

КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СЛОЯ АТМОСФЕРЫ, НАСЫЩЕННОГО ВОДЯНЫМ ПАРОМ. ФОРМИРОВАНИЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОБЛАЧНЫХ СТРУКТУР

Б. Я. Шмерлин^{a,}, М. В. Калашиник^{a,b,c}, М. Б. Шмерлин^{a,d}*

*^a ФГБУ НПО «Тайфун», Институт экспериментальной метеорологии
249038, Обнинск, Калужская обл., Россия*

*^b Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова Российской академии наук
109017, Москва, Россия*

*^c Обнинский институт атомной энергетики — филиал НИЯУ «МИФИ»
249040, Обнинск, Калужская обл., Россия*

*^d Геофизическая служба Российской академии наук
249035, Обнинск, Калужская обл., Россия*

Поступила в редакцию 11 мая 2012 г.

Проведено обобщение классической задачи Рэлея о конвективной неустойчивости на случай наличия конденсации водяного пара в атмосфере. Представлено аналитическое решение, демонстрирующее принципиальное отличие влажной конвекции от конвекции Рэлея: кривая зависимости критического числа Рэлея от числа, характеризующего интенсивность конденсационного тепловыделения, состоит из двух частей, одной из которых соответствуют локализованные в пространстве нейтральные решения. Второй части кривой соответствуют периодические по пространству нейтральные решения, для них характерна существенная локализация областей восходящих движений. Теория описывает зарождение и развитие отдельных конвективных облаков и упорядоченных облачных структур.

1. ВВЕДЕНИЕ

Процессы влажной конвекции наиболее ярко выражены над океанами. На спутниковых фотографиях обнаруживаются разнообразные упорядоченные конвективные структуры в форме периодических облачных гряд или пространственных конвективных ячеек. Уже давно были установлены принципиальные несоответствия параметров облачных структур с предсказаниями модели конвективной неустойчивости Рэлея. Отношение горизонтального размера конвективной ячейки к вертикальному в модели Рэлея порядка единицы, в то время как для наблюдаемых облачных структур оно может достигать 30 и более [1–3]. Другое яркое несоответствие связано с наблюдаемой асимметрией в распределении восходящих и нисходящих движений — площадь облачного

покрова или площадь восходящих движений может составлять менее 10 % от всей площади, охваченной упорядоченной конвекцией [2, 3]. В связи с этим, в целом ряде работ рассматривалась обобщенная постановка классической задачи Рэлея — исследование устойчивости состояния равновесия слоя влажного насыщенного воздуха. При изучении динамики влажной конвекции, как правило, используют упрощенный подход, основанный на включении в уравнения тепловой конвекции объемного конденсационного источника тепла, который пропорционален вертикальной скорости на восходящей ветви циркуляции и отсутствует (обращается в нуль) на нисходящей. Такое представление отвечает конденсации избытка водяного пара с выделением скрытой теплоты и выпадением капель в виде дождя при подъеме влажного насыщенного воздуха, а также отсутствию поглощения тепла на испарение капель при опуска-

*E-mail: shmerlin@typhoon.obninsk.ru

нии (вследствие отсутствия капель). Поскольку границы областей восходящих и нисходящих движений заранее неизвестны, задача становится нелинейной, и ее рассмотрение ограничивалось либо проведением отдельных численных расчетов [1, 2, 4–10], либо анализом отдельных частных решений для невязкой нетеплопроводной атмосферы [11–14]. С учетом вязкости и теплопроводности нами была построена аналитическая теория влажноконвективной неустойчивости в приближении гидростатики [15–19]. Было обнаружено принципиальное отличие влажной конвекции от сухой конвекции Рэлея. Оказалось, в частности, что в общем случае область неустойчивости состоит из двух подобластей, в одной из которых наибольшей скоростью роста обладают локализованные возмущения со структурой урагана (тропического циклона) на ранней стадии развития. Приближение гидростатики, однако, вносит значительные искажения при описании движений с горизонтальным масштабом порядка толщины слоя. В работе предложена соответствующая теория в постановке, свободной от использования приближения гидростатики. Это позволяет распространить ее на описание зарождения отдельных конвективных облаков и упорядоченных облачных структур. Наиболее яркие отличия от конвекции Рэлея также связаны со структурой возмущений, развивающихся при потере устойчивости. В рассмотренной в работе двумерной задаче существует область значений параметров, при которых наибольшей скоростью роста обладают локализованные возмущения, отвечающие уединенному конвективному облачному валу. При других значениях параметров наибольшей скоростью роста обладают периодические структуры, описывающие пространственно-периодические системы облачных валов с узкими (сконцентрированными) областями восходящих движений. Полученные результаты позволяют объяснить упоминавшиеся выше особенности конвективных явлений во влажной атмосфере. Они могут быть полезны широкому кругу читателей, интересующихся конкретными задачами нелинейной динамики и общими вопросами теории самоорганизации в диссипативных средах.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И СХЕМА АНАЛИЗА

Имеется слой вязкой теплопроводной насыщен- ной водяным паром атмосферы толщины h , заклю- ченный между двумя твердыми горизонтальными границами. На горизонтальных границах поддержи-

ваются постоянные температуры, так что распреде- ление температуры в состоянии равновесия есть ли- нейная функция вертикальной координаты. Требу- ется исследовать устойчивость равновесного состоя- ния.

Исследование будем проводить в постановке, максимально приближенной к постановке классиче- ской задачи Рэлея [20, 21]. Система уравнений, тра- диционно используемая при численном моделирова- нии конвекции в атмосфере, для малых возмущений равновесного состояния имеет вид [22, 23]

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t &= -\nabla p + g\theta\mathbf{k} + \mu\Delta\mathbf{u}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \theta_t + \Gamma w &= \mu\Delta\theta + Q \end{aligned} \quad (1)$$

и рассматривается с граничными условиями Рэлея: $u_z = v_z = w = \theta = 0, z = 0, h$. Здесь \mathbf{u} — век- тор скорости с компонентами u, v, w вдоль гори- зонтальных осей x, y и направленной вверх оси z ; $p = p'/\bar{\rho}$; $\theta = \alpha T'$; p', T' — отклонения давления и температуры от равновесных распределений; α — ко- эффициент теплового расширения; $\bar{\rho}$ — постоянное среднее значение плотности; $\Gamma = \alpha(\gamma_a - \gamma)$ — пара- метр стратификации; $\gamma_a = g/c_p$ — сухоадиабатиче- ский градиент [24, 25]; g — ускорение свободного па- дения; c_p — теплоемкость при постоянном давлении; $\gamma = -d\bar{T}/dz$ — градиент температуры (со знаком «минус») в равновесном состоянии; μ — коэффици- ент турбулентного обмена; Δ — оператор Лапласа; \mathbf{k} — вертикальный орт; $Q = \alpha M/c_p$; M [Вт/кг] — интенсивность источника тепла. Так же, как в упо- мянутых работах по влажной конвекции [1, 2, 4–14], источник, связанный с выделением скрытой тепло- ты конденсации, будем представлять в виде

$$M = -L \frac{ds_m}{dt} = -Lw \frac{ds_m}{dz}$$

для восходящего потока насыщенного воздуха, $M = 0$ для нисходящего потока, где L — удельная теплота конденсации, s_m — массовая доля насыщен- ного пара. Вводя функцию Хэвисайда ($H(w) = 1, w > 0$; $H(w) = 0, w < 0$) и влажноадиабатический градиент [24–26]

$$\gamma_m = \gamma_a + \frac{L}{c_p} \frac{ds_m}{dz},$$

для конденсационного источника тепла получим

$$Q = \alpha(\gamma_a - \gamma_m)wH(w). \quad (2)$$

Физический смысл такого представления источника пояснен во Введении. Далее будем считать градиент γ_m постоянным.

Отметим, что использование граничных условий Рэлея является модельным упрощением, позволяющим получить результаты в аналитическом виде [20, 21]. В системе (1) вместо молекулярных коэффициентов вязкости и теплопроводности используется их аналог — коэффициент турбулентного обмена μ . В (1) также использовано уравнение непрерывности для несжимаемой жидкости. Приближение несжимаемости справедливо при описании конвекции в неглубоких слоях атмосферы. Условия его применимости приведены, например, в работе [22]. Система (1) с источником (2) принципиально не допускает линеаризации. Присутствие нелинейного источника составляет основную математическую особенность задачи.

Исследуется потеря устойчивости состояния покоя. Будем придерживаться подхода, предложенного нами в работах [15–19]. На первом этапе построим функцию Грина задачи. Далее в формулу для вертикальной скорости, представляющую свертку источника тепла с соответствующей функцией Грина, подставим источник тепла (2) и получим, таким образом, интегральное уравнение для определения вертикальной скорости. Из интегрального уравнения будет следовать система алгебраических уравнений, анализ которой позволит построить кривую зависимости критического значения числа Рэлея от числа, характеризующего интенсивность конденсационного тепловыделения, и определить пространственную структуру нейтральных решений, соответствующих каждой точке кривой.

3. ФУНКЦИЯ ГРИНА ЗАДАЧИ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СКОРОСТИ

Система уравнений и краевые условия допускают разделение переменных. Поскольку для конвекции Рэлея строго доказан монотонный характер неустойчивости [20, 21], мы также ограничимся рассмотрением монотонной неустойчивости и будем искать экспоненциально растущие решения вида

$$(u, v, p, w, \theta) = \left[(u(x, y)v(x, y), p(x, y)) \times \right. \\ \left. \times \cos \frac{\pi z}{h}, (w(x, y), \theta(x, y)) \sin \frac{\pi z}{h} \right] \exp(\kappa t). \quad (3)$$

В выражении (3) $u(x, y), \dots, \theta(x, y)$ — пространственные амплитуды соответствующих величин. Введем потенциал φ горизонтального движения, полагая $u = \partial\varphi/\partial x, v = \partial\varphi/\partial y$, исключим из систе-

мы (1) возмущение давления $p(x, y)$ и перейдем к безразмерным переменным

$$x = l_0 \tilde{x}, \quad y = l_0 \tilde{y}, \quad t = t_0 \tilde{t}, \\ w = w_0 \tilde{w}, \quad \theta = \theta_0 \tilde{\theta}, \quad \varphi = \varphi_0 \tilde{\varphi},$$

где

$$l_0 = \frac{h}{\pi}, \quad t_0 = \frac{l_0^2}{\mu}, \quad w_0 = \frac{\varphi_0}{l_0}, \quad \theta_0 = \frac{\mu\varphi_0}{gl_0^3},$$

φ_0 [$\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$] — произвольная величина. После указанных преобразований исходная система (1) сводится к системе трех уравнений относительно переменных $\tilde{\varphi}, \tilde{\theta}, \tilde{w}$, которая в векторной форме имеет вид (волну опускаем)

$$A\Delta_h \psi + B\psi = \mathbf{Q}, \quad (4)$$

$$\Delta_h \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \\ w \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \sigma + 1 & -1 & \sigma + 1 \\ 0 & \sigma + 1 & R \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ R_m w H(w) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (4) содержит два безразмерных параметра: число Рэлея

$$R = \frac{g\alpha(\gamma_a - \gamma)h^4}{\pi^4 \mu^2}$$

и число

$$R_m = \frac{g\alpha(\gamma_a - \gamma_m)h^4}{\pi^4 \mu^2},$$

характеризующее интенсивность конденсационного тепловыделения. Отметим, что используемая запись числа Рэлея отличается от традиционной [20, 21] знаком и множителем π^4 в знаменателе. Также в уравнение входит безразмерная скорость роста возмущений $\sigma = \kappa h^2 / \pi^2 \mu$. Критическому значению числа Рэлея R_{cr} соответствует $\sigma = 0$ ($\kappa = 0$). Рассмотрение общего случая $\sigma \neq 0$ позволяет построить на плоскости R_m, R кривые одинаковой безразмерной скорости роста наиболее неустойчивых возмущений и найти их пространственную структуру. Далее положим $\sigma = 0$.

Следуя подходу, предложенному в работе [27], для построения функции Грина источник тепла в средней строке вектора \mathbf{Q} заменим на δ -функцию от горизонтальных координат x', y' . Умножая уравнение (4) на матрицу A^{-1} , приходим к уравнению

$$\Delta_h \psi - C\psi = A^{-1}\mathbf{Q}, \quad C = -A^{-1}B.$$

Собственные числа $\lambda_i^2, i = 1, 2, 3$, матрицы C удовлетворяют характеристическому уравнению

$$(1 - \lambda^2)^3 = R\lambda^2. \quad (5)$$

Если собственные числа λ_i^2 различны, существует матрица T , приводящая C к диагональному виду: $T^{-1}CT = \Lambda$, где Λ — диагональная матрица, диагональ которой состоит из собственных чисел λ_i^2 матрицы C , T — матрица, столбцами которой являются соответствующие собственные векторы матрицы C . В уравнении для ψ проведем замену переменных $\psi = T\sigma$, умножим полученное уравнение на матрицу T^{-1} и придем, таким образом, к векторному уравнению с диагональной матрицей, которое распадается на три скалярных уравнения Гельмгольца

$$\Delta_h \sigma_i - \lambda_i^2 \sigma_i = F_i,$$

где F_i — пропорциональны δ -функции. Функции Грина этих уравнений, а следовательно, и решения σ_i , хорошо известны. Выполняя обратное линейное преобразование $\psi = T\sigma$, получим функции Грина $G_{\varphi, \theta, w}$ для каждой из компонент φ, θ, w вектора ψ . Они являются соответствующими линейными комбинациями функций Грина уравнений Гельмгольца. Подстановка источника $Q = R_m w \mathbf{H}(w)$ в выражение для w , представляющее свертку источника с функцией Грина G_w , приводит к искомому интегральному уравнению для нахождения амплитуды вертикальной скорости.

Далее ограничимся рассмотрением задачи в плоской геометрии, когда нет зависимости от одной из горизонтальных координат (координаты y). Тогда

$$w(x) = R_m \int_{w>0} G_w(x - x') w(x') dx', \quad (6)$$

где

$$G_w(\zeta) = - \sum_{i=1}^3 \frac{\lambda_i}{d_i} \exp(-\lambda_i |\zeta|), \quad d_i = 2 \prod_{j,j \neq i} (\lambda_j^2 - \lambda_i^2),$$

$G_w(x - x')$ — функция Грина для вертикальной скорости задачи с плоской геометрией.

В случае кратных собственных чисел матрицы C будем переходить к пределу и раскрывать возникающие неопределенности в получаемых соотношениях.

Поскольку выделенное направление по координате x в задаче отсутствует, локализованные решения $w(x)$ будем искать в классе четных функций. Ограничимся рассмотрением решений с односвязной областью восходящих движений $|x| \leq x_0$, где x_0 — радиус области восходящих движений. Аналогичным образом периодические решения будем искать в классе четных функций с односвязными областями восходящих движений $|x| \leq x_0$ и нисходящих движений $x_0 < |x| \leq L_*$ внутри периода $|x| \leq L_*$. Величину $L = L_* - x_0$ назовем радиусом области нисходящих движений. Для периодических решений с периодом $2L_*$ имеем

$$w(x) = R_m \int_0^{x_0} [G_w^*(x - x') + G_w^*(x + x')] w(x') dx', \quad (7)$$

где

$$G_w^*(\zeta) = - \sum_{i=1}^3 \frac{\lambda_i \operatorname{ch}[\lambda_i (L_* - |\zeta|)]}{d_i \operatorname{sh}(\lambda_i L_*)},$$

$G_w^*(x - x')$ — периодическая функция Грина. Она может быть получена из (6) суммированием бесконечного ряда интегралов по всем областям восходящих движений периодического решения подобно тому, как это сделано в работах [16, 17] в приближении гидростатики. С другой стороны, она представляет собой линейную комбинацию функций Грина крайних задач с условиями периодичности

$$\sigma_i'' - \lambda_i^2 \sigma_i = F_i,$$

$$\sigma_i(-L_*) = \sigma_i(L_*), \quad \sigma_i'(-L_*) = \sigma_i'(L_*).$$

Функция Грина G_w является пределом функции G_w^* при $L_* \rightarrow \infty$. Таким образом, для построения локализованных решений в интегральном уравнении (7) функцию G_w^* следует заменить на G_w . Радиус области восходящих движений x_0 заранее неизвестен и должен определяться в процессе решения задачи с использованием очевидного соотношения $w(x_0) = 0$. Решениями задачи являются решения интегрального уравнения (7), удовлетворяющие условиям $w(x) \geq 0, x \in (0, x_0)$ и $w(x) \leq 0, x \in (x_0, L_*)$, которые назовем условиями знакоопределенности (для локализованных решений второе из условий имеет вид $w(x) \leq 0, x \in (x_0, \infty)$). Решения, не удовлетворяющие указанным условиям, будем называть незначкоопределенными.

Классической задаче Рэлея отвечает значение $R_m = 0$. Исходная система уравнений становится

линейной, ее решение известно [20]. При традиционном определении числа Рэля неустойчивости соответствует $R \geq R_{cr} \equiv 27\pi^4/4$. В принятых нами обозначениях критическое значение числа Рэля составляет $R_{cr} = -27/4$, неустойчивости соответствует $R \leq -27/4$, нейтральное решение имеет вид $w(x) = \cos(x/\sqrt{2})$, откуда $x_0 = L = 0.5L_* = \pi/\sqrt{2}$. Целью работы является построение кривой $R_{cr}(R_m)$ при $R_m > 0$ ($R_{cr} > -27/4$) и анализ структуры нейтральных решений, соответствующих каждой точке кривой.

Проанализируем пространственную структуру функции Грина $G_w(x)$. Вместо числа Рэля $-27/4 \leq R < \infty$ введем параметр $0 < \lambda \leq 2$, являющийся действительным корнем характеристического уравнения (5). Использование λ в качестве независимого параметра позволяет получить выражения для корней (5) с помощью теоремы Виета (ниже в (8) $i = \sqrt{-1}$):

$$\lambda_{1,2} = \lambda_0 \mp i\lambda^*, \quad \lambda_0 = \frac{(\lambda + 1)\sqrt{2 - \lambda}}{2\sqrt{\lambda}}, \quad (8)$$

$$\lambda^* = \frac{(\lambda - 1)\sqrt{2 + \lambda}}{2\sqrt{\lambda}}; \quad \lambda_3 = \lambda.$$

Для функции Грина из (6) получим

$$G_w(x) = \frac{1}{2} \frac{\lambda^3}{(\lambda^2 - 1)^2(2\lambda^2 + 1)} \left\{ \frac{2\sqrt{2\lambda^2 + 1}}{\lambda^{3/2}\sqrt{4 - \lambda^2}} \times \right.$$

$$\left. \times \exp(-\lambda_0|x|) \sin(\varphi - \lambda^*|x|) - \exp(-\lambda|x|) \right\}, \quad (9)$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)\sqrt{2 + \lambda}}{(\lambda^2 + \lambda + 1)\sqrt{2 - \lambda}}, \quad 0 < \varphi < \pi/2.$$

При $0 < \lambda \leq 1$ ($R \geq 0$) функция Грина локализована в окрестности источника тепла, т.е. на бесконечности экспоненциально затухает без смены знака $G_w(\infty) < 0$ (в случае кратных корней $\lambda = 1$ выполнен соответствующий предельный переход). При $\lambda_1 \leq \lambda \leq 1$, $\lambda_1 = 2^{-1/3} \exp(-4\pi/3) \approx 0.012$, функция Грина имеет единственную центральную область восходящих движений (рис. 1). При $\lambda = \lambda_k = 2^{-1/3} \exp(-4\pi k/3)$ появляется симметричная относительно источника тепла дополнительная к центральной k -я область восходящих движений. Таким образом, с уменьшением λ , $\lambda < \lambda_1$, количество дополнительных областей восходящих движений функции Грина растет, однако интенсивность восходящих движений в дополнительных максимумах оказывается ничтожно малой по сравнению с $G_w(0)$. В области значений $1 < \lambda \leq 2$

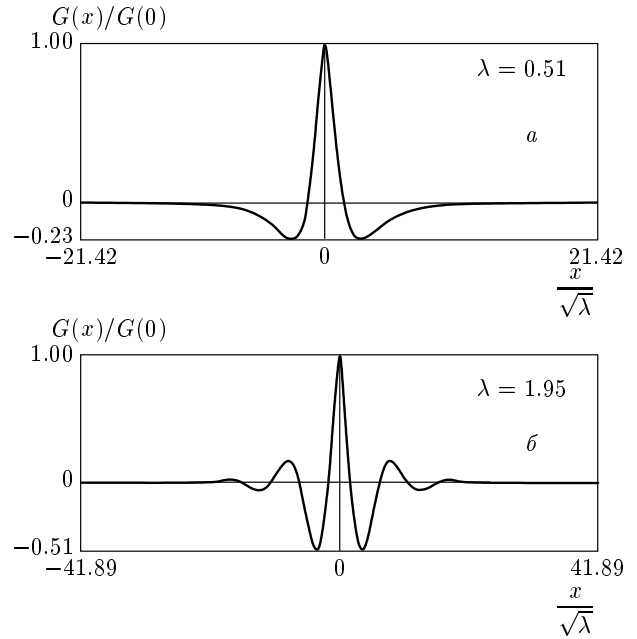


Рис. 1. Функция Грина для вертикальной скорости при различных значениях параметра λ : локализованная (а) и осциллирующая на бесконечности (б)

($-27/4 \leq R < 0$) функция Грина экспоненциально затухает и осциллирует на бесконечности со сменой знака (рис. 1). Пространственный период осцилляций $L_G = 2\pi/\lambda^*$ меняется от бесконечности при $\lambda \rightarrow 1$ до периода наиболее неустойчивых возмущений конвекции Рэля $L_R = 2\sqrt{2}\pi$ при $\lambda \rightarrow 2$ ($R \rightarrow -27/4$).

По своему физическому содержанию функции Грина $G_{\varphi,\theta,w}$ описывают циркуляцию, создаваемую точечным по координате x источником тепла. Поскольку с восходящими движениями связано конденсационное тепловыделение, из физических соображений понятно, что пространственная структура наиболее неустойчивых возмущений должна определяться пространственной структурой функции Грина для вертикальной скорости. В случае локализованной функции Грина, по крайней мере в области значений $\lambda_1 \leq \lambda \leq 1$, при достаточно большом конденсационном тепловыделении наибольшей скоростью роста должны обладать локализованные в пространстве возмущения. В случае осциллирующей на бесконечности функции Грина наибольшей скоростью роста должны обладать пространственно-периодические структуры, пространственный период которых определяется периодом осцилляций функции Грина $L_G = 2\pi/\lambda^*$. Дальнейшее изложе-

ние полностью подтверждает эти предположения строгими результатами.

4. ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ И ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Как указано выше, локализованные решения могут быть получены, если в формуле (7) функцию Грина G_w^* заменить на функцию Грина G_w . С другой стороны, локализованные решения можно рассматривать как периодические решения с бесконечным периодом $L_* = \infty$. Для единообразия используем второй подход. В области $x \in (0, x_0)$ система (4) может быть сведена к одному линейному дифференциальному уравнению относительно $w(x)$ шестого порядка. Поскольку решения (7) разыскиваются в классе четных функций, будем искать их в форме

$$w(x) = \sum_{i=1}^3 c_i \frac{\text{ch}(p_i x)}{\text{ch}(p_i x_0)}$$

с неопределенными коэффициентами c_i, p_i . После того как решение во влажной области $0 \leq x \leq x_0$ будет найдено, $w(x)$ в сухой области $x \in (x_0, L_*)$ получается соответствующим интегрированием в (7). Подставляя выражение для $w(x)$ в краевое условие $w(x_0) = 0$, а также в правую и левую части интегрального уравнения (7), интегрируя и приравнявая нулю коэффициенты перед $\text{ch}(p_i x)$ и перед появляющимися при интегрировании $\text{sh}(p_i x)$, получим характеристическое уравнение

$$(1 - p^2)^3 + (R_m - R)p^2 = 0 \tag{10}$$

для определения p_i^2 и систему уравнений для определения c_i и x_0 :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 c_i &= 0, \quad \sum_{i=1}^3 \frac{c_i}{p_i^2 - \lambda_j^2} p_i \text{th}(p_i x_0) = \\ &= - \sum_{i=1}^3 \frac{c_i}{p_i^2 - \lambda_j^2} \lambda_j \text{th}(\lambda_j L), \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{11}$$

В системе (11) фигурируют корни характеристических уравнений (5), (10). В дополнение к параметру $0 < \lambda \leq 2$ введем второй параметр $0 \leq q < 1$, который также позволяет получить выражения для корней характеристического уравнения (10) не решая его, а воспользовавшись теоремой Виета (в (12) $i = \sqrt{-1}$):

$$\begin{aligned} p_1 &= i \frac{1 - q}{\sqrt{2(1 + q)}} \equiv iP_1, \\ p_2 &= i \frac{1 + q}{\sqrt{2(1 - q)}} \equiv iP_2, \quad p_3 = \frac{2}{\sqrt{1 - q^2}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Все дальнейшее рассмотрение будем проводить на плоскости новых параметров λ, q . Параметры задачи $-27/4 \leq R < \infty, 0 \leq R_m < \infty$ связаны с ними соотношениями

$$R = \frac{(1 - \lambda^2)^3}{\lambda^2}, \quad R_m - R = \frac{(q^2 + 3)^3}{4(1 - q^2)^2}. \tag{13}$$

Система (11) есть однородная система из четырех уравнений относительно трех коэффициентов c_1, c_2, c_3 . Она имеет нетривиальные решения, если два определителя третьего порядка матрицы системы равны нулю (ранг матрицы равен двум). При выполнении этого условия общее решение системы имеет вид

$$c_2 = -Bc_1, \quad c_3 = -(1 - B)c_1, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} B &= \left[-\frac{\Delta_{13} - \Delta_{33}}{Dp_3} + \text{th}(p_3 x_0) \right] \times \\ &\times \left[-\frac{\Delta_{23} - \Delta_{33}}{Dp_3} + \text{th}(p_3 x_0) \right]^{-1}, \end{aligned} \tag{15}$$

а само условие совместности дает систему из двух уравнений:

$$\text{tg}(P_1 x_0) = -\frac{(\Delta_{21} - \Delta_{31})B + (\Delta_{31} - \Delta_{11})}{P_1 D} \equiv F_1, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \text{tg}(P_2 x_0) &= \\ &= -\frac{(\Delta_{12} - \Delta_{32})B^{-1} + (\Delta_{32} - \Delta_{22})}{P_2 D} \equiv F_2. \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь D — детерминант матрицы с элементами $D_{ij} = 1/(p_j^2 - \lambda_i^2)$, Δ_{ji} — детерминанты матриц, которые получаются из матрицы с элементами D_{ij} заменой j -го столбца на столбец с элементами $\lambda_k \text{th}(\lambda_k L)/(\lambda_k^2 - p_i^2)$, $k = 1, 2, 3$.

Из уравнений (16), (17) следует, что

$$P_1 x_0 = \text{arctg} F_1 + n\pi, \quad P_2 x_0 = \text{arctg} F_2 + m\pi, \tag{18}$$

где $n \geq 0, m > n$. Назовем решения, соответствующие различным значениям n и m , модами. Корень $p_3 > P_2$, поэтому $p_3 x_0 > (m - 1/2)\pi$ для моды с номером m . Отсюда для мод с номером $m > 1$ имеем $\text{th}(p_3 x_0) \approx 1$. В случае моды $n = 0, m = 1$ заведомо выполняется соотношение $\text{th}(p_3 x_0) > \text{th}(\pi/2) = 0.917$. Положим далее $\text{th}(p_3 x_0) \equiv 1$. Для моды $n = 0, m = 1$ из решения задачи следует $p_3 x_0 > 5\pi/4$, соотношение $\text{th}(p_3 x_0) = 1$ выполняется с точностью до четвертого знака, и указанная замена является вполне оправданной для

всех мод. Таким образом, далее $B \equiv B(\lambda, q, L)$, $F_{1,2} \equiv F_{1,2}(\lambda, q, L)$. Явные выражения для функций $B(\lambda, q, L)$, $F_{1,2}(\lambda, q, L)$, приведены в Приложении А. Из (18) следует, что

$$x_0 = \frac{1}{P_1 + P_2} [(n + m)\pi + \arctg F_1(\lambda, q, L) + \arctg F_2(\lambda, q, L)], \quad (19)$$

$$\left(\frac{1 - q}{1 + q}\right)^{3/2} = \frac{\arctg F_1(\lambda, q, L) + n\pi}{\arctg F_2(\lambda, q, L) + m\pi} \equiv \Phi. \quad (20)$$

Для каждой моды при фиксированном L уравнение (20) задает в неявном виде кривую на плоскости λ, q , на которой существует решение интегрального уравнения (7) с указанным значением L . Радиус области восходящих движений x_0 такого решения определяется соотношением (19). Пространственная структура $w(x)$ во влажной области $0 \leq x \leq x_0$ с точностью до множителя дается выражением

$$w(x) = c_1 \left[\frac{\cos(P_1 x)}{\cos(P_1 x_0)} - B \frac{\cos(P_2 x)}{\cos(P_2 x_0)} - (1 - B) \frac{\text{ch}(p_3 x)}{\text{ch}(p_3 x_0)} \right]. \quad (21)$$

Выражение для $w(x)$ в сухой области $x_0 < x \leq L_*$ приведено в Приложении В. Для случая локализованных мод в Приложениях А, В выполнен переход к пределу $L \rightarrow \infty$.

При различных значениях L кривые (20) на плоскости λ, q заполняют область, в каждой точке которой существует решение интегрального уравнения (7). Такое решение может быть знакоопределенным. Кривой $R_{cr}(R_m)$ соответствует нижняя граница области существования знакоопределенных решений уравнения (7) на плоскости λ, q , а нейтральными решениями являются решения, соответствующие указанной границе. В следующем разделе будут построены области существования различных мод на плоскости λ, q и приведены результаты анализа их знакоопределенности. Это позволит определить искомую границу.

5. ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РАЗЛИЧНЫХ МОД НА ПЛОСКОСТИ λ, q И АНАЛИЗ ИХ ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТИ

Численный алгоритм построения кривых (20) изложен в Приложении С. Подробно остановимся на результатах, полученных для моды $n = 0, m = 1$. На рис. 2 приведены несколько кривых (20) при различных значениях L для этой моды. В области $0 < \lambda \leq 1$

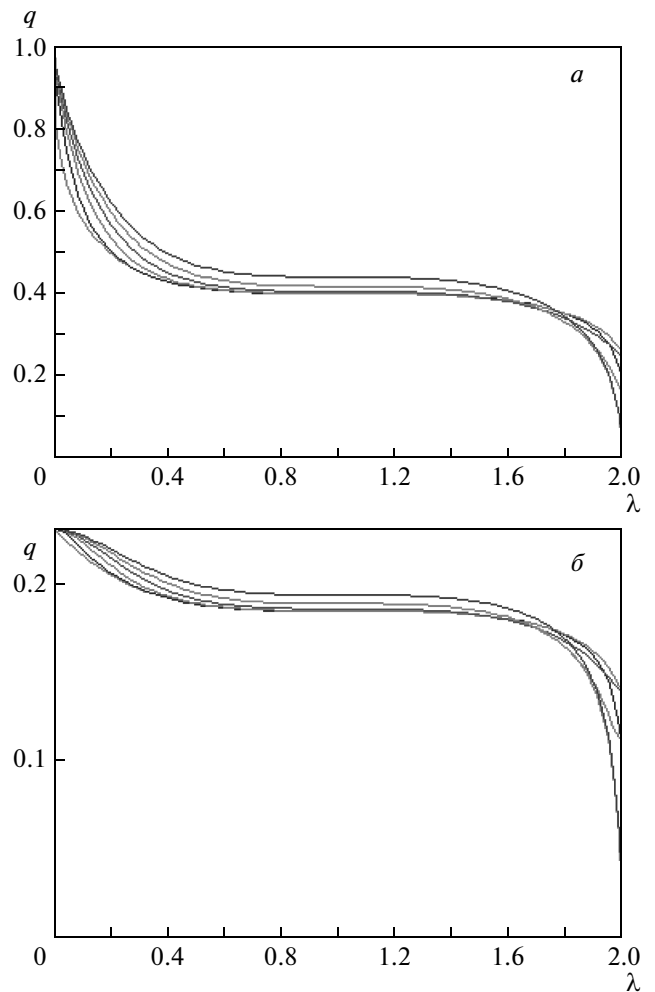


Рис. 2. Кривые, определяемые формулой (20), при различных фиксированных значениях параметра L для моды $n = 0, m = 1$ (а) и моды $n = 1, m = 2$ (б). В области $0 < \lambda \leq 1$ с ростом L кривые опускаются, и ниже всех лежит кривая $q = \varphi_1(\lambda)$, соответствующая локализованной моде $L = \infty$. В области $1 < \lambda \leq 2$ кривые пересекаются и имеют огибающую $q = \varphi_2(\lambda)$, ограничивающую область, занимаемую кривыми, снизу

указанные кривые не пересекаются, и нижней границей области существования моды является кривая $q = \varphi_1(\lambda)$, соответствующая $L = \infty$, т.е. локализованной моде. В области $1 < \lambda \leq 2$ кривые, соответствующие различным значениям L , пересекаются друг с другом. Нижней границей области существования моды является их огибающая. По аналогии с задачей в приближении гидростатики [18, 19]

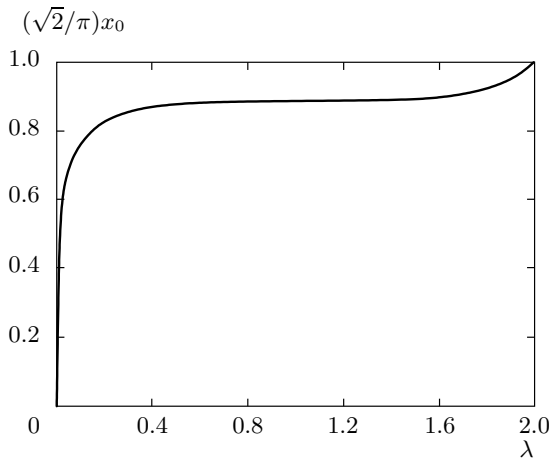


Рис. 3. Зависимость $x_0(\lambda)$ для решений, соответствующих кривой $q = \varphi(\lambda)$ моды $n = 0, m = 1$

мы полагаем, что огибающей соответствует значение

$$L(\lambda) = \frac{L_G}{4} = \frac{\pi}{2\lambda^*} = \frac{\pi\sqrt{\lambda}}{(\lambda - 1)\sqrt{2 + \lambda}}. \quad (22)$$

Это означает, что в точке λ с огибающей соприкасается кривая, для которой L определяется указанным соотношением. Физический смысл соотношения (22) состоит в том, что радиус области нисходящих движений нейтрального возмущения совпадает с радиусом областей нисходящих движений функции Грина. Как показано в приближении гидростатики, в этом заключается механизм влияния пространственной структуры осциллирующей функции Грина на структуру нейтрального пространственно-периодического решения. Уравнение огибающей $q = \varphi_2(\lambda)$ получается подстановкой соотношения (22) для $L(\lambda)$ в (20), соответствующие результаты приведены в конце Приложения А. Анализ результатов численных расчетов полностью подтверждает справедливость предположения (22). Аналогичной подстановкой в Приложении В находится пространственная структура $w(x)$ в сухой области для решений, соответствующих огибающей. Таким образом, нижняя граница области существования моды $q = \varphi(\lambda)$ состоит из двух гладко-сопряженных в точке $\lambda = 1$ кривых $q = \varphi_{1,2}(\lambda)$. Она имеет асимптотики

$$1 - q = 2 \left(\frac{5\pi}{4} - 1 \right)^{-2/5} \lambda^{2/5}, \quad \lambda \rightarrow 0;$$

$$q^* = 0.4, \quad \lambda = 1; \quad q^2 = 2 - \lambda, \quad \lambda \rightarrow 2.$$

После того как зависимость $q = \varphi(\lambda)$ найдена, из (19) находится зависимость $x_0(\lambda)$ для решений, соот-

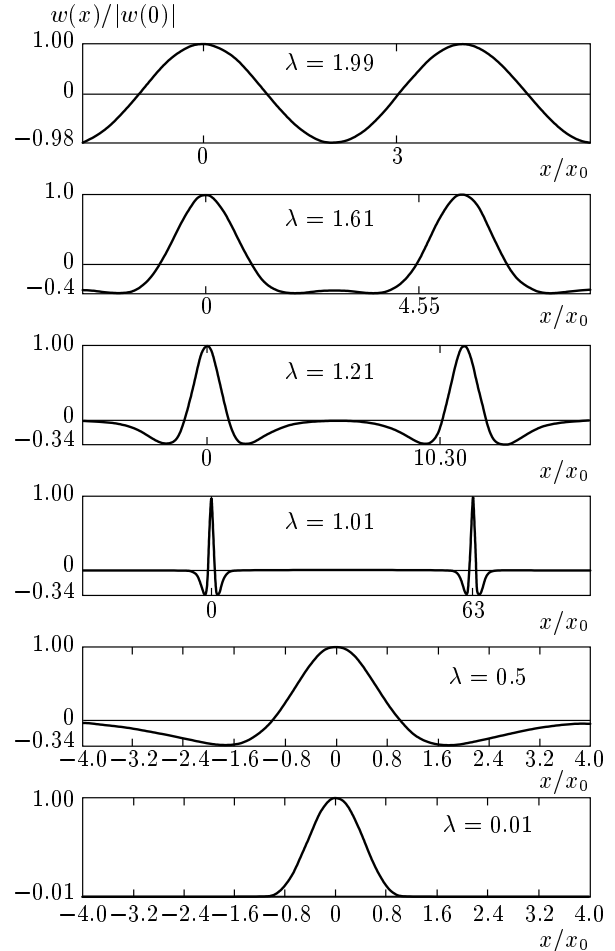


Рис. 4. Зависимости $w(x)$ для решений, соответствующих кривой $q = \varphi(\lambda)$ моды $n = 0, m = 1$, при различных значениях параметра λ . Значениям $0 < \lambda \leq 1$ соответствуют локализованные решения

ветствующих границе $q = \varphi(\lambda)$ (рис. 3). Для кривой $x_0(\lambda)$ имеем

$$x_0 = \frac{5\pi}{4} \left(\frac{5\pi}{4} - 1 \right)^{-1/5} \lambda^{1/5}, \quad \lambda \rightarrow 0;$$

$$x_0 = 1.97, \quad \lambda = 1; \quad x_0 = \pi/\sqrt{2}, \quad \lambda = 2.$$

Приведенные выше асимптотики кривых получены в Приложениях С, D, E, где рассмотрены предельные случаи соответственно $\lambda = 1$ ($R = 0$), $\lambda \rightarrow 0$ ($R_m, R \rightarrow \infty$) и $\lambda \rightarrow 2$ ($R_m \rightarrow 0, R \rightarrow -27/4$). После определения $x_0(\lambda)$ строятся зависимости $w(x)$, соответствующие каждой точке λ кривой $q = \varphi(\lambda)$ (рис. 4). Анализ показывает, что найденные решения удовлетворяют условию знакоопределенности всюду на кривой $q = \varphi(\lambda)$, за исключением малой

окрестности нуля $0 < \lambda < \lambda^*$, $\lambda^* \approx \exp(-25\pi/6)$ ($R > \exp(25\pi/3)$), которая не представляет физического интереса (см. Приложение D). Потеря знакоопределенности выражается в том, что в сухой области появляются симметричные относительно начала координат дополнительные области восходящих движений аналогично тому, как это происходило с функцией Грина. По-видимому, при $\lambda < \lambda^*$ необходимо разыскивать локализованные решения с соответствующей пространственной структурой, которые и будут нейтральными. Далее для краткости будем говорить, что мода $n = 0$, $m = 1$ знакоопределена всюду на кривой $q = \varphi(\lambda)$, имея в виду высказанные выше замечания. По известным распределениям $w(x)$ однозначно находится компонента скорости $u(x)$, компонента скорости $v(x)$ в задаче отсутствует. На рис. 5 представлена картина линий тока локализованного решения, соответствующего кривой $q = \varphi_1(\lambda)$, и периодического, соответствующего кривой $q = \varphi_2(\lambda)$ для моды $n = 0$, $m = 1$

Локализованное решение представляет собой локализованный конвективный вал: в нижней половине слоя имеет место приток воздуха к оси симметрии, в верхней — отток от оси, вблизи оси происходит подъем воздуха, сопровождающийся конденсацией и выпадением осадков, на периферии — опускание. Периодическое решение описывает пространственно-периодический ансамбль облачных валов с расстоянием между ними $2L$. При $\lambda \rightarrow 1$ отношение $x_0/L \rightarrow 0$, т.е. имеет место ярко выраженная горизонтальная асимметрия в распределении размеров областей восходящих и нисходящих движений. Поскольку полный вертикальный перенос массы в пределах ячейки отсутствует, интенсивность восходящих движений значительно превосходит интенсивность нисходящих. При переходе через точку $\lambda = 1$ от периодических к локализованным решениям пространственная структура решения меняется непрерывным образом, в частности, период $L_* \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow 1$. При $\lambda \rightarrow 2$ ($R_m \rightarrow 0$, $R \rightarrow -27/4$) имеет место предельный переход к классической сухой конвекции Рэлея: $x_0 = L = 0.5L_* = \pi/\sqrt{2}$ (см. Приложение E).

Точно так же устроены границы областей существования других мод. На рис. 6 приведены указанные границы для мод $n = 0$, $m = 1, 2, \dots, 5$ и для мод $n = 1$, $m = 2, 3, \dots, 6$. Анализ предельных случаев теории и результатов численных расчетов позволяет утверждать, что моды с номерами $n > 0$ являются незнакоопределенными не только на соответствующих им границах $q = \varphi(\lambda)$, но также всюду на кривых (20), соответствующих всем различным значениям L . Моды с номерами $n = 0$, $m > 1$ знакоопре-

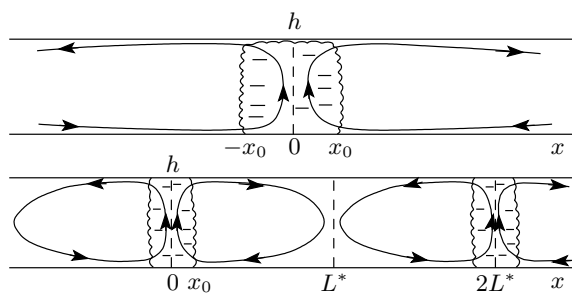


Рис. 5. Картина линий тока локализованного решения, соответствующего кривой $q = \varphi_1(\lambda)$ (вверху), и периодического, соответствующего кривой $q = \varphi_2(\lambda)$ (внизу), для моды $n = 0$, $m = 1$

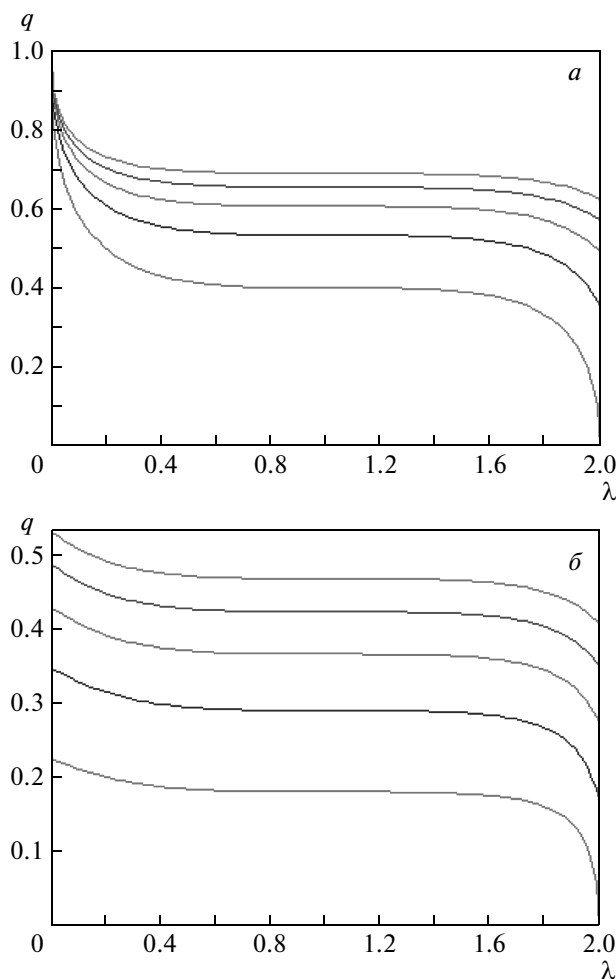


Рис. 6. Кривые $q = \varphi(\lambda)$ для мод $n = 0$, $m = 1, 2, \dots, 5$ (а) и для мод $n = 1$, $m = 2, 3, \dots, 6$ (б). Чем больше номер моды m , тем выше расположены соответствующие этой моде кривые. Нижняя кривая на верхнем рисунке определяет зависимость $R_{cr}(R_m)$

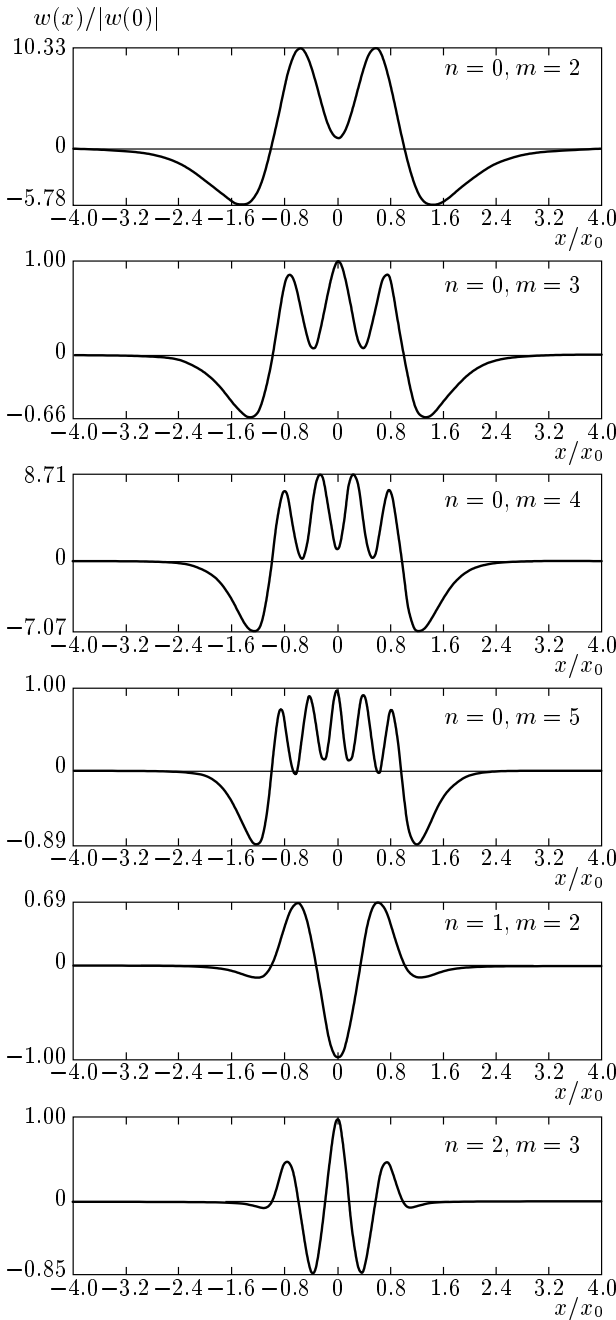


Рис. 7. Распределения $w(x)$ для различных локализованных мод при $\lambda = 1$

делены лишь на части соответствующих им кривых $q = \varphi(\lambda)$. На рис. 7 приведены распределения $w(x)$, соответствующие значению $\lambda = 1$, для локализованных знакоопределенных мод $n = 0, m = 2, 3, 4$, для незнакоопределенной моды $n = 0, m = 5$, а также для незнакоопределенных мод $n = 1, m = 2$ и $n = 2, m = 3$.

Таким образом, кривой $R_{cr}(R_m)$ на плоскости λ, q соответствует кривая $q = \varphi(\lambda)$ для моды $n = 0, m = 1$, а построенные выше в каждой точке кривой $q = \varphi(\lambda)$ решения являются соответствующими нейтральными решениями.

6. ЗАВИСИМОСТЬ $R_{cr}(R_m)$ И НЕЙТРАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Возвращаясь к исходным параметрам R_m, R с использованием (13), получаем кривую зависимости $R_{cr}(R_m)$ (рис. 8). Она имеет асимптотики

$$R_{cr} = -27/4 + R_m/2, \quad R_m \rightarrow 0;$$

$$R_{cr} = 0, \quad R_m = 11.22 \equiv R_m^*;$$

$$R_{cr} = R_m - (5\pi/4 - 1)^{4/5} R_m^{2/5}, \quad R_m \rightarrow \infty,$$

следующие из асимптотик кривой $q = \varphi(\lambda)$. Область неустойчивости лежит ниже кривой. Вспомогательное определение R, R_m , два последних соотношения можно записать в альтернативном виде:

$$\gamma_{cr} = \gamma_a, \quad R_m = R_m^*;$$

$$\gamma_{cr} \approx \gamma_m + (\gamma_a - \gamma_m)(5\pi/4 - 1)^{4/5} R_m^{-3/5}, \quad R_m \rightarrow \infty.$$

Кривая $R_{cr}(R_m)$ состоит из двух частей, границей между ними является точка $R_{cr} = 0, R_m = R_m^*$.

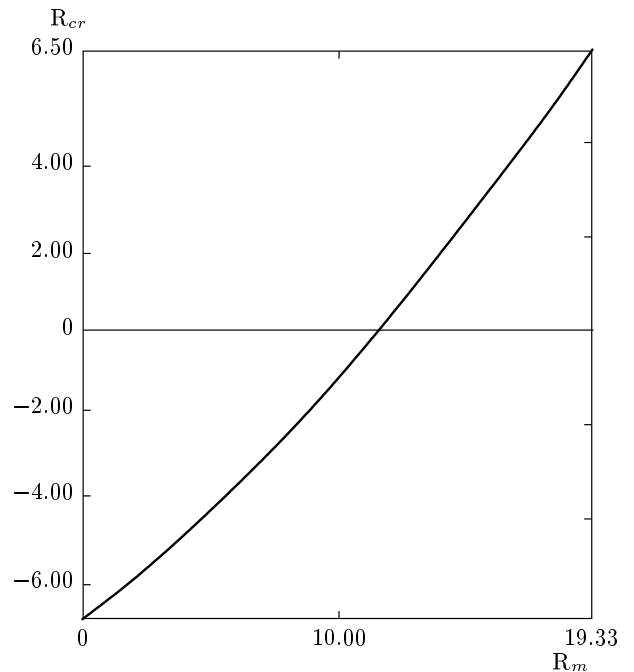


Рис. 8. Зависимость $R_{cr}(R_m)$. Горизонтальной линией отмечено значение $R_{cr} = 0$

Участку кривой $R_{cr} < 0$ соответствуют пространственно-периодические нейтральные решения, период которых меняется от периода наиболее неустойчивых возмущений классической конвекции Рэлея до бесконечности на границе $R_{cr} = 0$. Участку кривой $R_{cr} \geq 0$ отвечают локализованные в пространстве нейтральные решения.

Всюду выше рассматривалась кривая $R_{cr}(R_m)$, соответствующая значению $\sigma = 0$ в (4). Аналогичным образом (подобно тому, как это сделано в приближении гидростатики [18, 19]), могут быть построены кривые одинаковой скорости роста $\sigma = \text{const}$ наиболее неустойчивых возмущений, которые заполняют область неустойчивости на плоскости параметров R_m, R . Эта область состоит из двух подобластей: в первой наибольшей скоростью роста обладают локализованные структуры, во второй — периодические. Естественно предположить, что при значениях параметров из этих подобластей асимптотическое решение задачи с произвольными начальными данными будет иметь структуру возмущения, обладающего наибольшей скоростью роста (в первом случае локализованного, во втором — периодического). Условие $R_m \geq R_m^*$ является необходимым и достаточным условием существования подобласти области неустойчивости, в которой наибольшую скорость роста имеют локализованные структуры.

Для оценок возьмем набор параметров, характерных для движений масштаба облака [24, 25] $\alpha \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, $\gamma_a \approx 10^{-2} \text{ K/м}$, $\gamma_m \approx 6.4 \cdot 10^{-3} \text{ K/м}$, $\mu \approx 10 \text{ м}^2/\text{с}$, $h \approx 10^3 \text{ м}$. Тогда $R_m \approx 10^4$, $R_{cr} \approx 10^4$, $\lambda_{cr} \approx 10^{-2}$, и в размерном виде для нейтрального решения (локализованного облачного вала) из соответствующего асимптотического выражения имеем $x_0 \approx 5h\lambda_{cr}^{1/5}/4 \approx 500 \text{ м}$.

7. СРАВНЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ С РЕЗУЛЬТАТАМИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Численное моделирование влажной конвекции в рамках полных нелинейных уравнений проводилось в целом ряде работ [1, 2, 4–10]. Сравнение с численными результатами показывает, что основные структурные особенности аналитических решений сохраняются и в полных нелинейных моделях.

В работе [2] рассматривалась полная двумерная система уравнений тепловой конвекции с включением конденсационного источника тепла в форме (2). При различных значениях параметра стратификации Γ рассчитывался процесс развития и

установления влажной конвекции в слое атмосферы, инициируемый заданием в начальный момент времени малого случайного возмущения температуры. На рис. 9а представлены полученные в работе [2] горизонтальные распределения вертикальной скорости в последовательные моменты времени для $\gamma - \gamma_a = 3 \cdot 10^{-3} \text{ K/м}$. Отчетливо видно, как формируются узкие области интенсивных восходящих движений, разделенные широкими областями нисходящих движений с практически нулевой скоростью. При учете адвективных слагаемых конвективные «пиковые» структуры перестают меняться со временем, время установления такого режима составляет от двух до десяти часов. Различия высоты пиков на рисунке, видимо, обусловлены особенностями численных расчетов.

Физически более полная модель влажной конвекции рассматривалась в работе [9]. Учитывалась достаточно сложная структура конвективного пограничного слоя, состоящего из тонкого приземного слоя постоянных потоков, слоя свободной конвекции и собственно облачного слоя с неустойчивой стратификацией. Источник скрытой теплоты в [9] «включался» только при достижении поднимающимся воздухом уровня конденсации (для опускающегося воздуха он по-прежнему был равен нулю). Один из вариантов расчетов [9] представлен на рис. 9б. Как видно на рисунке, и в этих численных расчетах формируются облачные периодические структуры (облачные гряды) с узкими сконцентрированными областями восходящих движений.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Конвективные движения во влажном насыщенном воздухе сопровождаются выделением скрытой теплоты конденсации. С учетом этого эффекта рассмотрена задача о конвективной неустойчивости слоя влажного насыщенного воздуха, обобщающая постановку классической задачи Рэлея. Представлено аналитическое решение, демонстрирующее принципиальные отличия влажной конвекции от конвекции Рэлея. Построена кривая зависимости критического числа Рэлея от числа, характеризующего интенсивность конденсационного тепловыделения. Показано, что она состоит из двух частей, одной из которых соответствуют локализованные в пространстве нейтральные решения. Второй части кривой соответствуют пространственно-периодические нейтральные решения, для них характерна существенная локализация областей восходящих движений.

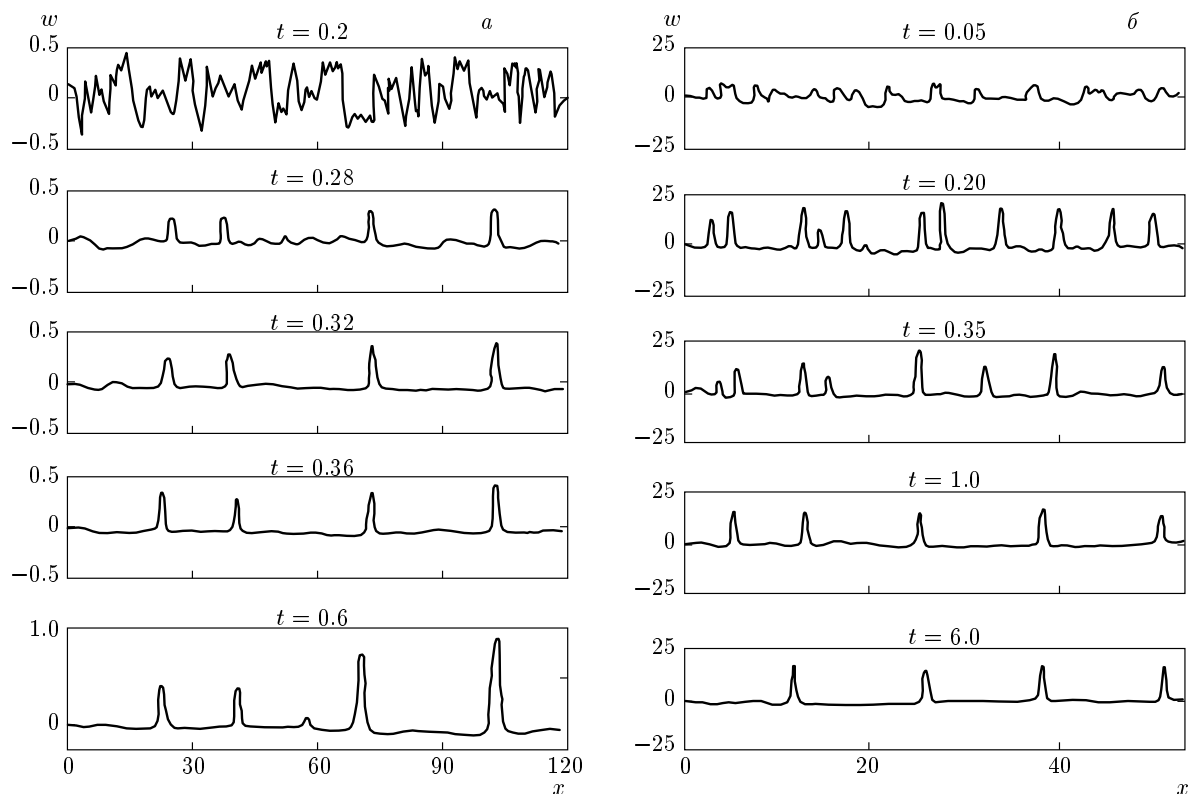


Рис. 9. Распределения $w(x)$ в последовательные моменты времени в процессе численного моделирования влажной конвекции в работах [2] (а) и [9] (б)

Теория описывает зарождение и развитие отдельных конвективных облаков и упорядоченных облачных структур. Она находится в согласии с данными метеорологических и спутниковых наблюдений, а также с результатами численного моделирования влажной конвекции в рамках полных нелинейных моделей.

В приближении гидростатики было показано [17–19], что локализованные конвективные валы являются плоскими аналогами построенных в этих работах локализованных осесимметричных конвективных вихрей, а пространственно-периодические системы валов — аналогами пространственных конвективных ячеек. Представляет интерес получение соответствующих локализованных осесимметричных решений и в рассматриваемой постановке задачи. Остается открытым вопрос о пространственной структуре трехмерных конвективных ячеек, обладающих максимальной скоростью роста. Как и для конвекции Рэлея, важным является исследование критических нелинейных режимов конвекции.

Найденным выше незнакоопределенным во влажной области локализованным модам можно

придать смысл. Будем говорить о локализованных симметричных относительно оси x возмущениях. Назовем периферией такого возмущения область $|x| > x_0$, такую что $w(x) < 0$ при всех $|x| > x_0$. Область $|x| < x_0$ назовем центральной. Пусть на периферии тепловыделение отсутствует, а в центральной области — пропорционально вертикальной скорости независимо от ее знака. Тогда указанные моды (наряду со знакоопределенными) и соответствующие им кривые $q = \varphi(\lambda)$ являются решениями нелинейной задачи устойчивости по отношению к описанным возмущениям.

Авторы благодарят Е. А. Кузнецова за интерес к работе и возможность представления результатов на сессии Совета РАН по нелинейной динамике.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

В разд. 4 было пояснено, каким образом возникают детерминанты, фигурирующие в соотношениях (15)–(17) для функций $B(\lambda, q, L)$, $F_{1,2}(\lambda, q, L)$. Ниже

приведены явные выражения для указанных функций. При выводе широко использовались соотношения между корнями характеристических уравнений (5), (10), определяемые теоремой Виета, а также их следствия:

$$R = (1 - \lambda_1^2)(1 - \lambda_2^2)(1 - \lambda_3^2);$$

$$R_m p_j^2 = (p_j^2 - \lambda_1^2)(p_j^2 - \lambda_2^2)(p_j^2 - \lambda_3^2), \quad j = 1, 2, 3.$$

Напомним, что величины $\lambda_0, \lambda^*, p_j$ введены соотношениями (8), (12). Введем следующие обозначения:

$$a = \frac{3 - \lambda^2}{2}, \quad b = \frac{(\lambda^2 - 1)\sqrt{4 - \lambda^2}}{2\lambda},$$

$$A = 2b [(\lambda^2 - a)^2 + b^2],$$

$$I = \frac{1}{2 [\operatorname{ch}^2(\lambda_0 L) - \sin^2(\lambda^* L)]} \{ [\lambda_0 b - \lambda^*(a - \lambda^2)] \times \\ \times \operatorname{sh}(2\lambda_0 L) - [\lambda_0(a - \lambda^2) + \lambda^* b] \sin(2\lambda^* L) \},$$

$$K = 2 [I - \lambda b \operatorname{th}(\lambda L)],$$

$$J = \frac{1}{2 [\operatorname{ch}^2(\lambda_0 L) - \sin^2(\lambda^* L)]} \{ [\lambda_0(a - \lambda^2) + \lambda^* b] \times \\ \times \operatorname{sh}(2\lambda_0 L) + [\lambda_0 b - \lambda^*(a - \lambda^2)] \sin(2\lambda^* L) \},$$

$$D_j = 2 \left\{ \frac{1}{(p_j^2 - a)^2 + b^2} [I(p_j^2 - a) - Jb] - \right. \\ \left. - \frac{1}{p_j^2 - \lambda^2} \lambda b \operatorname{th}(\lambda L) \right\}.$$

Для величин, входящих в формулы (15)–(17), получим

$$-\frac{\Delta_{21} - \Delta_{31}}{P_1 D} = \\ = -\frac{K [(p_1^2 - a)^2 + b^2] (p_1^2 - \lambda^2)(p_2^2 - p_3^2)}{AP_1 (p_1^2 - p_3^2)(p_1^2 - p_2^2)} \equiv g_1,$$

$$-\frac{\Delta_{12} - \Delta_{32}}{P_2 D} = \\ = -\frac{K [(p_2^2 - a)^2 + b^2] (p_2^2 - \lambda^2)(p_1^2 - p_3^2)}{AP_2 (p_2^2 - p_3^2)(p_2^2 - p_1^2)} \equiv g_2,$$

$$-\frac{\Delta_{31} - \Delta_{11}}{P_1 D} = -\frac{[(p_1^2 - a)^2 + b^2] (p_1^2 - \lambda^2)}{AP_1} \times \\ \times \left[D_1 + \frac{K}{p_2^2 - p_1^2} \right] \equiv h_1,$$

$$-\frac{\Delta_{32} - \Delta_{22}}{P_2 D} = -\frac{[(p_2^2 - a)^2 + b^2] (p_2^2 - \lambda^2)}{AP_2} \times \\ \times \left[D_2 + \frac{K}{p_1^2 - p_2^2} \right] \equiv h_2,$$

$$-\frac{\Delta_{13} - \Delta_{33}}{p_3 D} = -\frac{[(p_3^2 - a)^2 + b^2] (p_3^2 - \lambda^2)}{Ap_3} \times \\ \times \left[D_3 + \frac{K}{p_2^2 - p_3^2} \right] \equiv s_1,$$

$$-\frac{\Delta_{23} - \Delta_{33}}{p_3 D} = -\frac{[(p_3^2 - a)^2 + b^2] (p_3^2 - \lambda^2)}{Ap_3} \times \\ \times \left[D_3 + \frac{K}{p_1^2 - p_3^2} \right] \equiv s_2.$$

Приведенные выше соотношения определяют функции $B(\lambda, q, L), F_{1,2}(\lambda, q, L)$ как

$$F_1 = Bg_1 + h_1, \quad F_2 = \frac{g_2}{B} + h_2, \quad B = \frac{s_1 + 1}{s_2 + 1}.$$

Для локализованных мод, переходя к пределу $L \rightarrow \infty$, получаем

$$I = \lambda_0 b - \lambda^*(a - \lambda^2), \quad J = \lambda_0(a - \lambda^2) + \lambda^* b,$$

$$K = 2(I - \lambda b), \quad D_j = 2 \frac{I(p_j^2 - a) - Jb}{(p_j^2 - a)^2 + b^2} - \frac{2\lambda b}{p_j^2 - \lambda^2},$$

все остальные соотношения остаются без изменений.

Для огибающих, которые определены только при $1 < \lambda \leq 2$, полагая в исходных соотношениях $\lambda^* L = \pi/2$ и учитывая, что $\operatorname{th}(\pi\lambda/2\lambda^*) \approx 1$, имеем

$$I = [\lambda_0 b - \lambda^*(a - \lambda^2)] \operatorname{cth} \frac{\pi\lambda_0}{2\lambda^*},$$

$$J = [\lambda_0(a - \lambda^2) + \lambda^* b] \operatorname{cth} \frac{\pi\lambda_0}{2\lambda^*}, \quad K = 2(I - \lambda b),$$

$$D_j = 2 \frac{I(p_j^2 - a) - Jb}{(p_j^2 - a)^2 + b^2} - \frac{2\lambda b}{p_j^2 - \lambda^2},$$

все остальные исходные соотношения также остаются без изменений.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Выражение для вертикальной скорости $w_d(x)$ в сухой области $x \in (x_0, L_*)$ получается соответствующим интегрированием в (7), после того как решение $w(x)$ во влажной области найдено. Обозначив $z = 1 - (x - x_0)/L$, имеем

$$F = [b^2 + (\lambda^2 - a)^2] \times \\ \times [\operatorname{ch}^2(\lambda_0 L) \cos^2(\lambda^* L) + \operatorname{sh}^2(\lambda_0 L) \sin^2(\lambda^* L)],$$

$$E_1 = \operatorname{ch}(\lambda_0 Lz) \cos(\lambda^* Lz) \operatorname{ch}(\lambda_0 L) \cos(\lambda^* L) + \operatorname{sh}(\lambda_0 Lz) \sin(\lambda^* Lz) \operatorname{sh}(\lambda_0 L) \sin(\lambda^* L),$$

$$E_2 = -\operatorname{sh}(\lambda_0 Lz) \sin(\lambda^* Lz) \operatorname{ch}(\lambda_0 L) \cos(\lambda^* L) + \operatorname{ch}(\lambda_0 Lz) \cos(\lambda^* Lz) \operatorname{sh}(\lambda_0 L) \sin(\lambda^* L),$$

$$W_1 = \lambda^2 W_2, \quad W_2 = \frac{\operatorname{ch}(\lambda Lz)}{[(a - \lambda^2)^2 + b^2] \operatorname{ch}(\lambda L)},$$

$$W_3 = -\frac{1}{bF} \{ b\lambda^2 E_1 + [b^2 - a(\lambda^2 - a)] E_2 \},$$

$$W_4 = -\frac{1}{bF} [bE_1 - (\lambda^2 - a)E_2],$$

$$w_d(x) = c_1 \left\{ [p_1^2 - Bp_2^2 - (1-B)p_3^2] (W_1 + W_3) + \left[\frac{1}{p_1^2} - \frac{B}{p_2^2} - \frac{1-B}{p_3^2} \right] (W_2 + W_4) \right\}.$$

В случае локализованных мод выражение для вертикальной скорости $w_{dl}(x)$ в сухой области $x_0 < x < \infty$ получим, переходя к пределу $L \rightarrow \infty$ в предыдущих соотношениях. Полагая $t = x - x_0$, имеем

$$W_{1l} = -\frac{\lambda^2}{(a - \lambda^2)^2 + b^2} \times \left\{ \left[\cos(\lambda^* t) + \frac{b^2 - a(\lambda^2 - a)}{b\lambda^2} \sin(\lambda^* t) \right] \times \exp(-\lambda_0 t) - \exp(-\lambda t) \right\},$$

$$W_{2l} = -\frac{1}{(a - \lambda^2)^2 + b^2} \times \left\{ \left[\cos(\lambda^* t) - \frac{\lambda^2 - a}{b} \sin(\lambda^* t) \right] \times \exp(-\lambda_0 t) - \exp(-\lambda t) \right\},$$

$$w_{dl}(x) = c_1 \left\{ [p_1^2 - Bp_2^2 - (1-B)p_3^2] W_{1l} + \left[\frac{1}{p_1^2} - \frac{B}{p_2^2} - \frac{1-B}{p_3^2} \right] W_{2l} \right\}.$$

Для периодических решений, соответствующих огибающим мод, полагая в исходных соотношениях $\lambda^* L = \pi/2$, получим

$$F = [b^2 + (\lambda^2 - a)^2] \operatorname{sh}^2 \frac{\pi\lambda_0}{2\lambda^*},$$

$$E_1 = \operatorname{sh} \frac{\pi\lambda_0 z}{2\lambda^*} \sin \frac{\pi z}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi\lambda_0}{2\lambda^*},$$

$$E_2 = \operatorname{ch} \frac{\pi\lambda_0 z}{2\lambda^*} \cos \frac{\pi z}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi\lambda_0}{2\lambda^*},$$

$$W_2 = \frac{\operatorname{ch}(\pi\lambda z/2\lambda^*)}{[(a - \lambda^2)^2 + b^2] \operatorname{ch}(\pi\lambda/2\lambda^*)},$$

все остальные соотношения остаются без изменений.

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Рассмотрим предельный случай $\lambda = 1$ ($R = 0$), который соответствует кратным корням характеристического уравнения (5) $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \lambda_3^2 = 1$. Функция Грина G_w локализована в окрестности источника тепла, поэтому следует ожидать, что нейтральными будут локализованные возмущения. Продемонстрируем это, рассматривая достаточно большие L , $\operatorname{sh}^2 L \gg 1$. Найдем точки пересечения кривых (20) с осью $\lambda = 1$. Раскрывая неопределенности при $\lambda \rightarrow 1$, вместо соотношений, фигурирующих в Приложении А, получим

$$g_1 = \frac{\sqrt{2} (3 + q^2)^2 (3 + q)}{64q(1 + q)^{3/2} (3 - q)} \operatorname{th} L,$$

$$h_1 = -\frac{\sqrt{2} (q^4 + 16q^3 - 58q^2 - 16q + 9)}{64q(1 + q)^{1/2} (1 - q)} \operatorname{th} L,$$

$$g_2 = -\frac{\sqrt{2} (3 + q^2)^2 (3 - q)}{64q(1 - q)^{3/2} (3 + q)} \operatorname{th} L,$$

$$h_2 = \frac{\sqrt{2} (q^4 - 16q^3 - 58q^2 + 16q + 9)}{64q(1 - q)^{1/2} (1 + q)} \operatorname{th} L,$$

$$s_1 = \frac{3q^4 + 8q^3 - 38q^2 - 40q + 51}{16(1 - q^2)^{1/2} (1 - q)(3 + q)} \operatorname{th} L,$$

$$s_2 = \frac{3q^4 - 8q^3 - 38q^2 + 40q + 51}{16(1 - q^2)^{1/2} (1 + q)(3 - q)} \operatorname{th} L,$$

$$F_1 = Bg_1 + h_1, \quad F_2 = \frac{g_2}{B} + h_2, \quad B = \frac{s_1 + 1}{s_2 + 1}.$$

Приведем асимптотические выражения для функций $F_{1,2}$, B . При $q \rightarrow 0$

$$F_1 = \frac{\sqrt{2} (1 - \beta)(1 + \alpha q) \operatorname{th} L}{16},$$

$$F_2 = \frac{\sqrt{2} (1 - \beta)(1 - \alpha q) \operatorname{th} L}{16}, \quad B = 1 - \frac{4\beta q}{9},$$

где

$$\beta = \frac{9}{17 + 16 \operatorname{cth} L} < \frac{9}{33}, \quad \alpha \approx \frac{19}{1 - \beta} > 19.$$

При $q \rightarrow 1$,

$$F_1 = \frac{2 \operatorname{th} L}{3(1-q)}, \quad F_2 = 1 + 3\sqrt{2}(1-q)^{1/2} \operatorname{th} L,$$

$$B = -\frac{1}{3(1-q)}.$$

Можно показать, что $F_1 > 0$ для всех $0 < q < 1$ и L , тогда из (20) следует существование мод с номером $n = 0$. Величина B обращается в нуль в точке $\tilde{q}(\operatorname{cth} L)$, $\tilde{q}(1) = 0.85$, $\tilde{q}(\infty) \rightarrow 1$. Функция F_2 имеет разрыв в точке \tilde{q} и меняется от $-\infty$ при $q < \tilde{q}$ до ∞ при $q > \tilde{q}$. Если рассматривается мода с номером m , естественно одновременно с переходом через разрыв с увеличением q заменить m на $m - 1$ в выражениях (20), (19), (18). Тогда правые части указанных соотношений окажутся непрерывными функциями q во всей области изменения $0 < q < 1$.

Именно такой алгоритм реализован в задаче: в общем случае для фиксированных значений λ, L с увеличением q от нуля дополнительно отслеживается значение $B(\lambda, q, L)$. Если решение (20) найдено при $B(\lambda, q, L) > 0$, счет прекращается. Если же раньше $B(\lambda, q, L)$ переходит через нуль, в (20) (и, соответственно, в (18), (19)) m заменяется на $m - 1$ и счет продолжается до нахождения решения $q = q(\lambda, L)$. Затем меняется параметр λ . После построения всей кривой $q = q(\lambda, L)$ для фиксированного L , строятся кривые, соответствующие различным значениям L , и т. д.

Мод с $m = n$ не существует, поскольку $F_1 > F_2$ для $0 < q < \tilde{q}$, и правая часть (20) $\Phi > 1$. При $\tilde{q} < q < 1$ по-прежнему $\Phi > 1$ в силу замены m на $m - 1$. Все моды с $m > n$ существуют, так как для них при $q = 0$ значение Φ лежит в пределах $0 < \Phi < 1$, а затем возрастает.

Покажем, что в рассматриваемом случае $\lambda = 1$ для каждой моды решение уравнения (20) $q_{n,m}^*(L)$ убывает с ростом L и достигает минимума $q_{n,m}^*$ при $L = \infty$. Обозначим $\omega = \operatorname{th} L$. Достаточно показать, что в уравнении (20) $\partial \Phi_{n,m} / \partial \omega > 0$ при $q = q_{n,m}^*(\omega)$. С точностью до положительного множителя имеем

$$\frac{\partial \Phi_{n,m}}{\partial \omega} \approx \frac{F_1 + g_1}{1 + F_1^2} \frac{\partial B}{\partial \omega} - \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^{3/2} \frac{B(BF_2) - g_2}{B^2 + (BF_2)^2} \frac{\partial B}{\partial \omega},$$

$$\frac{\partial B}{\partial \omega} = \frac{s_1 - s_2}{\omega(s_2 + 1)^2}.$$

Подстановка в правую часть явных выражений для входящих функций позволяет убедиться в том, что производная положительна при всех $0 \leq q < 1$, $0 < \omega \leq 1$ и, следовательно, сделанное выше утверждение справедливо для всех мод.

Из (20) следует, что при фиксированном n значение $q_{n,m}^*$ растет с увеличением m . Значение $q_{n,n+1}^*$ уменьшается с увеличением n . Эти результаты согласуются с рис. 2, 6.

Проанализируем знакоопределенность локализованных мод. Переходя к пределу $\lambda \rightarrow 1$ в выражениях для $w_{dl}(x)$, приведенных в Приложении В, получим

$$w_{dl}(x) = -\frac{c_1}{8} [\Lambda_1(x-x_0) + \Lambda_2] (x-x_0) \exp[-(x-x_0)],$$

$$x_0 < x < \infty,$$

$$\Lambda_1 = (1-B)(p_3^2 - p_2^2)(1-p_1^2) + (p_1^2 - p_2^2)(p_3^2 - 1),$$

$$\Lambda_2 = -(1-B)(p_3^2 - p_2^2)(3+p_1^2) + (p_1^2 - p_2^2)(3+p_3^2).$$

Можно показать, что $\Lambda_{1,2} > 0$ при всех $0 \leq q < 1$. Необходимо выбрать $c_1 > 0$, тогда все локализованные моды знакоопределены в сухой области.

Из анализа (21) следует общее утверждение: если для моды с номером $n > 0$ величина $B \leq 1$, то такая мода (имеются в виду и локализованные, и периодические решения) является незнакоопределенной во влажной области. В рассматриваемом предельном случае $B \leq 1$ для всех $0 \leq q < 1$ и L , таким образом, знакоопределенными могут быть только моды с номером $n = 0$. Из численных расчетов следует, что это моды $n = 0, m = 1, 2, 3, 4$ (рис. 4). Для моды $n = 0, m = 1$ имеем численное значение $q_{0,1}^* \equiv q^* = 0.40$. Из формулы (13) находим соответствующее значение $R_m \equiv R_m^* = 11.22$, из (19) — величину $x_0 = 1.97$. Значение $p_3 x_0 = 4.3$ и замена $\operatorname{th}(p_3 x_0) = 1$ вполне оправдана.

Таким образом, критическому значению числа Рэлея $R_{cr} = 0$ соответствует $R_m^* = 11.22$, а нейтральным решением является локализованная мода $n = 0, m = 1$.

ПРИЛОЖЕНИЕ D

Рассмотрим предельный случай $\lambda \rightarrow 0$ ($R, R_m \rightarrow \infty$). Если величина $1 - q$ конечна при $\lambda \rightarrow 0$, то корни p_j^2 не стремятся ни к нулю, ни к бесконечности, см. (12). Удерживая основные слагаемые по степеням λ , из соотношений, приведенных в Приложении А, получаем

$$F_1 = \frac{P_1}{p_3}, \quad F_2 = \frac{P_2}{p_3}, \quad B = \frac{p_3^2 - p_1^2}{p_3^2 - p_2^2} < 1.$$

Уравнение (20) для точек пересечения кривых, соответствующих различным модам, с границей $\lambda = 0$ принимает вид

$$\left(\frac{1-q}{1+q} \right)^{3/2} = \frac{n\pi + \operatorname{arctg}[(1-q)/2]^{3/2}}{m\pi + \operatorname{arctg}[(1+q)/2]^{3/2}}.$$

Для каждой моды $n > 0, m > n$ кривые, соответствующие различным значениям L , пересекают границу $\lambda = 0$ в одной и той же точке $q_{n,m}^{**}$, где $q_{n,m}^{**}$ — корень уравнения. Учет следующих по степеням λ слагаемых в выражениях для $F_{1,2}$ позволяет установить, что ниже всех кривых при $\lambda > 0$ расположена кривая, соответствующая локализованной моде $L = \infty$. Для фиксированного n значение $q_{n,m}^{**}$ растет с увеличением m . Значение $q_{n,n+1}^{**}$ уменьшается с увеличением n . Перечисленные результаты полностью согласуются с рис. 2, 6. Поскольку $B < 1$ в окрестности $\lambda = 0$, в соответствии с общим утверждением, сформулированным в Приложении С, все моды с номерами $n > 0$, и локализованные, и периодические, являются незнакоопределенными во влажной области.

Для мод $n = 0, m > 0$ решением уравнения является $q = 1$. Этот случай необходимо рассматривать особо, поскольку при $q \rightarrow 1$, в соответствии с (12), $p_1^2 \rightarrow 0, p_2^2 \rightarrow -\infty, p_3^2 \rightarrow \infty$. В данном разделе в качестве независимой переменной вместо q удобно выбрать действительную переменную $p \equiv P_1 \rightarrow 0$ при $q \rightarrow 1$. Переменные p и q связаны соотношением (12):

$$p = \frac{1 - q}{\sqrt{2(1 + q)}}.$$

Вместо (12) имеем новые выражения и соответствующие асимптотики для корней:

$$p_1^2 = -p^2, \quad p_{2,3}^2 = \frac{3+p^2}{2} \mp \frac{(p^2+1)\sqrt{4+p^2}}{2p} \approx \mp \frac{1}{p};$$

$$P_1 = p, \quad P_2, P_3 \approx \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

Естественно разыскивать решения, удовлетворяющие условию $(R_m - R)/R \approx (\lambda/p)^2 \ll 1$ при $R, R_m \rightarrow \infty$ (см. (5), (10)). Удерживая основные слагаемые по степеням λ, p в соотношениях Приложения А и учитывая указанное условие, вместо (15)–(17) получим

$$B = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\lambda}{p}\right)^{1/2} \text{th} \frac{x_0}{\sqrt{p}},$$

$$\text{tg}(px_0) = p^{3/2} \text{th} \frac{x_0}{\sqrt{p}} + \frac{\lambda}{p} \text{th}(\lambda L), \quad \text{tg} \frac{x_0}{\sqrt{p}} = \text{th} \frac{x_0}{\sqrt{p}}.$$

Из последнего уравнения для мод $n = 0, m \geq 1$ имеем $(x_0)_{0,m} = \sqrt{p} A_m$, где $A_m \approx \pi/4 + m\pi$ — корни уравнения $\text{tg} A = \text{th} A$. Если изначально положить $\text{th}(p_3 x_0) = 1$ ($\text{th} A = 1$), у уравнения появляется посторонний корень, соответствующий $m = 0$ в выражении для A_m . Таким образом, следует рассматривать моды с номерами $n = 0, m \geq 1$, для них

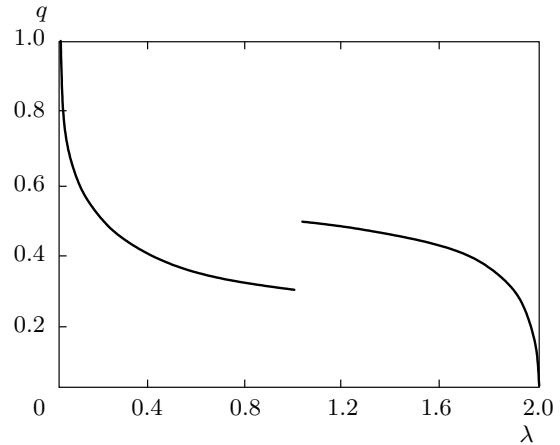


Рис. 10. Аппроксимация кривой $q = \varphi_1(\lambda)$, полученная в Приложении D, и кривой $q = \varphi_2(\lambda)$, полученная в Приложении E, для моды $n = 0, m = 1$

$p_3 x_0 \rightarrow A_m$ и замена $\text{th}(p_3 x_0) = 1$ полностью оправдана. Подставляя выражение для x_0 в первое уравнение системы, получаем уравнения кривых (20) для рассматриваемых мод:

$$\lambda \text{th}(\lambda L) = p \left[\text{tg}(A_m p^{3/2}) - p^{3/2} \right].$$

Возвращаясь к переменной q , имеем

$$\lambda \text{th}(\lambda L) = \frac{1 - q}{\sqrt{2(1 + q)}} \times$$

$$\times \left\{ \text{tg} \left[A_m \left(\frac{1 - q}{\sqrt{2(1 + q)}} \right)^{3/2} \right] - \left(\frac{1 - q}{\sqrt{2(1 + q)}} \right)^{3/2} \right\},$$

$$x_0 = \left[\frac{1 - q}{\sqrt{2(1 + q)}} \right]^{1/2} A_m.$$

Приведенное уравнение можно использовать во всей области $0 < \lambda \leq 1$ для качественного анализа поведения соответствующих кривых. Взаимное расположение кривых при различных значениях L, m полностью согласуется с рис. 2, 6. Для локализованных мод следует положить $\text{th}(\lambda L) = 1$. На рис. 10 в области $0 \leq \lambda \leq 1$ приведена такая кривая для локализованной моды $n = 0, m = 1$. Она лежит ниже всех остальных кривых. Переход к пределу $\lambda \rightarrow 0, q \rightarrow 1$ в указанных выше соотношениях позволяет получить асимптотики соответствующих кривых, приведенные в основном тексте статьи. Для величины p имеем $p = \lambda^{2/5} / (A_m - 1)^{2/5}$, что позволяет получить асимптотики $p_j(\lambda), B(\lambda)$ и т. д.

Приведем результаты анализа знакоопределенности локализованных мод $n = 0, m \geq 1$. Поскольку при $\lambda \rightarrow 0$ выполнены соотношения $P_1 x_0 \rightarrow 0, P_2 x_0, P_3 x_0 \rightarrow A_m, B \rightarrow 1/2$, во влажной области из (21) получим, опуская индексы номера моды у $w(x)$ и x_0 :

$$w(x) = c_1 \left\{ 1 - \frac{\cos [A_m(x/x_0)]}{2 \cos A_m} - \frac{\text{ch} [A_m(x/x_0)]}{2 \text{ch} A_m} \right\},$$

$$c_1 > 0, \quad 0 \leq x \leq x_0.$$

Экстремумы $w(x)$ определяются соотношениями

$$\frac{\sin [A_m(x/x_0)]}{\cos A_m} = \frac{\text{sh} [A_m(x/x_0)]}{\text{ch} A_m}.$$

Используя элементарные преобразования, для величин в экстремумах отсюда имеем

$$\frac{\cos [A_m(x/x_0)]}{\cos A_m} = \pm \sqrt{2 + \text{tg}^2 A_m - \text{th}^2 A_m - t^2},$$

$$0 < t = \frac{\text{ch} [A_m(x/x_0)]}{\text{ch} A_m} \leq 1.$$

Поскольку $\text{tg} A_m = \text{th} A_m$, для значений $w(x)$ в точках локальных минимумов получим

$$w_{min}(x) = c_1 \left(1 - \frac{t + \sqrt{2 - t^2}}{2} \right),$$

где t соответствует минимумам. Правая часть приведенного соотношения положительна при любых $0 < t < 1$, откуда следует, что все рассматриваемые моды знакоопределены во влажной области в предельном случае $\lambda = 0$. Сопоставляя полученные результаты с результатами, приведенными в Приложении С, можно предположить, что локализованные моды с номерами $n = 0, m = 1, \dots, 4$ знакоопределены во влажной области при всех $0 \leq \lambda \leq 1$, моды с номерами $n = 0, m \geq 5$ — при $0 \leq \lambda \leq \lambda_m$, где λ_m уменьшается с ростом m . Численные расчеты это полностью подтверждают, в частности, $\lambda_5 = 0.35$.

Соотношения для вертикальной скорости локализованных мод в сухой области $w_{dl}(x)$ приведены в Приложении В. Воспользовавшись соответствующими асимптотическими зависимостями $p_j(\lambda), B(\lambda)$ и сохраняя только основные слагаемые по степеням $\lambda \ll 1$, получим

$$w_{dl}(x) = \sqrt{2} c_1 (A_m - 1)^{3/5} \lambda^{9/10} \times$$

$$\times \left[\cos(z + \phi) - \cos \phi \exp \left(z - \sqrt{2} z \lambda^{3/2} \right) \right] \times$$

$$\times \exp(-z), \quad c_1 > 0,$$

$$z = \frac{x - x_0}{\sqrt{2\lambda}};$$

$$\phi = \arccos \frac{(A_m - 1)^{1/5} \lambda^{3/10}}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \lambda \rightarrow 0.$$

В показателе первой экспоненты оставлено слагаемое порядка $\lambda^{3/2}$, поскольку оно определяет асимптотику $w(x) \rightarrow 0$ ($w(x) < 0$) при $x \rightarrow \infty$. Знак $w_{dl}(x)$ в окрестности $x \geq x_0$ определяется знаком выражения в квадратных скобках. Нетрудно установить, что значение $w_{dl}(x)$ в первом локальном максимуме в сухой области становится положительным при

$$\lambda^* < \frac{\exp(-25\pi/6)}{(A_m - 1)^{2/3}},$$

и соответствующая мода становится незнакоопределенной.

Таким образом, кривой $R_{cr}(R_m)$ на плоскости λ, q в рассмотренном предельном случае отвечает кривая (20) для локализованной моды $n = 0, m = 1$, а нейтральными решениями являются соответствующие локализованные решения (с оговорками, приведенными в основном тексте статьи).

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

Рассмотрим предельный случай $\lambda \rightarrow 2$ ($R \rightarrow -27/4, R_m \rightarrow 0$). В этом случае должен иметь место предельный переход к классической сухой конвекции Рэлея, чему соответствует $q \rightarrow 0$. Удобно ввести новую переменную $\rho \rightarrow 0, \lambda = 2 - \rho$. Полагая $\rho, q \ll 1$ и оставляя основные слагаемые по степеням указанных величин, из соответствующих соотношений для огибающих, фигурирующих в Приложении А, получим (далее $Z \equiv q \text{cth}(3\pi\rho^{1/2}/4)/\rho^{1/2}$):

$$B = \frac{1 - \sqrt{2}(q^2 + \rho)Z/9}{1 + \sqrt{2}(q^2 + \rho)Z/9}, \quad F_1 = \frac{Z}{1 + \sqrt{2}(q^2 + \rho)Z/9},$$

$$F_2 = -\frac{Z}{1 - \sqrt{2}(q^2 + \rho)Z/9}.$$

Найдем точки пересечения огибающих с границей области $\lambda = 2$ ($\rho = 0$). Если величина q конечна при $\rho \rightarrow 0$, то $Z \rightarrow \infty$. При этом $F_{1,2} = 9/\sqrt{2}q^2, B = -1$, и из (20) для точек пересечения получаем уравнения, в которых, в соответствии с общим алго-

ритмом (см. Приложение С), m заменено на $m - 1$, поскольку $B < 0$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{3/2} &= \frac{\operatorname{arctg} \frac{9}{\sqrt{2}q^2} + n\pi}{\operatorname{arctg} \frac{9}{\sqrt{2}q^2} + (m-1)\pi} \approx \\ &\approx \frac{n + \frac{1}{2}}{m - \frac{1}{2}} \Rightarrow q \approx \frac{1 - \left(\frac{2n+1}{2m-1}\right)^{2/3}}{1 + \left(\frac{2n+1}{2m-1}\right)^{2/3}}. \end{aligned}$$

Для мод с номерами $m = n + 1$ уравнения имеют единственное решение $q = 0$. Это означает, что для таких мод на огибающих $q \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$. Решения существуют при условии $(q^2 + \rho)Z \rightarrow 0$. Тогда $F_{1,2} = \pm Z$ и из (20) следует, что

$$\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{3/2} = \frac{\operatorname{arctg} Z + n\pi}{(n+1)\pi - \operatorname{arctg} Z}.$$

Разлагая левую часть в ряд и разрешая уравнения относительно арктангенса, имеем

$$\operatorname{arctg} Z = \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{3(2n+1)q}{2} \right].$$

Учитывая определение Z , после элементарных преобразований найдем в неявном виде уравнения огибающих, которые сразу запишем в терминах переменных λ, q :

$$\sqrt{2-\lambda} \operatorname{th} \left(\frac{3\pi}{4} \sqrt{2-\lambda} \right) = q \operatorname{tg} \left[\frac{3\pi}{4} (2n+1)q \right].$$

Приведенные уравнения можно использовать для качественного анализа поведения огибающих во всей области $1 \leq \lambda \leq 2$. С ростом n ($m = n + 1$) соответствующие кривые опускаются, и выше всех лежит кривая для моды с номером $n = 0, m = 1$. Эта кривая приведена на рис. 10 в области $1 \leq \lambda \leq 2$. Переход к пределу $\lambda \rightarrow 2, q \rightarrow 0$ дает асимптотики огибающих $\rho = 2 - \lambda = (2n + 1)q^2$ для рассматриваемых мод. Это, в свою очередь, позволяет получить асимптотики величин $p_j(\lambda), B(\lambda), Z(\lambda)$ и др. на огибающих. В частности, с учетом асимптотик $P_{1,2}$ и λ^* , из (19) и (22) для рассматриваемых мод имеем $x_0 = (\pi/\sqrt{2})(2n + 1), L = \pi/\sqrt{2}$ с точностью до $\sqrt{2-\lambda}$.

Таким образом, при фиксированном n с увеличением m соответствующие огибающие на плоскости λ, q поднимаются, самая нижняя огибающая проходит через точку $\lambda = 2, q = 0$ и соответствует моде $n, m = n + 1$ (см. рис. 6).

Можно показать, что в рассматриваемом предельном случае величина $B \leq 1$ не только на огибающих всех мод, но и на кривых (20), соответствующих любым фиксированным значениям параметра L . В соответствии с общим утверждением, сформулированным в Приложении С, все моды с номером $n > 0$ являются незнакоопределенными во влажной области.

Установим знакоопределенность мод с номерами $n = 0, m \geq 2$ во влажной области на огибающих при $\rho = 0$, т. е. в точках q пересечения огибающих с границей области $\lambda = 2$. В этих точках $F_{1,2} = 9/\sqrt{2}q^2, B = -1$. Из (18), (21) тогда следует, что все эти моды являются незнакоопределенными. В частности, для моды $n = 0, m = 2$, обозначив $\chi \equiv \operatorname{arctg}(9/\sqrt{2}q^2)$, имеем

$$w(x) = 2c_1 \left\{ \sin \left[\left(\chi + \frac{\pi}{2} \right) \frac{x}{x_0} \right] \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{x_0} \right) \frac{1}{\cos \chi} - \frac{\operatorname{ch}(p_3 x)}{\operatorname{ch}(p_3 x_0)} \right\}.$$

Знакоопределенность нарушается в малой окрестности точки $x = 0$: $w(0) = -2c_1 \operatorname{ch}^{-1}(p_3 x_0)$. Мода становится знакоопределенной уже при $\rho \geq (4q/3\pi) \exp(-2\sqrt{2}\pi)$, где для рассматриваемой моды $q = 0.35$. Поскольку в предельном случае $\lambda = 1$ знакоопределенными являются также моды $n = 0, m = 3, 4$ (см. Приложение С и рис. 7), для них имеются значения $1 < \lambda_m < 2$, такие что при $\lambda < \lambda_m$ соответствующая мода знакоопределена на огибающей. Численные расчеты дают $\lambda_3 = 1.91, \lambda_4 = 1.61$.

Не ограничивая общности, установим пространственную структуру мод с номерами $n, m = n + 1$ во влажной области на огибающих при $\lambda \rightarrow 2$. С учетом асимптотик огибающих получаем

$$Z = \frac{4}{3\pi(2n+1)q}, \quad B = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{8\sqrt{2}(n+1)}{27\pi(2n+1)}q.$$

Поскольку на огибающих $F_{1,2} = \pm Z$, из (16), (17) имеем, выражая косинусы через тангенсы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos(P_1 x_0)} &= (-1)^n \sqrt{1+Z^2}, \\ \frac{1}{\cos(P_2 x_0)} &= (-1)^{n+1} \sqrt{1+Z^2}. \end{aligned}$$

Удерживая только основные слагаемые по степеням $q \rightarrow 0$, из (21) в области $|x| \leq x_0$ находим

$$w(x) = c_1 (-1)^n \frac{8}{3\pi(2n+1)q} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \frac{x}{x_0} \right].$$

Как было указано выше, знакоопределенной является только мода $n = 0$, $m = 1$. Пространственная структура этой моды в сухой области на огибающей определяется соотношениями, приведенными в Приложении В. Удерживая в них только основные слагаемые по степеням $\rho \rightarrow 0$, $q \rightarrow 0$, с учетом асимптотики огибающей получим

$$w_d(x) = -c_1 \frac{8}{3\pi q} \cos\left(\frac{\pi}{2} z\right), \quad z = 1 - \frac{x - x_0}{L}.$$

Таким образом, мода $n = 0$, $m = 1$ знакоопределена на огибающей. Поскольку $x_0, L = \pi/\sqrt{2}$ при $\lambda = 2$, из сравнения соотношений для $w(x)$ и $w_d(x)$ получаем с точностью до постоянного множителя $w(x) \approx \cos(x/\sqrt{2})$ для всех $x \geq 0$, что совпадает с соответствующим соотношением, описывающим структуру наиболее неустойчивых возмущений классической конвекции Рэля. При $\lambda = 2$ значение $p_3 x_0 = \sqrt{2}\pi$ и замена $\text{th}(p_3 x_0) = 1$ по-прежнему оправдана.

Таким образом, кривой $R_{cr}(R_m)$ на плоскости λ, q в рассмотренном предельном случае отвечает огибающая (20) для моды $n = 0$, $m = 1$, а нейтральными решениями являются соответствующие огибающей периодические решения. При $\lambda \rightarrow 2$, $q \rightarrow 0$ ($R \rightarrow -27/4$, $R_m \rightarrow 0$) имеет место предельный переход к классической конвекции Рэля.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Yamasaki, J. Met. Soc. Jpn. **50**, 465 (1972).
2. A. Delden, Beitr. Phys. Atmos. **58**, 202 (1985).
3. E. A. Agee, Dyn. Atmos. Oceans **10**, 317 (1987).
4. T. Asai and I. Nakasui, J. Met. Soc. Jpn. **60**, 425 (1992).
5. T. Asai and I. Nakasui, J. Met. Soc. Jpn. **55**, 151 (1977).
6. C. S. Bretherton, J. Atmos. Sci. **44**, 1809 (1987).
7. M. Yamasaki, J. Met. Soc. Jpn. **52**, 365 (1974).
8. X. Y. Huang, Tellus A **42**, 270 (1990).
9. A. Chlond, Beitr. Phys. Atmos. **61**, 312 (1988).
10. X. Huang and E. Kallen, Tellus A **38**, 381 (1986).
11. S. M. Haque, Quart. J. Roy. Met. Soc. **78**, 394 (1958).
12. H. L. Kuo, Tellus **13**, 441 (1961).
13. D. K. Lilly, Month. Weather Rev. **88**, 1 (1960).
14. А. Е. Гилл, *Интенсивные атмосферные вихри*, под ред. Л. Бенгтссона, Дж. Лайтхилла, Мир, Москва (1985), с. 130.
15. Б. Я. Шмерлин, М. В. Калашник, Изв. АН СССР. ФАО **25**, 421 (1989).
16. Б. Я. Шмерлин, М. В. Калашник, Изв. АН СССР. ФАО **25**, 810 (1989).
17. М. В. Калашник, Б. Я. Шмерлин, Изв. АН СССР. ФАО **26**, 787 (1990).
18. М. В. Калашник, Б. Я. Шмерлин, Изв. АН СССР. ФАО **26**, 1034 (1990).
19. Б. Я. Шмерлин, М. В. Калашник, УФН **183** (2013).
20. Л. Д. Ландау, У. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
21. Г. З. Гершуни, У. М. Жуховицкий, *Конвективная неустойчивость несжимаемой жидкости*, Наука, Москва (1972).
22. Л. Н. Гутман, *Введение в нелинейную теорию мезометеорологических процессов*, Гидрометеиздат, Ленинград (1969).
23. П. Н. Белов, *Практические методы численного прогноза погоды*, Гидрометеиздат, Ленинград (1967).
24. А. Гилл, *Динамика атмосферы и океана*, Мир, Москва (1986).
25. Л. Т. Матвеев, *Физика атмосферы*, Гидрометеиздат, Ленинград (1984).
26. К. А. Emanuel, *Atmospheric Convection*, Univ. Press, Oxford (1994).
27. М. В. Калашник, Л. Х. Ингель, Изв. АН СССР. ФАО **24**, 1327 (1988).