ЖЭТФ, 2012, том 142, вып. 5 (11), стр. 1067–1076

РАЗБРОС ПО ИМПУЛЬСАМ В ПУЧКЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В ОНДУЛЯТОРЕ

В. В. Огнивенко *

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
61108, Харьков, Украина

Поступила в редакцию 16 февраля 2012 г.

Рассмотрено движение потока релятивистских электронов в периодическом в пространстве магнитном поле ондулятора с учетом влияния некогерентного поля спонтанного ондуляторного излучения на движение электронов. Получено выражение для среднеквадратичного значения импульса электронов. Показано, что в режиме спонтанного некогерентного излучения происходит увеличение разброса по импульсам в пучке ультрарелятивистских электронов. Обсуждаются условия реализации процесса самопроизвольного усиления спонтанного ондуляторного излучения в ультракоротковолновых лазерах на свободных электронах.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, релятивистские электроны, движущиеся во внешних периодических полях (ондуляторах), являются источником узкополосного перестраиваемого по частоте электромагнитного излучения [1]. Длина волны этого излучения в направлении поступательного движения электронов обратно пропорциональна квадрату релятивистского фактора и может быть уменьшена путем увеличения кинетической энергии электронов. При этом увеличивается интенсивность электромагнитного излучения (пропорционально квадрату релятивистского фактора) и резко возрастает его направленность. С помощью взаимодействия ультрарелятивистских электронных пучков с внешними периодическими магнитными полями в настоящее время получают интенсивное электромагнитное излучение в вакуумной ультрафиолетовой и мягкой рентгеновской областях спектра.

Если поток электронов, движущихся во внешнем периодическом поле, является однородным в пространстве, то отдельные электроны излучают независимо, в результате чего суммарное электромагнитное поле всего пучка является случайным некогерентным. При классическом (неквантовом) рассмотрении процесса спонтанного некогерентного ондуляторного излучения обычно полагают, что влияние излучения на движение зарядов приводит только к торможению зарядов силой радиационного трения[1)]. Однако в этом режиме излучения может проявиться другой эффект, который приводит к увеличению среднеквадратичного разброса по импульсам релятивистских частиц при движении в периодическом поле [5]. Действительно, суммарное электромагнитное поле потока таких электронов-излучателей является случайным (флуктуационным), поэтому сила, действующая на отдельные электроны в этом поле, приводит к случайным отклонениям их импульсов от среднего значения, увеличивая среднеквадратичный разброс по импульсам.

Особое значение выявление физических механизмов, приводящих к изменению среднеквадратичного разброса по импульсам в потоке релятивистских заряженных частиц, движущихся в ондуляторе, и определение величины разброса приобретают в связи с работами, направленными на создание лазеров на свободных электронах (ЛСЭ) в рентгеновской области спектра. Это связано с тем, что для формирования вынужденного когерентного излучения в таких устройствах необходимы моноэнергетиче-

*E-mail: ognivenko@kipt.kharkov.ua

1) В режиме вынужденного излучения влияние электромагнитных полей на движение зарядов может приводить к группировке зарядов в когерентно излучающие сгустки под действием коллективного поля излучения (см., например, [2, 3]). Распределение по сгустку усредненных сил реакции когерентного излучения в этом случае исследовано в работе [4].

ские ультрарелятивистские электронные пучки с достаточно большой средней плотностью электронов, обеспечивающие самопроизвольное интенсивное усиление спонтанного излучения при однократном прохождении периодического в пространстве магнитного поля ондулятора[2)].

В данной работе рассмотрено влияние некогерентного электромагнитного поля спонтанного ондуляторного излучения потока релятивистских электронов на изменение их среднеквадратичного разброса по импульсам при движении в магнитостатическом поле ондулятора. Исследуемый эффект увеличения среднеквадратичного разброса связан с дискретностью структуры реальных потоков заряженных частиц. Поэтому будем рассматривать электронный пучок как поток отдельных точечных частиц. Исследуя радиационную релаксацию потока релятивистских электронов в ондуляторе в режиме спонтанного некогерентного излучения, будем считать пренебрежимо слабыми силы, обусловленные самосогласованным коллективным взаимодействием электронов.

В рамках указанных предположений, рассматривая движения пробной частицы в поле ондулятора и суммарном поле, создаваемом электронами пучка, сначала мы выразим среднеквадратичное значение импульса электронов через среднее значение произведения сил парного взаимодействия электронов (разд. 2), а затем усредним это произведение, опираясь на классическую статистическую механику систем большого числа частиц (разд. 3). Вычислив в приближении малого значения параметра ондулятора силу парного взаимодействия электронов, явные зависимости среднеквадратичного значения продольного (вдоль оси ондулятора) импульса электронов от расстояния, пройденного ими в ондуляторе, мы получим для первоначально моноэнергетического потока электронов (разд. 4). Заключительная часть работы (разд. 5) содержит обсуждение результатов и следующие из них выводы.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим внешнее периодическое в пространстве статическое магнитное поле ондулятора $\mathbf{H}_u$ с правой круговой поляризацией, заданное при $z \geq 0$,

$$\mathbf{H}_u = H_0 \left[\mathbf{e}_x \cos(k_u z) + \mathbf{e}_y \sin(k_u z)\right], \tag{1}$$

где $k_u = 2\pi/\lambda_u$; H_0, λ_u — амплитуда напряженности и период магнитного поля; $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ — единичные векторы вдоль осей x и y декартовой системы координат.

Пусть поток релятивистских электронов пересекает плоскость $z = 0$ и движется в положительном направлении оси z. Найдем среднеквадратичный разброс по продольной (z-й) составляющей импульса электронов при движении электронов в поле ондулятора (1) и некогерентном электромагнитном поле, создаваемом этими же электронами.

Электроны пучка, движущиеся в магнитном поле (1) с ускорением, излучают электромагнитные волны. Электрическое и магнитное поля в пучке представим в виде суммы полей отдельных электронов, выраженных через запаздывающие потенциалы Лиенара – Вихерта. Пусть положение электрона (например, s-го) задается радиус-вектором $\mathbf{r}_s(t)$. Тогда электрическое и магнитное поля этого электрона, определяются выражениями для полей заряда, движущегося с ускорением [8]:

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}, t; x_s) = e\frac{\mathbf{R}'_s - \boldsymbol{\beta}'_s R'_s}{\gamma'^2_s(R'_s - \mathbf{R}'_s \cdot \boldsymbol{\beta}'_s)^3} + \\ + \frac{e[R'_s[(\mathbf{R}'_s - \boldsymbol{\beta}'_s R'_s) \times \dot{\mathbf{v}}'_s]]}{c^2(R'_s - \mathbf{R}'_s \cdot \boldsymbol{\beta}'_s)^3}, \tag{2}$$

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{r}, t; x_s) = \frac{1}{R'_s}\left[\mathbf{R}'_s \times \mathbf{E}_s\right], \tag{3}$$

где

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{R}_s(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t), \quad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c,$$
$$\dot{\mathbf{v}} = d\mathbf{v}/dt, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2},$$

c — скорость света в вакууме, e — заряд электрона, штрихом обозначены величины, взятые в запаздывающий момент времени t', определяемый соотношением

$$t' = t - R_s(t')/c.$$

Поле в точке наблюдения $\mathbf{r}$ в момент времени t будут создавать лишь те электроны, начальные координаты которых удовлетворяют условию

$$c(t - t_{0s}) \geq |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0s}|, \tag{4}$$

где t_{0s} — момент времени, в который s-й электрон пересекает плоскость $z = 0$, $\mathbf{r}_{0s}$ — радиус-вектор s-го электрона в момент времени t_{0s}, $r_{0s} = \{x_{0s}, y_{0s}, 0\}$.

Неравенство (4) определяет область влияния поля s-го электрона-излучателя и связано с конечной скоростью распространения фронта поля.

Изменение среднеквадратичного значения продольного импульса электронов за единицу времени

[2)] Режим сверхизлучения или SASE (Self Amplified Spontaneous Emission, см., например, [6, 7]).

можно найти, рассматривая движение некоторого отдельного (пробного) электрона в поле ондулятора и в полях, создаваемых другими электронами пучка. Уравнения продольного движения пробного электрона (обозначим его индексом «i») запишем в виде

$$\frac{dp_{zi}}{dt} = F_z[x_i(t), t] = \sum_s F_z^{(s)}[x_i(t), t; x_s], \qquad (5)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\mathbf{p}_i(t)}{m\gamma_i(t)},$$

$$F_z^{(s)}(x, t; x_s) = = e\left\{E_{zs}(x, t; x_s) + \frac{1}{c}\left[\mathbf{v} \times \mathbf{H}_s(x, t; x_s)\right]_z\right\}, \qquad (6)$$

где $F_z(x, t)$ — продольная составляющая микроскопической силы, действующей на электрон в точке $\mathbf{r}$ в момент времени t, $F_z^{(s)}(x_i, t; x_s)$ — продольная составляющая силы парного взаимодействия двух электронов через электромагнитное поле одного из них (s-го электрона), m — масса электрона, $x_s(t) \equiv \{\mathbf{r}_s(t), \mathbf{p}_s(t)\}$ — совокупность декартовых координат и импульс s-го электрона.

Поскольку начальные поперечные координаты x_{0s}, y_{0s} и моменты времени t_{0s}, в которые электроны пересекают плоскость $z = 0$, являются случайными величинами, координаты электронов в ондуляторе в каждый момент времени t являются также случайными величинами. Поэтому суммарное электромагнитное поле потока таких электронов-излучателей в некоторой координате $\mathbf{r}$ в момент времени t будет случайным (флуктуационным). Сила, действующая на отдельные электроны в этом поле, приводит к случайным отклонениям их импульсов от среднего значения. Изменение в единицу времени отклонения от среднего значения продольного импульса электрона, согласно (5), описывается уравнением

$$\frac{d}{dt}\,\delta p_{zi} = \delta F_z[x_i(t), t], \qquad (7)$$

где

$$\delta p_{zi} = p_{zi}(t) - \langle p_{zi}\rangle,$$

$$\langle p_{zi}\rangle = p_{z0} + \int\limits_{t_{0i}}^{t} \langle F_z[x_i(t'), t']\rangle\, dt', \quad \delta F_z = F_z - \langle F_z\rangle,$$

угловые скобки означают усреднение по ансамблю.

Используя (7), запишем уравнение, описывающее изменение во времени среднеквадратичного разброса продольного импульса электронов, в виде

$$\frac{d}{dt}\left\langle(\delta p_{zi})^2\right\rangle = 2\int\limits_{t_{0i}}^{t} \langle \delta F_z[x_i(t'), t']\delta F_z[x_i(t), t]\rangle\, dt'. \quad (8)$$

3. УСРЕДНЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МИКРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Пусть электронный пучок состоит из N частиц, которые в начальный момент времени $t = t_0$ находятся в области $z < 0$ и не взаимодействуют друг с другом. Основываясь на классической статистической механике систем многих частиц [9], введем функцию распределения динамических состояний пучка $D_N(x_1(t_0), \ldots, x_N(t_0); t_0)$ в $6N$-мерном фазовом пространстве координат и импульсов частиц в момент времени t_0. Функция $D_N(x_1(t_0), \ldots, x_N(t_0); t_0)$ представляет собой плотность вероятности в $6N$-мерном фазовом пространстве, а $D_N(x_1(t_0), \ldots, x_N(t_0); t_0)\, dx_1(t_0) \ldots dx_N(t_0)$ — вероятность того, что в момент времени t_0 координаты и импульсы N частиц находятся в бесконечно малом фазовом объеме $dx_1(t_0) \ldots dx_N(t_0)$ около точки фазового пространства $x_1(t_0), \ldots, x_N(t_0)$.

Условие нормировки функции распределения D_N запишем в виде

$$\int\limits_{\Omega_X} D_N\left(x_1(t_0), \ldots, x_N(t_0); t_0\right)\, dx_1(t_0) \ldots \ldots dx_N(t_0) = 1, \qquad (9)$$

где интегрирование ведется по всему допустимому $6N$-мерному фазовому пространству Ω_X.

С помощью функции распределения D_N можно найти средние значения микроскопической силы и произведения микроскопических сил в разные моменты времени:

$$\langle F_z(x(t), t)\rangle = \int\limits_{\Omega_X}\left\{\sum_{s=1}^{N} F_z^{(s)}\left[x(t), t; x_s\left(t, x_s(t_0)\right)\right]\right\} \times \times D_N\left(x_1(t_0), \ldots, x_N(t_0); t_0\right)\, dx_1(t_0) \ldots \ldots dx_N(t_0), \qquad (10)$$

$$\langle F_z(x(t), t)F_z(x(t'), t')\rangle = = \int\limits_{\Omega_X}\left\{\sum_{p=1}^{N}\sum_{s=1}^{N} F_z^{(p)}\left[x(t), t; x_p(t, x_p(t_0))\right] \times \times F_z^{(s)}\left[x(t'), t'; x_s(t', x_s(t_0))\right]\right\} \times \times D_N\left(x_1(t_0), \ldots, x_N(t_0); t_0\right) \times \times dx_1(t_0) \ldots dx_N(t_0). \qquad (11)$$

Учитывая, что система состоит из частиц одного сорта и функция D_N является симметричной функцией координат в фазовом пространстве, выражение (10) запишем в виде

$$\langle F_z(x(t),t)\rangle = \int F_z^{(1)}\left[x(t),t;x_1(t,x_1(t_0))\right] \times \\ \times f_1(x_1(t_0),t_0)\,dx_1(t_0), \quad (12)$$

где f_1 — одночастичная функция распределения, определяемая уравнением

$$f_1(x_1(t_0),t_0) = N\int D_N(x_1(t_0),x_2(t_0),\ldots \\ \ldots,x_N(t_0);t_0)\,dx_2(t_0)\ldots dx_N(t_0) \quad (13)$$

и удовлетворяющая в соответствии с (9) условию нормировки

$$\int f_1(x_1(t_0),t_0)\,dx_1(t_0) = N.$$

Для вычисления среднего значения произведения микроскопических сил двойную сумму в уравнении (11) запишем в виде двух частей. Первая часть будет определяться суммой сомножителей с одинаковыми индексами электронов-излучателей, а вторая — двойной суммой сомножителей с разными индексами. Учитывая симметричность функции распределения D_N относительно аргументов, а также определение (13), приведем выражение (11) к виду

$$\langle F_z(x(t),t)F_z(x(t'),t')\rangle = \int F_z^{(1)}\left[x(t),t;x_1(t,x_0)\right]\times \\ \times F_z^{(1)}\left[x(t'),t';x_1(t',x_0)\right] f_1(x_0,t_0)\,dx_0 + \\ + \left(1-\frac{1}{N}\right)\int F_z^{(1)}\left[x(t),t;x_1(t,x_0)\right] \times \\ \times F_z^{(2)}\left[x(t'),t';x_2(t',x_0')\right] \times \\ \times f_2(x_0,x_0';t_0)\,dx_0dx_0'. \quad (14)$$

Здесь $x_0 = x_1(t_0)$, $x_0' = x_2(t_0)$, $f_2(x,x')$ — двухчастичная функция распределения, определенная следующим образом:

$$f_2(x,x',t_0) = N^2\int D_N(x,x',x_3(t_0),\ldots,x_N(t_0);t_0)\times \\ \times dx_3(t_0)\ldots dx_N(t_0).$$

Пренебрегая корреляцией частиц в начальный момент времени, двухчастичную функцию распределения представим в виде

$$f_2(x_0,x_0',t_0) = f_1(x_0,t_0)f_1(x_0',t_0).$$

Подставляя это соотношение в выражение (14) и учитывая определение (12), получаем

$$\langle F_z(x(t),t)F_z(x(t'),t')\rangle = \int F_z^{(1)}\left[x(t),t;x_1(t,x_0)\right]\times \\ \times F_z^{(1)}\left[x(t'),t';x_1(t',x_0)\right] f_1(x_0,t_0)\,dx_0 + \\ + \left(1-\frac{1}{N}\right)\langle F_z(x(t),t)\rangle\langle F_z(x(t'),t')\rangle. \quad (15)$$

Принимая во внимание тождество

$$\langle \delta F_z(\mathbf{r},t)\delta F_z(\mathbf{r}',t')\rangle \equiv \langle F_z(\mathbf{r},t)F_z(\mathbf{r}',t')\rangle - \\ - \langle F_z(\mathbf{r},t)\rangle\langle F_z(\mathbf{r}',t')\rangle$$

и пренебрегая в правой части выражения (15) членом $1/N$, находим среднее значение произведения флуктуаций микроскопических сил в разные моменты времени:

$$\langle \delta F_z(\mathbf{r}(t),t)\delta F_z(\mathbf{r}(t'),t')\rangle = \\ = \int F_z^{(1)}\left[\mathbf{r}(t),t;x(t,x_0)\right] \times \\ \times F_z^{(1)}\left[\mathbf{r}(t'),t';x(t',x_0)\right] f_1(x_0)\,dx_0. \quad (16)$$

Найденное соотношение устанавливает связь между корреляционной функцией флуктуаций микроскопической силы и силой парного взаимодействия частиц. При этом сила парного взаимодействия частиц выражена через начальные значения координат и импульсов частиц.

Мы рассматриваем движение электронов в ондуляторе при $z > 0$, пренебрегая взаимодействием электронов друг с другом в области $z < 0$, где нет внешнего поля, поэтому в уравнениях (12) и (16) целесообразно перейти от интегрирования по $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{p}_0$ к интегрированию по импульсам $\mathbf{p}_s(t_{0s})$, поперечным координатам $\mathbf{r}_{\perp s}(t_{0s})$ и моментам времени t_{0s}, в которые электроны пересекают плоскость $z = 0$:

$$\langle F_z(x(t),t)\rangle = \int\limits_{\Omega_q} F_z^{(1)}\left[x(t),t;x_s(t,q_{0s})\right] \times \\ \times f_1(q_{0s})v_z(t_{0s})\,dq_{0s}, \quad (17)$$

$$\langle \delta F_z(x(t),t)\delta F_z(x(t'),t')\rangle = \\ = \int\limits_{\Omega_q} F_z^{(1)}\left[x(t),t;x_s(t,q_{0s})\right] F_z^{(1)}\left[x(t'),t';x_s(t',q_{0s})\right] \times \\ \times f_1(q_{0s})v_z(t_{0s})\,dq_{0s}, \quad (18)$$

где

$$q_{0s} = (\mathbf{p}_{0s},x_{0s},y_{0s},t_{0s}), \quad dq_{0s} = d\mathbf{p}_{0s}dx_{0s}dy_{0s}dt_{0s}.$$

Интегрирование в (17) и (18) ведется по всему допустимому 6-мерному фазовому пространству Ω_q, соответствующему этим переменным.

Подставляя выражение (18) в уравнение (8), получим следующее выражение для скорости изменения среднего квадратичного значения продольного импульса частиц:

$$\frac{d}{dt}\langle(\delta p_{zi})^2\rangle = 2\int\limits_{t_{0i}}^{t} dt' \int\limits_{\Omega_q} F_z^{(1)}\left[x_i(t), t; x_s(t, q_{0s})\right] \times \\ \times F_z^{(1)}\left[x_i(t'), t'; x_s(t', q_{0s})\right] f_1(q_{0s}) v_z(t_{0s})\, dq_{0s}. \quad (19)$$

Рассматривая промежуток времени $\tau = t - t_{0i}$, достаточно малый по сравнению со временем t_{rel}, за которое происходит существенное изменение траектории электронов, в правой части уравнения (19) заменим $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$ невозмущенными траекторией $\mathbf{r}^{(0)}(t)$ и импульсом $\mathbf{p}^{(0)}(t)$ электрона в ондуляторе:

$$\frac{d}{dt}\langle(\delta p_{zi})^2\rangle = 2\int\limits_{0}^{\tau} dt' \int\limits_{\Omega_q} F_z^{(1)}\left[x_i^{(0)}(t), t; x_s^{(0)}(t, q_{0s})\right] \times \\ \times F_z^{(1)}\left[x_i^{(0)}(t-t'), t'; x_s^{(0)}(t-t', q_{0s})\right] \times \\ \times f_1(q_{0s}) v_z(t_{0s})\, dq_{0s}, \quad (20)$$

где $x_i^{(0)} = \left(\mathbf{r}_i^{(0)}, \mathbf{p}_i^{(0)}\right)$.

Формула (20) определяет среднеквадратичный разброс по импульсу через произведение сил парного взаимодействия частиц, усредненное по начальному (при $z = 0$) распределению частиц в фазовом пространстве координат и импульсов.

4. ПЕРВОНАЧАЛЬНО МОНОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПОТОК ЭЛЕКТРОНОВ

Пусть на входе в ондулятор при $z = 0$ электроны пучка являются моноэнергетическими с энергией $E = mc^2\gamma_0$ каждого из них. Не взаимодействующие друг с другом электроны в магнитном поле (1) движутся по спиральным линиям. В этом приближении уравнения траектории и скорости отдельного электрона (например, s-го) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_s^{(0)}(t) &= \mathbf{r}_{0s} - \mathbf{e}_x r_u \sin(k_u z_s(t)) - \\ &- \mathbf{e}_y r_u \left[1 - \cos(k_u z_s(t))\right] + \mathbf{e}_z z_s(t), \\ \mathbf{v}_s^{(0)}(t) &= -\mathbf{e}_x v_\perp \cos(k_u z_s(t)) - \\ &- \mathbf{e}_y v_\perp \sin(k_u z_s(t)) + \mathbf{e}_z v_{z0}, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$r_u = \frac{cK}{k_u v_{z0}\gamma_0}, \quad v_\perp = \frac{cK}{\gamma_0}, \quad K = \frac{|e|H_0}{mc^2 k_u},$$

$$v_{z0} = v_0\left[1 - \left(\frac{K}{\gamma_0\beta_0}\right)^2\right]^{1/2},$$

$$z_s(t) = v_{z0}(t - t_{0s}), \quad \beta_0 = \frac{v_0}{c} = 1 - \gamma_0^{-2}.$$

Такую траекторию и скорость будет иметь электрон, инжектируемый вдоль оси z ($v_x = v_y = 0$, $v_z = v_0$ при $z \to -\infty$) в адиабатически увеличивающемся в области $z < 0$ магнитном поле ондулятора, амплитуда поля которого возрастает от нуля при $z \to -\infty$ до H_0 при $z = 0$.

Продольная компонента силы, действующей на один электрон в поле другого, определяется внешним магнитным полем и электромагнитным полем, создаваемым другим электроном. В общем случае выражения для полей заряда в ондуляторе (2), (3) громоздки, поскольку нахождение значения радиус-вектора излучающего электрона $r_s(t')$ в «запаздывающий» момент времени t' связано с решением трансцендентного уравнения. Для получения в явном аналитическом виде выражений для этих полей и, следовательно, выражения для силы Лоренца предположим, что ондуляторный параметр является малым: $K^2 \ll 1$. Кроме того, будем рассматривать взаимодействие электронов, обусловленное только магнитной составляющей силы Лоренца.

Разложим выражения для полей (2) и (3) в ряд по K с точностью до линейных по этому параметру членов и подставим затем эти поля в выражение (6). Удерживая в полученном выражении члены, определяющие изменения среднего квадратичного значения продольного импульса электронов на временном интервале Δt, большем λ_u/v_{z0} — времени пролета электроном расстояния, равного периоду ондулятора, получаем следующее выражение для продольной компоненты силы, действующей на i-й электрон в поле s-го электрона-излучателя:

$$F_{zs}\left[\mathbf{r}_i^{(0)}(t), t; q_{0s}\right] = -\left(\frac{eKk_u\beta_{z0}\gamma_{z0}^2}{\gamma_0}\right)^2 \times \\ \times G\left(\Delta z_{si}, \frac{\rho_{si}}{\gamma_{z0}}\right), \quad (22)$$

где

$$G(x,y) = \frac{1}{k_0 R_*} \times \left[\left(\beta_{z0} + \frac{x}{R_*} - \frac{\beta_{z0}}{k_0^2 R_*^2} - \frac{\beta_{z0} y^2}{2R_*^2} \right) \sin\psi + \left(\beta_{z0} + \frac{x}{R_*} \right) \frac{\cos\psi}{k_0 R_*} \right],$$

$$\psi(x,y) = k_u \gamma_{z0}^2 (x + \beta_{z0} R_*), \quad R_*(x,y) = (x^2+y^2)^{1/2},$$

$$\Delta z_{si} = v_{z0}(t_{0s} - t_{0i}),$$

$$\rho_{si} = \left[(x_{0s} - x_{0i})^2 + (y_{0s} - y_{0i})^2 \right]^{1/2},$$

$$k_0 = \beta_{z0} \gamma_{z0}^2 k_u, \quad \gamma_{z0} = \frac{\gamma_0}{(1+K^2)^{1/2}}.$$

Из выражения (22) следует, что в приближении моноэнергетического потока электронов сила взаимодействия двух электронов не зависит от времени, но зависит от расстояния между ними, выраженного через разность начальных поперечных координат и разность моментов времени влета электронов в ондулятор.

Подставляя выражение (22) в правую часть уравнения (20), проинтегрируем его по времени и по импульсам $\mathbf{p}_{0s}$. Переходя затем к независимой переменной z — расстоянию от входа в ондулятор, получим выражение для среднего квадратичного значения продольного импульса электрона:

$$\langle (\Delta p_{zi})^2 \rangle = 2 \left(\frac{\beta_{z0}}{c} \right)^2 \left(\frac{eKk_u \gamma_{z0}^2}{\gamma_0} \right)^4 \times \int\limits_0^z dz' (z - z') \Phi(z'), \quad (23)$$

$$\Phi = \iiint\limits_{V_0(z')} \left[G\left(\Delta z_{si}, \frac{\rho_{si}}{\gamma_{z0}} \right) \right]^2 n_b v_{z0} dt_{0s} dx_{0s} dy_{0s}, \quad (24)$$

где n_b — средняя плотность электронов, V_0 — область интегрирования по начальным поперечным координатам и моментам времени, в которые электроны пересекают плоскость $z = 0$.

Пределы интегрирования в правой части уравнения (24) определяются неравенством (4), в котором радиус-вектор $\mathbf{r}$ следует заменить координатой пробного электрона $\mathbf{r}_i(t)$. Полученное в результате такой замены неравенство равносильно двум неравенствам:

$$z \geq \Delta z_{si}, \quad (z - \Delta z_{si})^2 \geq \beta_{z0}(\rho_{si}^2 + z^2),$$

решение которых можно записать в виде

$$\Delta z_{si} + \beta_{z0} R_* \leq z/\gamma_{z0}^2. \quad (25)$$

Учтем теперь конечные поперечные размеры пучка. Считая пучок сплошным цилиндрическим радиуса r_b с осью, совпадающей с осью z, запишем условие, которому удовлетворяют поперечные координаты электронов:

$$r_{\perp s} = (x_{0s}^2 + y_{0s}^2)^{1/2} \leq r_b. \quad (26)$$

Таким образом, пределы интегрирования в уравнении (24) будут следовать непосредственно из совместного решения неравенств (25) и (26).

Предположим, что средняя плотность электронов n_b является однородной, т. е. не зависит от начальных поперечных координат x_{0s}, y_{0s} и времени t_{0s}. Принимая во внимание аксиальную симметрию силы парного взаимодействия пробного электрона с электронами-излучателями, целесообразно перейти от переменных интегрирования x_{0s}, y_{0s} и t_{0s} к новым переменным r', θ и φ ($0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$), связанным с первоначальными следующими соотношениями:

$$x_{0s} - x_{0i} = \gamma_{z0} r' \sin\theta \cos\varphi,$$

$$y_{0s} - y_{0i} = \gamma_{z0} r' \sin\theta \sin\varphi, \quad v_{z0}(t_{0s} - t_{0i}) = r' \cos\theta.$$

В новых переменных выражение (24) принимает вид

$$\Phi(z') = \frac{n_b}{(k_u \gamma_{z0} \beta_{z0})^2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \sin\theta \times \int\limits_0^{r'_{max}(z',\theta,\varphi)} dr' \left[\left(\beta_{z0} + \cos\theta - \frac{\beta_{z0}}{k_0^2 r'^2} - \frac{\beta_{z0}}{2} \sin^2\theta \right) \sin\psi + (\beta_{z0} + \cos\theta) \frac{\cos\psi}{k_0 r'} \right]^2, \quad (27)$$

где $\psi = k_u \gamma_{z0}^2 r' (\cos\theta + \beta_{z0})$.

Подынтегральное выражение в квадратных скобках в правой части уравнения (27) ограничено на интервале $[0, r_{max}]$ и при $r' \to 0$ стремится к нулю. В этом выражении учтено взаимодействие пробного заряда с электронами-излучателями, движущимися как за пробным зарядом, $z_s < z_i$ ($0 < \theta < \pi/2$), так и впереди него, $z_s > z_i$ ($\pi/2 < \theta < \pi$).

В общем случае предел интегрирования r'_{max} зависит от углов θ и φ вследствие конечного радиуса пучка. Для упрощения вычислений найдем разброс по продольному импульсу электронов, движущихся по оси пучка: $r_{\perp i} = 0$. В этом случае r'_{max} не зависит от φ, а неравенства (25) и (26) в новых переменных примут вид

$$r'(\cos\theta + \beta_{z0}) \le z'/\gamma_{z0}^2, \quad \gamma_{z0} r' \sin\theta \le r_b.$$

Из этих неравенств, а также из условия $t_{0s} > t_1$, где t_1 — момент времени, в который фронт пучка пересекает плоскость $z = 0$, определим предел интегрирования r'_{max}. Так, для значений $0 < z' < \mu\gamma_{z0} r_b$ находим

$$r'_{max} = r_1(z', \theta) \equiv \frac{z'}{\gamma_{z0}^2(\cos\theta + \beta_{z0})}, \quad 0 < \theta < \theta_1(z'), \tag{28}$$

где

$$\theta_1 = \pi - \arccos\frac{\beta_{z0}}{1 + z'/\gamma_{z0}^2 \Delta l}, \quad \xi = \frac{z'}{z_*},$$

$$z_* = \gamma_{z0} r_b, \quad \mu = \beta_{z0}\sqrt{1+\delta^2} - \delta, \quad \delta = \frac{\gamma_{z0}\Delta l}{r_b},$$

$\Delta l = v_{z0}(t_{0i} - t_1)$ — расстояние от пробной частицы до фронта пучка.

При $z' > \mu\gamma_{z0} r_b$ получим

$$r'_{max} = r_1(z', \theta), \quad 0 < \theta < \theta_*(z'), \tag{29}$$

$$r'_{max} = r_b/\gamma_{z0}\sin\theta, \quad \theta_*(z') < \theta < \theta_l, \tag{30}$$

где

$$\theta_* = \arccos\frac{\xi^2\sqrt{1 + (\gamma_{z0}\xi)^{-2}} - \beta_{z0}}{1 + \xi^2},$$

$$\theta_l = \pi/2 + \operatorname{arctg}\delta.$$

Заметим, что $\pi/2 \le \theta_l < \theta_1 \le \pi$.

Для углов θ, больших θ_l и θ_1, значение r'_{max} определяется расстоянием от пробной частицы до фронта пучка: $r'_{max} = \Delta l/|\cos\theta|$.

Предположим, что радиус пучка является достаточно большим, $2\pi r_b \gg \lambda_u/\gamma_{z0}$. Это условие означает, что в системе отсчета, движущейся с поступательной скоростью пучка, его радиус значительно больше длины волны излучения. Учитывая это условие, а также то, что изменение импульса электронов происходит на расстоянии, большем периода ондулятора, $z' \gg \lambda_u$, можно показать, что величина $\gamma_{z0}^2 k_u r'_{max}$ является большим параметром. Проводя интегрирование в правой части уравнения (27) по φ и r', оставляя слагаемые пропорциональные этому параметру, находим

$$\Phi(z') = \frac{\pi n_b}{(k_u\gamma_{z0}\beta_{z0})^2} \times \int_0^\pi d\theta \, \sin\theta \left(\beta_{z0} + \cos\theta - \frac{\beta_{z0}}{2}\sin^2\theta\right)^2 \times r'_{max}(z', 0). \tag{31}$$

Вычисляя интеграл в правой части этого уравнения в приближении $\gamma_0 \gg 1$, используя формулы (28)–(30), получаем:

$$\Phi(z') = \frac{\pi n_b}{k_u^2\gamma_{z0}^2}\left[\frac{z'}{\gamma_{z0}^2} I_1(\theta_1) + \Delta l \cdot I_3(\theta_1)\right], \quad 0 < z' < \mu z_*, \tag{32}$$

$$\Phi(z') = \frac{\pi n_b r_b}{k_u^2\gamma_{z0}^3}\left[\xi I_1(\theta_*) - I_2(\theta_*) + J(\delta)\right], \quad z' > \mu z_*, \tag{33}$$

где

$$I_1(\theta) = 1 - \frac{1}{16}(1 + \cos\theta)^4,$$

$$I_2(\theta) = \frac{35}{32}\theta + \left(\frac{5}{3} + \frac{27}{32}\cos\theta + \frac{\cos^2\theta}{3} + \frac{\cos^3\theta}{16}\right)\sin\theta,$$

$$I_3(\theta) = -\frac{1}{4}\left[\ln|\cos\theta| + \sum_{n=1}^{4}\frac{1}{n}(1+\cos\theta)^n\right],$$

$$J(\delta) = I_2(\theta_l) + \delta I_3(\theta_l).$$

Заметим, что формулы (32) и (33) применимы при $0 < \Delta l < \beta_{z0} r_b$, а при $\Delta l > \beta_{z0} r_b$, когда $\mu < 0$, надо использовать только формулу (33).

Подставив выражения (32) и (33) в правую часть уравнения (23) и проинтегрировав по z', можно найти аналитические зависимости среднеквадратичного разброса по импульсам от расстояния, пройденного электронами в ондуляторе. Поскольку полученные таким образом выражения являются громоздкими, приведем эти зависимости для расстояний, меньших и значительно бóльших z_*.

При $0 < z < \mu z_*$ подставляя выражение (32) в уравнение (23), используя представления функций I_1 и I_3 в области значений z' как меньших, так и больших $\gamma_{z0}^2\Delta l$, после интегрирования по z' находим

$$\left[\langle(\Delta p_z)^2\rangle\right]^{1/2} = e^2K^2\frac{k_u z}{c}\sqrt{\frac{\pi}{3}n_b z\alpha\left(\frac{z}{\gamma_{z0}^2\Delta l}\right)}, \tag{34}$$

где

$$\alpha(2x) = 1 - \frac{x^4}{35} \quad \text{при} \quad x < 1,$$

$$\alpha(x) = \frac{15}{16} + \frac{3}{4x}\left(\ln x - \frac{31}{12}\right) \quad \text{при} \quad x \gg 1.$$

На больших расстояниях, при $z \gg z_*$, функции $\xi I_1(\theta_*)$ и $I_2(\theta_*)$ обратно пропорциональны ξ. Подставляя выражение (33) в уравнение (23), пренебрегая этими слагаемыми, после интегрирования по z' получаем

$$\left[\langle(\Delta p_z)^2\rangle\right]^{1/2} = e^2 K^2 \frac{k_u z}{c}\sqrt{\pi n_b z_* J(\delta)}\,. \tag{35}$$

Зависимость разброса по импульсам электронов от расстояния между ними и фронтом пучка при $z \gg z_*$ определяется функцией $J(\delta)$, которую для малых и больших значений δ можно представить в виде

$$J(\delta) = \frac{35}{32}\frac{\pi}{2} + \frac{5}{3} - \frac{\delta}{4}(\ln\delta + 1) \quad \text{при} \quad \delta < 1,$$

$$J(\delta) = \frac{35}{32}\pi - \frac{1}{\delta^3} \quad \text{при} \quad \delta > 1.$$

Формулы (34) и (35) при $\Delta l = 0$ с точностью до коэффициентов порядка единицы совпадают с соответствующими формулами работы [10], в которой учтены поля только тех электронов-излучателей, которые движутся за рассматриваемыми пробными электронами.

Из выражений (34) и (35) следует, что с ростом Δl разброс по импульсам электронов незначительно увеличивается. Причина, по которой электроны-излучатели, движущиеся впереди рассматриваемых пробных электронов, не дают существенного вклада в разброс по импульсам, заключается в том, что сила, действующая на пробный электрон со стороны опережающих его электронов-излучателей, значительно меньше силы, действующей со стороны электронов-излучателей, движущихся за ним. Так, для электронов с одинаковыми начальными поперечными координатами сила их парного взаимодействия через поле электрона-излучателя, движущегося впереди него, в γ^2 раз меньше, чем через поле электрона-излучателя, движущегося на таком же расстоянии за ним. Таким образом, в непрерывном потоке ультрарелятивистских электронов с увеличением расстояния от электронов до фронта пучка (Δl) разброс по импульсам увеличивается незначительно, поскольку определяется в основном электромагнитными полями электронов-излучателей, движущимися за рассматриваемыми пробными электронами.

В заключение оценим область продольных координат, в которой справедливо проведенное в данном разделе рассмотрение. Для этого, исходя из формулы (20) (см. также (22)), считая, что электроны движутся с разной начальной скоростью, представим произведение сил парного взаимодействия в виде

$$F_z^{(1)}(t)F_z^{(1)}(t-\tau) = \\ = \mathrm{Re}\left[A(t)A^*(t-\tau)\exp\left(i\psi(t) - i\psi(t-\tau)\right)\right],$$

где $A(t)$ — комплексная амплитуда силы парного взаимодействия электронов,

$$\psi = k_u\gamma_s^2\left[\Delta r_\parallel + \beta_{zs}\sqrt{(\Delta r_\parallel)^2 + \frac{|\Delta\mathbf{r}_\perp|^2}{\gamma_s^2}}\,\right],$$

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_s(t), \quad \mathbf{r}_s(t) = \mathbf{r}_{0s} + \mathbf{v}_{0s}(t - t_{0s}),$$

$\mathbf{v}_{0s}$ — скорость s-го электрона в момент времени t_{0s}, индексами «$\|$» и «$\perp$» обозначены компоненты вектора, параллельные оси z и лежащие в плоскости, перпендикулярной этой оси. Поскольку нарушение корреляции движения электронов происходит в первую очередь за счет фазовых флуктуаций, а флуктуации амплитуд играют меньшую роль, можно пренебречь изменением амплитуд во времени. Считая, что разброс по скоростям в поперечном направлении меньше, чем в продольном $|\Delta\mathbf{v}_\perp| \ll \gamma_s|\Delta\mathbf{v}_z|$, где $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_{0i} - \mathbf{v}_{0s}$, находим:

$$\psi(t) - \psi(t-\tau) = k_u\gamma_s^2\tau|\Delta\mathbf{v}_z|.$$

Отсюда следует, что после характерного промежутка времени $\tau_c = \lambda_u/\gamma_s^2|\Delta\mathbf{v}_z|$ сила, действующая на отдельный электрон, стремится к некоторому нескоррелированному с первоначальной силой значению. Таким образом, формулы (34) и (35) описывают релаксацию импульса электронов в области координат $z < v_{z0}\tau_c = \lambda_u p_{z0}/|\Delta p_z|$, где $\Delta p_z = m\gamma_0^3\Delta v_z$ — разброс по импульсам в пучке.

5. ВЫВОДЫ

Основные результаты проведенного рассмотрения можно сформулировать следующим образом: для первоначально моноэнергетического потока релятивистских электронов в приближении малого значения параметра ондулятора в явном аналитическом виде получены выражения для среднеквадратичного разброса по импульсам электронов от расстояния, пройденного ими в ондуляторе. Существо метода описания изменения разброса по импульсам заряженных частиц состоит в представлении корреляционной функции для флуктуаций микроскопической силы через произведение сил парного взаимодействия частиц, усредненное по начальному распределению частиц в 6-мерном фазовом пространстве координат и импульсов. Записывая формулу (35) в виде

$$\left[\langle(\Delta p_z)^2\rangle\right]^{1/2} = \pi mcr_0 K^2 k_u z\sqrt{n_b r_b \gamma_{z0}}\,, \qquad (36)$$

положив $J = \pi$, а также используя (34), получим следующее выражение, определяющее величину разброса по импульсам на малых ($z < z_*$) и больших ($z \gg z_*$) расстояниях от входа в ондулятор:

$$\left[\langle(\Delta p_z)^2\rangle\right]^{1/2} = \langle\Delta p_z\rangle_R\sqrt{N\zeta}, \qquad (37)$$

где $\langle\Delta p_z\rangle_R \equiv (F_z)_R z/v_{0z}$,

$$(F_z)_R = (2/3)r_0^2 H_0^2\gamma_0^2\beta_{z0}^3$$

— сила торможения излучением отдельного электрона, $r_0 = e^2/mc^2$ — классический радиус электрона, $N = n_b\lambda_u^3/8\gamma_{z0}^4$,

$$\zeta = \frac{z}{2\lambda_u} \quad \text{при} \quad z < z_*,$$

$$\zeta = \frac{9\gamma_{z0}r_b}{2\lambda_u} \quad \text{при} \quad z \gg z_*.$$

В формуле (37) разброс по импульсам выражен через потери импульса, обусловленные торможением излучением отдельного электрона, и N — число частиц в кубе с характерной длиной ребра, равной длине волны излучения в системе покоя пучка. Такое представление этого разброса наглядно демонстрирует тот факт, что при $N\zeta > 1$ среднеквадратичный разброс по импульсам растет быстрее, чем изменение импульса, обусловленное радиационным торможением. Заметим, что наличие достаточно большой средней плотности электронов, при которой выполняется неравенство $N > 1$, является одним из необходимых условий реализации процесса самопроизвольного усиления спонтанного ондуляторного излучения [11, 12].

Из формулы (37) следует, что на больших расстояниях от входа в ондулятор $z \gg z_*$ разброс по импульсам увеличивается пропорционально первой степени этого расстояния. Такая зависимость разброса от z связана с увеличением отклонения импульса от среднего значения под действием независящих от времени сил парного взаимодействия электронов. При этом вследствие конечных поперечных размеров пучка число электронов-излучателей, взаимодействие с которыми приводит к указанному разбросу, практически не увеличивается по мере движения пучка в ондуляторе. Следует заметить, что на малых расстояниях, при $z < z_*$, увеличение среднеквадратичного разброса по импульсам связано не только с действием независящих от времени сил парного взаимодействия, но и с увеличением числа электронов-излучателей, в области влияния полей которых находится пробный электрон. При этом увеличение числа таких электронов-излучателей при постоянной их средней плотности связано только с увеличением линейных размеров области влияния. Поэтому при $z < z_*$ среднеквадратичный разброс по импульсам электронов увеличивается пропорционально пройденному ими расстоянию в степени три вторых.

В целом процесс увеличения разброса по импульсам электронов, описываемый формулами (34)–(37), можно рассматривать как докинетическую стадию диффузии электронов в пространстве импульсов.

Существенный вывод из результатов работы касается вопроса об условиях обеспечения самопроизвольного интенсивного усиления спонтанного излучения в ультракоротковолновых ЛСЭ. Введем величину z_{rad} — расстояние от входа в ондулятор, на котором смещение электронов относительно равновесной траектории, вследствие эффекта радиационной релаксации, равно длине волны ондуляторного излучения:

$$2z_{rad}\langle(\Delta p_z)^2\rangle^{1/2}\Big|_{z=z_{rad}} = \lambda_u p_{z0}.$$

Считая, что $z_{rad} \gg r_b\gamma_{z0}$, с помощью (36) получим оценку

$$z_{rad} = \frac{\gamma_0^{1/4}\lambda_u}{2\pi K(r_0^2 r_b n_b)^{1/4}}\,.$$

Условием реализации режима самопроизвольного интенсивного усиления спонтанного излучения является малый разброс по импульсам в электронном пучке (см., например, [6, 7]):

$$\frac{\langle(\Delta p_z)^2\rangle^{1/2}}{p_{0z}} < \frac{\lambda_u}{L_{sat}},$$

поэтому для существенного повышения результирующей интенсивности излучения в ЛСЭ характерное расстояние L_{sat}, на котором происходит насыщение неустойчивости, должно быть меньше z_{rad}. Если это условие не выполнено, то возникающий вследствие эффекта радиационной релаксации разброс по импульсам может препятствовать формированию вынужденного когерентного излучения.

Из оценок следует, например, что при получении электромагнитного излучения с длиной волны 1 Å, используя первоначально моноэнергетический электронный пучок с энергией 7.3 ГэВ, пиковым током 4 кА ($n_b = 10^{16}$ см$^{-3}$, $r_b = 52$ мкм) и ондулятор с амплитудой напряженности поля 2.2 кГс и периодом 3 см имеем длину радиационной релаксации 60 м. Длина ондулятора, необходимая для достижения насыщения при тех же параметрах пучка и ондулятора (см., например, [6, 7]: $L_{sat} = \lambda_u/\rho_{1D}$, где $\rho_{1D} = (K^2 n_b r_0 \lambda_u^2/16\pi)^{1/3}\gamma_0^{-1})$, составит 75 м, что превышает длину радиационной релаксации пучка. Таким образом, некогерентное электромагнитное поле спонтанного ондуляторного излучения может привести к увеличению энергетического разброса в ультрарелятивистском электронном пучке при движении в ондуляторе и к сопутствующему изменению процесса взаимодействия электронов пучка с полем излучения.

В заключение данного раздела остановимся кратко на вопросах применимости изложенных выше результатов. Прежде всего, следует заметить, что в устройствах класса ЛСЭ в нанометровом и более длинноволновом диапазонах динамику движения электронов пучка в ондуляторе могут определять процессы коллективного взаимодействия электронов с электромагнитным излучением, приводящие к развитию неустойчивостей на значительно меньших расстояниях, чем длина радиационной релаксации. Далее, использованное выше представление электромагнитных полей электронов через запаздывающие потенциалы в безграничном пространстве справедливо в том случае, если радиус электронного пучка и длина волны ондуляторного излучения (λ_u/γ_0) значительно меньше характерных поперечных размеров электродинамической структуры, в которой движется электронный пучок. Легко видеть, что в источниках ондуляторного излучения нанометрового и более коротковолнового диапазона длин волн, использующих ультрарелятивистские электронные пучки, это условие выполняется и с большим запасом. Наконец, представление электромагнитных полей, создаваемых электронами пучка при движении в ондуляторе, с помощью потенциалов Лиенара – Вихерта и описание самосогласованной динамики моноэнергетического потока электронов в поле их собственного ондуляторного излучения было реализовано в работах [11, 12] в приближении малого значения параметра ондулятора. Использование методов численного моделирования позволяет отказаться от некоторых приближений, учесть, например, большие значения параметра ондулятора, начальный энергетический разброс электронов (ср., например, [13, 14]). Однако при этом возникают ограничения, связанные в основном с возможностью моделировать движение только ограниченного числа частиц.

Автор благодарен А. Н. Лебедеву, А. А. Рухадзе и К. Н. Степанову за полезные обсуждения результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Изв. АН СССР, сер. физ. **11**(2), 165 (1947).
2. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, КЭ **5**, 1543 (1978).
3. М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, *Электродинамика плотных электронных пучков в плазме*, Наука, Москва (1990).
4. А. Н. Лебедев, А. В. Серов, ЖТФ **62**, 147 (1992).
5. V. V. Ognivenko, Probl. Atom. Sci. Technol. **5**, 7 (2006).
6. K.-J. Kim, Nucl. Instr. Meth. A **250**, 396 (1986).
7. C. Pellegrini, Particle Accelerators **33**, 159 (1990).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1967).
9. Н. Н. Боголюбов, *Проблемы динамической теории в статистической физике*, Гостехиздат, Москва (1947).
10. V. V. Ognivenko, Probl. Atom. Sci. Technol. **49**, 145 (2008).
11. В. И. Курилко, В. В. Огнивенко, ДАН **335**, 437 (1994).
12. В. И. Курилко, В. В. Огнивенко, Физика плазмы **20**, 634 (1994).
13. M. Tecimer and L. R. Elias, Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A **375**, 348 (1996).
14. L. R. Elias, 5^{th} *Europ. Particle Accelerator Conf.*, Barcelona, Spain (1996), Vol. 1, p. 724.