

# ИССЛЕДОВАНИЕ НА УСТОЙЧИВОСТЬ КРОВОЙ НОРЫ МОРИСА – ТОРНА – БРОННИКОВА – ЭЛЛИСА С ДАВЛЕНИЕМ

*И. Д. Новиков<sup>a,b\*</sup>, А. А. Шацкий<sup>a\*\*</sup>*

<sup>a</sup> *Астрокосмический центр, Физический институт им. Лебедева Российской академии наук  
117997, Москва, Россия*

<sup>b</sup> *The Nielse Bohr International Academy, The Nielse Bohr Institute  
DK-2100, Copenhagen, Denmark*

Поступила в редакцию 19 сентября 2011 г.

Исследована на устойчивость модель сферической кротовой норы типа Мориса – Торна – Бронникова – Эллиса. Материя этой кротовой норы состоит из радиального монополярного магнитного поля и квази-идеальной фантомной жидкости. В стационарном случае плотность энергии этой жидкости отрицательна и по модулю равна удвоенной плотности энергии магнитного поля. Давление этой жидкости в стационарном случае отсутствует (фантомная пыль), а в случае отклонения плотности энергии жидкости от ее стационарного значения давление пропорционально отклонению плотности энергии от стационарного значения. Получен пример устойчивой к радиальным возмущениям кротовой норы.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос об устойчивости кротовых нор является неотъемлемой частью проблемы их стабильного существования во Вселенной. Поэтому данному вопросу в литературе уделено достаточно много внимания, см. работы [1–9].

Модель простейшей кротовой норы [10–12] (фантомное скалярное поле с отрицательным кинетическим членом) оказалась неустойчивой вопреки ошибочным утверждениям в работах [1, 2] и в соответствии с более поздними (независимыми) правильными исследованиями [3–7, 13].

Более сложная модель такой же кротовой норы с той же метрикой [6, 7] (радиальное магнитное поле и фантомная пыль с отрицательной плотностью массы) оказалась почти устойчивой ко всем сферическим модам возмущений (за исключением продольного радиального движения пыли по инерции). Нарастание неустойчивой моды оказалось достаточно медленным: пропорционально времени [8]. Поэтому у авторов данной работы возникло предположение, что эта неустойчивая мода может быть легко подавлена введением в модель дополнительных параметров. Все эти исследования дали надежду на суще-

ствование и нахождение полностью устойчивого решения (ко всем сферическим модам возмущений).

Предыдущие результаты показали, что для кротовых нор даже с одной и той же метрикой вопрос об устойчивости не имеет однозначного ответа, поэтому данный вопрос (весьма сложный) должен изучаться для конкретной модели кротовой норы детально.

Здесь мы исследуем на устойчивость по сферическим модам похожую модель кротовой норы типа Мориса – Торна – Бронникова – Эллиса (МТБЭ). Материя этой кротовой норы состоит из радиального монополярного магнитного поля (с топологическим зарядом  $q$ ) и квазиидеальной фантомной жидкости. В стационарном случае (относительно которого и будет проводиться исследование на устойчивость) плотность энергии  $\epsilon$  этой жидкости отрицательна и по модулю равна удвоенной плотности энергии магнитного поля. Давление  $p$  этой жидкости в стационарном случае отсутствует (фантомная пыль), а в случае отклонения плотности энергии  $\epsilon$  от ее стационарного значения давление пропорционально отклонению  $f$  плотности от ее стационарного значения.

Как уже было сказано, без давления такая модель оказывается линейно-неустойчивой во времени [8].

\*E-mail: novikov@asc.rssi.ru

\*\*E-mail: shatskiy@asc.rssi.ru

## 2. УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

Метрический тензор в сферически-симметричном случае удобно выбрать следующим<sup>1)</sup>:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dx^2 - e^\mu d\Omega^2. \quad (1)$$

Здесь  $e^\mu = r^2$ , где  $4\pi r^2$  — площадь сферы вокруг центра системы, величины  $r$ ,  $\nu$  и  $\lambda$  являются функциями  $x$  и  $t$ .

Уравнения Эйнштейна, соответствующие метрике (1), в сопутствующей материи системе отсчета [14] можно записать в виде<sup>2)</sup>

$$8\pi\varepsilon + q^2 e^{-2\mu} = -e^{-\lambda} \left[ \mu'' + \frac{3}{4}(\mu')^2 - \frac{1}{2}\mu'\lambda' \right] + e^{-\nu} \left[ \frac{1}{2}\dot{\mu}\dot{\lambda} + \frac{1}{4}(\dot{\mu})^2 \right] + e^{-\mu}, \quad (2)$$

$$8\pi p - q^2 e^{-2\mu} = -e^{-\nu} \left[ \ddot{\mu} + \frac{3}{4}(\dot{\mu})^2 - \frac{1}{2}\dot{\mu}\dot{\nu} \right] + e^{-\lambda} \left[ \frac{1}{2}\mu'\nu' + \frac{1}{4}(\mu')^2 \right] - e^{-\mu}, \quad (3)$$

$$8\pi p + q^2 e^{-2\mu} = e^{-\lambda} \left[ \frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}(\nu')^2 + \frac{1}{2}\mu'' + \frac{1}{4}(\mu')^2 + \frac{1}{4}\mu'\lambda' - \frac{1}{4}\nu'\lambda' + \frac{1}{4}\mu'\nu' \right] + e^{-\nu} \left[ \frac{1}{4}\dot{\lambda}\dot{\nu} + \frac{1}{4}\dot{\mu}\dot{\nu} - \frac{1}{4}\dot{\lambda}\dot{\mu} - \frac{1}{2}\ddot{\lambda} - \frac{1}{4}(\dot{\lambda})^2 - \frac{1}{2}\ddot{\mu} - \frac{1}{4}(\dot{\mu})^2 \right], \quad (4)$$

$$2\dot{\mu}' + \dot{\mu}\mu' - \dot{\lambda}\mu' - \nu'\dot{\mu} = 0. \quad (5)$$

Стационарная кротовая нора МТВЭ определяется метрическим тензором

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - (q^2 + x^2) d\Omega^2. \quad (6)$$

Эта кротовая нора обладает тензором энергии-импульса, соответствующим смеси монополюсного электрического (или магнитного) поля и фантомной пыли:

<sup>1)</sup> Единицы измерения выбираются следующим образом: скорость света  $c = 1$ , гравитационная постоянная  $G = 1$ .

<sup>2)</sup> Вывод этих уравнений можно посмотреть, например в книге [14] (задача 5 к параграфу 100), штрих обозначает производную по  $x$ , а точка — по  $t$ .

$$8\pi T_m^n = \begin{pmatrix} \frac{q^2}{(q^2+x^2)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q^2}{(q^2+x^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-q^2}{(q^2+x^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-q^2}{(q^2+x^2)^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-2q^2}{(q^2+x^2)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Первый член в правой части (7) соответствует тензору энергии-импульса электрического (или магнитного) поля с зарядом  $q$ ; второй — пылевой материи с отрицательной плотностью энергии.

## 3. ИССЛЕДОВАНИЕ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Рассмотрим малые сферические возмущения материи и метрики около кротовой норы МТВЭ.

Введем обозначения:

$$8\pi\varepsilon \equiv \frac{-2q^2}{(q^2+x^2)^2} + f(x, t), \quad e^\mu \equiv (q^2+x^2)e^{\eta(x, t)}, \quad (8)$$

$$\xi^2 \equiv (q^2+x^2), \quad 8\pi p = hf.$$

Здесь  $h(x)$  — произвольная функция, имеющая физический смысл квадрата скорости звука  $v_s^2$  в рассматриваемой жидкости.

Перейдем далее к безразмерным координатам, т. е. положим далее радиус горловины фоновой кротовой норы равным единице:  $q = 1$ .

Выпишем уравнения (2)–(5) в линейном приближении по малым возмущениям  $\nu$ ,  $\lambda$ ,  $\eta$ ,  $f$ :

$$f = \frac{\lambda - \eta - 3x\eta' + x\lambda'}{\xi^2} - \eta'' + \frac{2\eta + \lambda}{\xi^4}, \quad (9)$$

$$hf + \ddot{\eta} + \frac{\eta(1-x^2)}{\xi^4} + \frac{\lambda x^2}{\xi^4} - \frac{x(\nu' + \eta')}{\xi^2} = 0, \quad (10)$$

$$hf = \frac{\nu'' + \eta'' - \ddot{\lambda} - \ddot{\eta}}{2} + \frac{2\eta - \lambda}{\xi^4} + \frac{x(\eta' - \lambda'/2 + \nu'/2)}{\xi^2}, \quad (11)$$

$$\dot{\eta}' + x(\dot{\eta} - \dot{\lambda})/\xi^2 = 0. \tag{12}$$

Из формулы (12) имеем

$$\eta - \lambda = F_1(x) - \frac{\xi^2}{x}\eta'. \tag{13}$$

Если давление  $p$  изотропно, то из уравнений (2)–(5) можно получить два полезных соотношения, вытекающие напрямую из формулы  $T_{i;k}^k = 0$  (следствие тождеств Бианки):

$$\dot{\lambda} + 2\dot{\mu} = -\frac{2\dot{\epsilon}}{p + \epsilon}, \quad \nu' = -\frac{2p'}{p + \epsilon}. \tag{14}$$

В линеаризованном виде они записываются как

$$\dot{\lambda} + 2\dot{\eta} = \xi^4 \dot{f}, \quad \nu' = \xi^4 (hf)'. \tag{15}$$

Из (15) получаем

$$\xi^4 f = \lambda + 2\eta + F_2(x). \tag{16}$$

Выражая из (13)  $\lambda$ , с учетом (16) из (9) имеем

$$F_2(x) = -\xi^2(xF_1)'. \tag{17}$$

Произвольные функции  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  определяются выбором начальных условий (при  $t = 0$ ) для малых возмущений  $\lambda$ ,  $f$  и  $\nu$  (при заданном начальном условии для  $\eta(x, t)$ ). Поэтому после переобозначения при  $t = 0$  в формулах (13) и (16) малых возмущений  $\lambda \rightarrow \tilde{\lambda} - F_1$  и  $f \rightarrow \tilde{f} + F_2/\xi^4$  далее можно положить функции  $F_1$  и  $F_2$  равными нулю.

Из уравнений (9), (10) и (13) получаем:

$$f = \frac{3\eta}{\xi^4} + \frac{\eta'}{x\xi^2} = \frac{[\xi^3\eta]'}{x\xi^5}, \tag{18}$$

$$\ddot{\eta} + hf - x\xi^2(hf)' + \frac{\eta}{\xi^4} = 0, \tag{19}$$

$$\lambda = \frac{\xi}{x} [\xi\eta]'. \tag{20}$$

Из уравнений (18), (19) имеем

$$\begin{aligned} \ddot{\eta} - h\eta'' + \eta' \left[ \frac{2h}{x\xi^2} - h' \right] + \eta U(x) = 0, \\ U(x) \equiv \frac{12hx^2 + 3h - 3h'x\xi^2 + 1}{\xi^4}. \end{aligned} \tag{21}$$

Уравнение (21) при  $h > 0$  является дифференциальным уравнением гиперболического типа. На бесконечности ( $x \rightarrow \pm\infty$ ) потенциал  $U(x)$  стремится к нулю и уравнение (21) становится уравнением для звуковых волн со скоростью звука  $v_s = \sqrt{h}$ .

Приведем уравнение (21) к каноническому виду. Для этого сделаем замену переменных  $x \rightarrow z$ . Тогда  $\partial_x \rightarrow \alpha\partial_z$ , где  $\alpha \equiv \partial z/\partial x$ . Уравнение (21) переписывается в виде

$$\ddot{\eta} - \left[ h\alpha^2\eta_{,zz} + h\alpha'\eta_{,z} - \alpha\eta_{,z} \left( \frac{2h}{x\xi^2} - h' \right) \right] + \eta U = 0. \tag{22}$$

Выберем теперь функции  $h(x)$  и  $\alpha(x)$  так, чтобы в квадратных скобках выражения (22) стояла только величина  $\eta_{,zz}$ , т.е. чтобы выполнялись равенства

$$h\alpha^2 = 1, \quad h\alpha' - \alpha \left( \frac{2h}{x\xi^2} - h' \right) = 0.$$

Из этих условий получаем  $h = h_0x^4/\xi^4$ , где  $h_0 = \text{const} > 0$ .

Тогда гиперболическое уравнение (21) переписывается в каноническом виде:

$$\begin{aligned} \ddot{\eta} - \eta_{,zz} + \eta U(z) = 0, \\ U(z) = \frac{12h_0x^6 - 9h_0x^4 + (1 + x^2)^2}{(1 + x^2)^4}, \end{aligned} \tag{23}$$

где было учтено, что теперь переменная  $x$  зависит от переменной  $z$  согласно следующему уравнению:

$$\begin{aligned} x^2 - \sqrt{h_0}zx - 1 = 0, \\ x^\pm(z) = \frac{\sqrt{h_0}z \pm \sqrt{h_0z^2 + 4}}{2}. \end{aligned} \tag{24}$$

Здесь знак «+» соответствует области  $x > 0$ , а знак «-» — области  $x < 0$ . Исследуем сначала область  $x > 0$ .

Асимптотика  $z \rightarrow -\infty$  соответствует  $x \rightarrow (\sqrt{h_0}|z|)^{-1} \rightarrow 0$ , а асимптотика  $z \rightarrow +\infty$  соответствует  $x \rightarrow (\sqrt{h_0}z) \rightarrow +\infty$ .

Решение уравнения (23) можно получить методом разделения переменных:

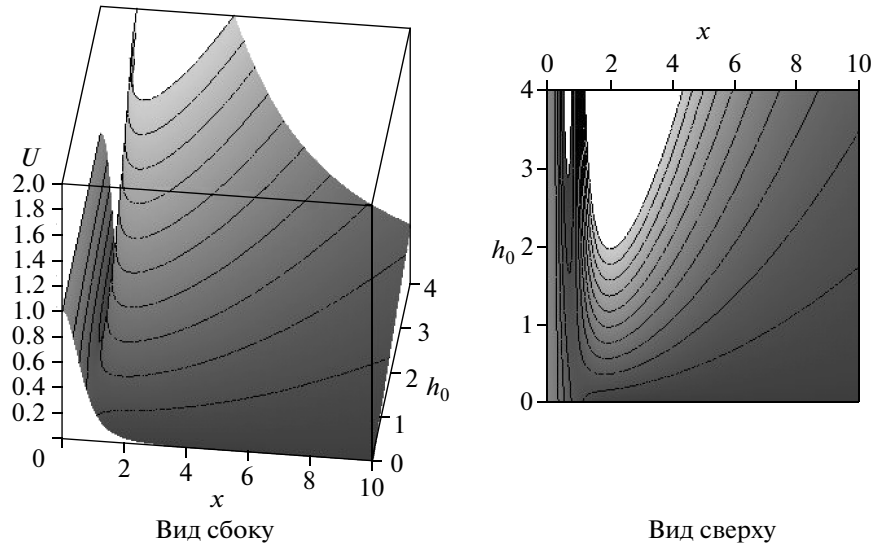
$$\eta(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\Psi_n(z), \tag{25}$$

$$\frac{\ddot{T}_n}{T_n} = \frac{\Psi_{n,zz}}{\Psi_n} - U(z) = -w_n^2. \tag{26}$$

Из (26) получаем  $T_n = \exp(iw_nt)$ . Здесь величина  $w_n = \text{const}$  имеет физический смысл частоты колебаний для гармоника с номером  $n$ , у малого возмущения  $\eta$ .

Из формулы (26) получаем для каждой гармоники:

$$\Psi_{n,zz} + w_n^2\Psi_n - U(z)\Psi_n = 0. \tag{27}$$



Вид поверхности потенциала  $U(x, h_0)$  для  $h(x) = h_0 x^4 / \xi^4$ . Отсюда видно, что области  $U > 0$  соответствует диапазон  $0 < h_0 < h_{00} \approx 2.8$  при любых значениях  $x$

Выражение (27) является стационарным уравнением Шредингера на всей числовой оси  $(-\infty, \infty)$  с потенциалом  $U(z)$ .

Как известно (см. [15], § 18), энергетические уровни  $E_n = (w_n \hbar)^2 / 2$  в спектре оператора Шредингера всегда положительны, если эффективный потенциал  $U(z)$  регулярен и неотрицателен при всех  $z$ , а  $U(z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ . Из (23) следует, что  $U(z)$  удовлетворяет этим условиям при  $0 < h_0 < h_{00} \approx 2.8$  (см. рисунок). Однако физическим ограничением для параметра  $h_0$  является предельная скорость звука, которая не может превышать скорости света. Поскольку квадрат скорости звука есть  $\partial p / \partial \varepsilon = h \leq c^2$ , должно выполняться условие  $h_{max} = h_0 \leq 1$ .

В результате имеем  $w_n^2 \geq 0$ , т.е. частота колебаний должна быть вещественной величиной.

Доказательство для области  $x < 0$  проводится аналогично.

Таким образом, мы доказали существование модели материи, в которой функция  $\eta(x, t)$  является невозрастающей.

Поскольку каждый член ряда (25) не возрастает при эволюции во времени, должна быть невозрастающей и производная по  $x$  от каждого члена этого ряда (так как производная по  $x$  не затрагивает компоненту  $T_n$ , отвечающую за зависимость от времени). Поэтому можно утверждать, что величина  $\eta'(x, t)$  также не возрастает (при  $0 < h_0 \leq 1$ ) и, следовательно, невозрастающими являются функции

$\nu(x, t)$ ,  $f(x, t)$  и  $\lambda(x, t)$  (согласно выражениям (15), (18)–(20)). Таким образом, полное решение является устойчивым.

Случай  $h = 0$  должен быть рассмотрен отдельно: уравнение (22) при  $h = 0$  становится уравнением параболического типа и переменные  $x, t$  в нем уже не разделяются, так как разложение в виде (25) становится неприменимым — см. (24). Решение уравнения (22) при  $h = 0$  легко находится в виде

$$\eta_{h=0}(x, t) = \eta_0 \exp(it / \xi^2).$$

Это решение также является устойчивым. Однако производная этого решения

$$\eta'_{h=0} = -2itx\eta_{h=0} / \xi^4$$

при  $x \neq 0$  уже не является асимптотически устойчивой функцией, а обладает линейной неустойчивостью по времени. Следовательно, функции  $\lambda_{h=0}(x, t)$  и  $f_{h=0}(x, t)$  при  $x \neq 0$  также являются линейно неустойчивыми (см. [8]).

#### 4. ВЫВОДЫ

В данной работе доказано, что в рамках общей теории относительности можно построить модель стационарной и проходимой кротовой норы, которая будет устойчива к малым сферическим возмущениям (устойчива по отношению к сферическим модам).

Есть указание (см. [16]) на то, что несферические моды возмущений, по-видимому, должны быть более устойчивыми, чем сферические, поскольку они обладают центробежными (и другими более высокомультипольными) барьерами в эффективном потенциале для возмущений. Поэтому здесь мы не проводим исследование на устойчивость по несферическим модам.

Авторы выражают благодарность К. Бронникову, К. Торну и А. Зиммерману за обсуждения и помощь в написании этой работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-02-00276-а), Федеральной программы «Научно-педагогическая инновационная Россия 2009–2011» и программы Президиума академии наук «Происхождение, строение и эволюция объектов во Вселенной 2011».

## ЛИТЕРАТУРА

1. С. Armendariz-Picon, arXiv:gr-qc/0201027.
2. С. Armendariz-Picon, Phys. Rev. D **65**, 104010 (2002).
3. Н. Shinkai and S. A. Hayward, arXiv:gr-qc/0205041.
4. J. A. Gonzalez, F. S. Guzman, and O. Sarbach, arXiv:gr-qc/0806.1370.
5. J. A. Gonzalez, F. S. Guzman, and O. Sarbach, arXiv:gr-qc/0806.0608.
6. A. Doroshkevich, J. Hansen, I. Novikov, and A. Shatskiy, arXiv:gr-qc/0812.0702.
7. A. Doroshkevich, J. Hansen, I. Novikov, and A. Shatskiy, J. Mod. Phys. D **18**, 1665 (2009).
8. Д. Новиков, А. Дорошкевич, И. Новиков, А. Шацкий, Астрон. ж. **12**, 1155 (2009).
9. O. Sarbach and T. Zannias, Phys. Rev. D **81**, 047502 (2010).
10. M. S. Morris and K. S. Thorne, Amer. J. Phys. **56**, 395 (1988).
11. К. А. Бронников, Acta Phys. Pol. B **4**, 251 (1973).
12. H. G. Ellis, J. Math. Phys. **14**, 104 (1973).
13. К. А. Бронников, J. C. Fabris, and A. Zhidenko, arXiv:1109.6576.
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, т. II, Наука, Москва (1988).
15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, т. III, Наука, Москва (1989).
16. К. А. Бронников, С. Г. Рубин, *Лекции по гравитации и космологии*, МИФИ, Москва (2008).