

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} = \frac{i}{2}(\tilde{\Omega}_0^*\tilde{\sigma}_0 - \tilde{\Omega}_0\tilde{\sigma}_0^*), \qquad (31)$$

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_0}{\partial t} = i\left(\Delta + \tilde{\Omega}_{z,0}\right)\tilde{\sigma}_0 + i\tilde{\Omega}_0 W_0, \qquad (32)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}_0}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial \tilde{\Omega}_0}{\partial t} = -i(\beta_\parallel + \beta_\perp)\omega_n\tilde{\sigma}_0, \qquad (33)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}_{z,0}}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial \tilde{\Omega}_{z,0}}{\partial t} = iB(\tilde{\Omega}_0^*\tilde{\sigma}_0 - \tilde{\Omega}_0\tilde{\sigma}_0^*), \qquad (34)$$

где

$$B = \beta_\perp + \frac{2\beta_\parallel\beta_\perp}{\beta_\parallel + \beta_\perp}.$$

Полученные в результате уравнения (31)–(34) отличаются только обозначениями от системы синхронизма длинных и коротких волн, которая является интегрируемой в рамках МОЗР [42–44] и которая была подробно изучена в работе [10]. Следует особо подчеркнуть, что в них не содержатся антирезонансные слагаемые. С помощью замены переменных (29) удалось одновременно избавиться от сдвига Блоха–Зигерта в уравнении (23) и от антирезонансного слагаемого в уравнении (24). Также отметим, что переход от $\Omega_{z,0}$ к $\tilde{\Omega}_{z,0}$ сохраняет асимметрию по знаку этих переменных.

Односолитонное решение системы (31)–(34) имеет вид [10]

$$\tilde{\Omega}_0 = \sqrt{M}\exp(i\Phi), \tag{35}$$

$$\tilde{\Omega}_{z,0} = -\frac{BM}{\omega_n(\beta_\parallel + \beta_\perp)}, \tag{36}$$

$$W_0 = W_\infty\left(1 - \frac{\tau_p^2 M}{2(1+\alpha^2)}\right). \tag{37}$$

Здесь

$$M = \frac{8g}{\tau_p^2\left(g - \alpha + \sqrt{1 + (g-\alpha)^2}\,\mathrm{ch}(2\zeta)\right)}, \tag{38}$$

$$\Phi = \frac{\omega_n(\beta_\parallel + \beta_\perp)\alpha\tau_p}{1+\alpha^2}W_\infty x - \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{th}\,\zeta}{s}, \tag{39}$$

$$\alpha = \Delta\tau_p, \quad \zeta = \frac{t - x/v_g}{\tau_p},$$

$$s = g - \alpha + \sqrt{1 + (g-\alpha)^2},$$

$$g = \frac{\beta_\parallel + \beta_\perp}{2B}\omega_n\tau_p.$$

Свободным параметром импульса является положительная постоянная τ_p. Групповая скорость импульса в лабораторной системе равна

$$v_g = a\left(1 - W_\infty\frac{a(\beta_\parallel + \beta_\perp)\omega_n\tau_p^2}{1+\alpha^2}\right)^{-1}.$$

Используя (30) и (39), находим соответствующее выражение для фазовой скорости:

$$v_{ph} = a\left(1 + W_\infty\frac{a\gamma}{\omega_n} - W_\infty\frac{a(\beta_\parallel + \beta_\perp)\alpha\tau_p}{1+\alpha^2}\right)^{-1}.$$

Слагаемое, пропорциональное γ, в этой формуле появляется вследствие учета антирезонансных гармоник.

Обсудим связь параметра τ_p с длительностью T_p импульса, которую определим как разность $t - x/v_g$ значений, соответствующих абсолютной величине $\tilde{\Omega}_0$, вдвое меньшей, чем ее наибольшее значение. Из (35) и (38) находим

$$T_p = \tau_p\,\mathrm{arch}\left(4 + \frac{3(g-\alpha)}{\sqrt{1+(g-\alpha)^2}}\right).$$

Видно, что примерная пропорциональность длительности импульса T_p и параметра τ_p выполняется при условии $g \gg 1$.

Как следует из соотношений (35) и (29), основная гармоника Ω_0 имеет фазовую модуляцию, которая определяет локальное смещение ее несущей частоты $\omega \to \omega_{loc} = \omega + \delta\omega_{non}$, где

$$\delta\omega_{non} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\partial\theta}{\partial t}.$$

Здесь второе слагаемое представляет собой вклад антирезонансных гармоник. Поскольку

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\tilde{\Omega}_{z,0}}{4},$$

с учетом соотношений (35) и (36) получим

$$\delta\omega_{non} = \frac{\beta_\parallel}{4\omega_n(\beta_\parallel + \beta_\perp)}\left(1 + \frac{2\beta_\perp}{\beta_\parallel + \beta_\perp}\right)M > 0.$$

Таким образом, фазовая модуляция приводит в увеличению локальной несущей частоты импульса.

В соответствии с (32) и (35) динамический сдвиг подуровней ядерных спинов и фазовая модуляция огибающей $\tilde{\Omega}_0$ акустического импульса определяют эффективную отстройку ее от резонанса:

$$\Delta_{ef} = \Delta + \tilde{\Omega}_{z,0} - \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \Delta + \frac{3}{4}\tilde{\Omega}_{z,0}.$$

Если $\Delta = 0$, то импульс не будет эффективно находиться в резонансе, тогда как при ненулевой отстройке он может оказаться в резонансе с ядерными спинами. Из соотношения (37) следует, что полную инверсию состояния ядерных спинов вызывают импульсы, параметр τ_p которых равен

$$\tau_p = \left(\frac{\beta_\parallel + \beta_\perp}{B}\omega_n\Delta - \Delta^2\right)^{-1/2}.$$

Отстройка от резонанса у таких импульсов положительная, что согласуется с асимметрией по знаку $\tilde{\Omega}_{z,0}$. Именно при такой отстройке акустический импульс может в среднем на длительности импульса быть в резонансе с ядерными спинами. Если же сдвиг частоты перехода отсутствует, то полную инверсию вызывают импульсы с нулевой отстройкой.

В работе [10] были выделены несколько режимов оптической прозрачности в штарковских средах на основе анализа импульсного решения системы синхронизма длинных и коротких волн. Их акустические аналоги были изучены в работе [17]. Обсудим эти режимы применительно к рассматриваемой задаче.

При $g \gg 1$ выражены режимы прозрачности, сопровождающиеся сильным возбуждением ядерных спинов. В обычном режиме АСИП отстройка импульсов мала ($|\alpha| \ll 1$) и происходит значительное замедление скорости распространения. Режим акустической самоиндуцированной сверхпрозрачности (АСИСП) соответствует большой положительной отстройке ($\alpha \gg 1$). Импульсы АСИСП являются более короткими, испытывают сильную фазовую модуляцию, превосходят по амплитуде импульсы АСИП и имеют бóльшую скорость. При этом среднее значение эффективной отстройки Δ_{ef} на длительности импульсов в обоих режимах мало, из-за чего они оказываются в резонансе с ядерными спинами. Именно по этой причине импульсы АСИСП, обладающие большой отстройкой, вызывают практически полную инверсию состояния ядерных спинов.

Режимы, в которых ядерные спины возбуждаются слабо, могут быть выражены только при $g \ll 1$. В данной задаче это условие не выполняется, поскольку компонента поля деформации, сдвигающая подуровни, и одна из компонент, возбуждающих переходы, имеют одинаковые постоянные спин-фононного взаимодействия.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приближение ММО применено в настоящей работе для описания распространения трехкомпонентных акустических импульсов в парамагнитном кристалле, содержащем примеси электронных и ядерных спинов. Взаимодействие электронной спиновой подсистемы с продольным звуком позволило уравнять его скорость и скорости поперечных акустических волн, что обеспечило эффективное взаимодействие между всеми компонентами поля упругости посредством ядерной спиновой подсистемы. В геометрии, рассмотренной здесь, функции компонент оказались строго различными: две из них вызывают квантовые переходы между зеемановскими подуровнями ядерных спинов, а третья компонента смещает частоту перехода.

Выведена система уравнений для огибающих компонент поля деформации и материальных переменных ядерной спиновой подсистемы. Разложения компонент поля деформации, вызывающих переходы между зеемановскими подуровнями ядерной спиновой подсистемы, содержат только нечетные гармоники несущей частоты, а в разложение компоненты, сдвигающей частоту перехода, входят только четные гармоники. В уравнениях для огибающих основных гармоник учтены антирезонансные слагаемые, вызывающие, в частности, сдвиг Блоха – Зигерта. Вклад этих слагаемых сравним с вкладом слагаемых, описывающих взаимодействие между компонентами.

Показано, что в данной задаче действительно существуют два семейства трехкомпонентных акустических импульсов, различающихся характером взаимодействия с ядерными спинами. Определены соотношения между фазами и амплитудами основных гармоник компонент поля деформации импульсов каждого семейства. Кроме того, в наиболее интересном случае импульсов первого семейства получено выражение для отношения амплитуд гармоники на удвоенной частоте и основной гармоники компоненты, сдвигающей частоту ядерных переходов. Это отношение переходит в предельных случаях в соответствующее выражение для однокомпонентных и двухкомпонентных импульсов.

На основе солитонного решения выведенной системы уравнений найдено условие полной инверсии состояния ядерных спинов при прохождении трехкомпонентного продольно-поперечного импульса первого семейства. Это условие связывает параметры импульса (длительность и отстройку от резонанса). Несущая частота импульсов, вызывающих полную инверсию, меньше резонансной частоты. Объясняется это асимметрией по полярности основной гармоники компоненты поля деформации, смещающей частоту перехода между спиновыми подуровнями: ее знак таков, что частота динамически понижается.

Развитая здесь схема приближения ММО для трехкомпонентных акустических импульсов с учетом выполнения отдельными компонентами различных функций позволила четко проследить физические механизмы прозрачности при различных исходных отстройках от резонанса. Однокомпонентный случай, в котором единственная компонента поля импульса выполняет сразу две функции при взаимодействии с квантовыми частицами, был рассмотрен в рамках приближения ММО в работах [15, 21]. Представляет интерес развитие приближения ММО на случаи двух- и трехкомпонентных импульсов, у которых нет строгого разделения функций между компонентами. Оно может быть использовано в ходе исследования нелинейных процессов преобразования частоты в многоуровневых штарковских средах как в акустических, так и в оптических задачах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-02-00503).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Такер, Р. Рэмптон, *Гиперзвук в физике твердого тела*, Мир, Москва (1975).

2. В. А. Голенищев-Кутузов, В. В. Самарцев, Н. К. Соловаров, Б. М. Хабибулин, *Магнитная квантовая акустика*, Наука, Москва (1977).

3. С. А. Альтшулер, Б. М. Козырев, *Электронный парамагнитный резонанс соединений элементов промежуточных групп*, Наука, Москва (1972).

4. L. W. Casperson, Phys. Rev. A **57**, 609 (1998).

5. A. Brown, W. J. Meath, and P. Tran, Phys. Rev. A **63**, 013403 (2000).

6. M. Agrotis, N. M. Ercolani, S. A. Glasgow, and J. V. Moloney, Physica D **138**, 134 (2000).

7. А. А. Заболотский, ЖЭТФ **121**, 1012 (2002).

8. А. И. Маймистов, Дж.-Ги Капуто, Опт. и спектр. **94**, 275 (2003).

9. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **124**, 803 (2003).

10. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, ЖЭТФ **127**, 289 (2005).

11. С. О. Елютин, ЖЭТФ **128**, 17 (2005).

12. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, КЭ **35**, 701 (2005).

13. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, Письма в ЖЭТФ **83**, 573 (2006); ЖЭТФ **130**, 646 (2006).

14. N. V. Ustinov, Proc. SPIE **6725**, 67250F-1 (2007); arXiv:0705.2833.

15. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, Опт. и спектр. **106**, 473 (2009).

16. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **118**, 20 (2000).

17. S. V. Sazonov and N. V. Ustinov, Phys. Rev. E **73**, 056614-1 (2006).

18. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, ЖЭТФ **129**, 849 (2006).

19. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, ФТТ **50**, 1076 (2008).

20. S. V. Sazonov and N. V. Ustinov, J. Phys. A: Math. Theor. **40**, F551 (2007).

21. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, ФТТ **51**, 335 (2009).

22. Л. Ален, Дж. Эберли, *Оптический резонанс и двухуровневые атомы*, Мир, Москва (1978).

23. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов*, Наука, Москва (1988).

24. F. Bloch and A. Siegert, Phys. Rev. **57**, 522 (1940).

25. Ч. Киттель, *Введение в физику твердого тела*, Физматлит, Москва (1963).

26. N. S. Shiren, Phys. Rev. B **2**, 2471 (1970).

27. В. В. Самарцев, Б. П. Смоляков, Р. З. Шарипов, Письма в ЖЭТФ **20**, 644 (1974).

28. Г. А. Денисенко, ЖЭТФ **60**, 2269 (1971).

29. G. T. Adamashvili, Physica B **266**, 173 (1999).

30. Д. Болеф, в кн. *Физическая акустика*, под ред. У. Мэзона, т. 4, гл. 3, Мир, Москва (1969); А. Р. Кессель, *Ядерный акустический резонанс*, Наука, Москва (1969).

31. В. П. Лукомский, УФЖ **24**, 975 (1979).

32. С. В. Воронков, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **120**, 269 (2001).

33. А. А. Заболотский, Письма в ЖЭТФ **76**, 709 (2002).

34. А. А. Заболотский, ЖЭТФ **123**, 560 (2003).

35. A. A. Zabolotskii, Physica D **185**, 117 (2003).

36. A. A. Zabolotskii, Phys. Rev. E **67**, 066606-1 (2003).

37. A. V. Gulakov and S. V. Sazonov, J. Phys.: Condens. Matter **16**, 1733 (2004).

38. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, ТМФ **151**, 228 (2007).

39. А. А. Заболотский, ЖЭТФ **132**, 493 (2007).

40. А. Н. Бугай, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **134**, 390 (2008).

41. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, ТМФ **164**, 222 (2010).

42. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов*: *метод обратной задачи*, Наука, Москва (1980).

43. Дж. Л. Лэм, *Введение в теорию солитонов*, Мир, Москва (1983).

44. Р. Буллаф, Ф. Кодри (ред.), *Солитоны*, Мир, Москва (1983).

45. M. D. Crisp, Phys. Rev. A **8**, 2128 (1973).

46. U. Kh. Kopvillem, V. V. Samartsev, and N. K. Solovarov, Adv. Mol. Relax. Process **8**, 241 (1976).

47. J. C. Eilbeck, J. Phys. A: Gen. Phys. **5**, 1355 (1972).

48. J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, P. J. Caudrey, and R. K. Bullough, J. Phys. A: Math. Nucl. Gen. **6**, 1337 (1973).

49. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, *Теория волн*, Наука, Москва (1990).