

КУТРИТЫ И КУКВАРТЫ В СПОНТАННОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ РАССЕЯНИИ СВЕТА, КОРРЕЛЯЦИИ И ПЕРЕПУТЫВАНИЕ СОСТОЯНИЙ

М. В. Федоров^{a,}, П. А. Волков^a, Ю. М. Михайлова^{a,b}*

^a *Институт общей физики им. А. М. Прохорова Российской академии наук
119991, Москва, Россия*

^b *Max-Planck Institut für Quantenoptik
D-85748, Garching, Germany*

Поступила в редакцию 23 октября 2011 г.

Исследованы природа и свойства состояний одиночных бифотонных кутритов и куквартов. С учетом требований симметрии волновых функций найдена и исследована зависимость от параметров кутритов степени их перепутывания, найдена связь между степенью перепутывания и степенью поляризации. В случае бифотонных куквартов учтено также, что при наличии у них двух степеней свободы (частоты и поляризации) соответствующие переменные независимы друг от друга и могут вносить свой вклад в степень перепутывания состояний. Усреднение по одной из двух степеней свободы делает состояния бифотонных куквартов смешанными. Исследованы корреляционные и поляризационные свойства таких состояний и соотношение между квантовыми и классическими корреляциями.

1. ВВЕДЕНИЕ

Перепутывание состояний (entanglement) — это понятие, введенное еще Шредингером в 1934 г. [1] под названием Verschränkung (скрещивание). В настоящее время это понятие стало одним из ключевых в современной квантовой информатике и квантовой оптике. Несмотря на кажущуюся простоту определения перепутывания, по некоторым аспектам соответствующих явлений в литературе все еще нет единого мнения. В первую очередь это касается количественных характеристик степени перепутывания. Особое место в числе таких дискуссионных вопросов занимают состояния двух или многих тождественных частиц. Хотя число работ по этой тематике очень велико (см., например, [2–15]), как нам представляется, в литературе по этому вопросу нет полной ясности, есть противоречивые суждения, и некоторые устоявшиеся и общепринятые мнения заслуживают анализа и пересмотра (см. по этому поводу также наши предыдущие статьи [16, 17]).

Обычно перепутывание состояний многочастичных систем понимается как эквивалент понятия

квантовых корреляций. Существует много определений и критериев перепутывания. Для чистых двухчастичных систем самое простое определение перепутанных состояний состоит в следующем: состояние перепутано, если его волновая функция, зависящая от переменных x_1 и x_2 частиц, не может быть представлена в виде произведения одночастичных волновых функций,

$$\Psi(x_1, x_2) \neq \varphi(x_1)\chi(x_2). \quad (1.1)$$

Переменные x_1 и x_2 не обязательно относятся к координатам частиц. Это могут быть и импульсы (волновые векторы) частиц, их отдельные компоненты, поляризации, проекции спинов, угловые моменты, а также комбинации этих переменных, непрерывных или дискретных.

Как правило, понятие перепутывания состояний дополняется предположением о возможности физического разделения многочастичной системы на подсистемы A и B , состояния которых перепутаны, если волновая функция всей системы непредставима в виде произведения волновых функций подсистем,

$$\Psi(x_1, x_2) \neq \varphi_A(x_1)\chi_B(x_2). \quad (1.2)$$

*E-mail: fedorovmv@gmail.com

В случае двухчастичных систем определения (1.1) и (1.2) тождественны, если частицы различимы, как, например, атом и фотон, электрон и позитрон, и т. д. В случае же неразличимых (тождественных) частиц между определениями (1.1) и (1.2) есть различие: определение (1.1) шире, чем (1.2). В самом деле пусть, например, две рассматриваемые частицы — бозоны. Есть всего две моды, a и b , в которых они могут находиться, и пусть частицы находятся в разных модах. Волновая функция такой системы должна быть симметричной по отношению к перестановке переменных и имеет вид

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times [\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) + \psi_a(x_2)\psi_b(x_1)]. \quad (1.3)$$

Согласно широко распространенным представлениям, на основании определения (1.2) считается, что состояния, характеризуемые волновой функцией типа (1.3), не перепутаны, так как в силу тождественности частиц невозможно физическое разделение на подсистемы. С другой стороны, по определению (1.1) состояния с волновой функцией вида (1.3) перепутаны, так как их волновые функции не могут быть представлены в виде произведения одночастичных волновых функций.

Этот вывод представляется вполне разумным, поскольку несомненно, что в состояниях двух тождественных частиц в разных модах имеются специфические квантовые корреляции, связанные с квантовой статистикой частиц и с обусловленными статистикой требованиями симметрии волновых функций. В принципе этот тип квантовых корреляций можно характеризовать дополнительными терминами, такими как симметричное или обменное перепутывание, в отличие от так называемого конфигурационного перепутывания. Последнее связано с тем, что в общем случае волновая функция двух частиц представляется суммой нескольких слагаемых (конфигураций), отличающихся друг от друга различным распределением чисел заполнения по модам:

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{\{n_i\}} C_{\{n_i\}} \Psi_{\{n_i\}}(x_1, x_2), \quad (1.4)$$

где индекс « i » нумерует моды, n_i — число частиц в i -й моде, в случае двухчастичных состояний $\sum_i n_i = 2$. Если сумма (1.4) содержит более одного слагаемого, то это обстоятельство также может быть причиной нефакторизуемости полной волновой функции, а значит, и причиной конфигурационного перепутывания. В отличие от это-

го симметричное перепутывание — это перепутывание волновых функций заданной конфигурации, $\Psi_{\{n_i\}}(x_1, x_2)$, т. е. отдельных слагаемых суммы (1.4). Заметим, однако, что в общем случае многоконфигурационных состояний тождественных частиц симметричное и конфигурационное перепутывания неотделимы друг от друга и вся совокупность квантовых корреляций, или полное перепутывание состояния $\Psi(x_1, x_2)$, определяется неразделимой совокупностью вкладов симметричного и конфигурационного перепутываний.

Сформулированное представление о полном перепутывании системы тождественных частиц соответствует определению (1.1) и его естественному продолжению и конкретизации, определяемым теоремой Шмидта или разложением по модам Шмидта. Как известно [18, 19], для определения мод Шмидта необходимо построить матрицу плотности чистого двухчастичного состояния,

$$\rho(x_1, x_2; x'_1, x'_2) = \Psi(x_1, x_2)\Psi^*(x'_1, x'_2),$$

и соответствующие ей редуцированные матрицы плотности

$$\rho_r^{(1)}(x_1, x'_1) = \text{Tr}_{x_2} \rho, \quad \rho_r^{(2)}(x_2, x'_2) = \text{Tr}_{x_1} \rho.$$

Собственные значения λ_n матриц плотности $\rho_r^{(1)}$ и $\rho_r^{(2)}$ одинаковы и характеризуются целочисленным квантовым числом $n = 1, 2, \dots$, а собственные функции $\varphi_n(x_1)$ и $\chi_n(x_2)$ — это моды Шмидта. Согласно теореме Шмидта, разложение двухчастичной функции $\Psi(x_1, x_2)$ по модам Шмидта имеет вид

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \varphi_n(x_1)\chi_n(x_2), \quad (1.5)$$

где $\sum_n \lambda_n = 1$, $1 \geq \lambda_n \geq 0$. Число не малых слагаемых в этом разложении показывает, на сколько факторизованных произведений одночастичных ортонормированных мод Шмидта может быть разложена нефакторизуемая волновая функция перепутанного двухчастичного состояния. Количественной характеристикой числа таких слагаемых, а значит, и степени перепутывания чистого состояния $\Psi(x_1, x_2)$ является параметр Шмидта K ,

$$K = \frac{1}{\sum_n \lambda_n^2} \geq 1. \quad (1.6)$$

Состояние не перепутано и, в соответствии с определением (1.1), его волновая функция факторизуется, $\Psi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1)\chi_1(x_2)$, только если $K = 1$, что возможно, только если одно из собственных значений

редуцированных матриц плотности равно единице, $\lambda_1 = 1$, а все остальные равны нулю, $\lambda_{n \neq 1} = 0$.

Разложение Шмидта (1.5) и определение параметра Шмидта K (1.6) как степени перепутывания чистых двухчастичных состояний в большой степени универсальны. Они годятся для систем как с дискретными, так и с непрерывными переменными, для систем как различимых, так и тождественных частиц, для описания как конфигурационного, так и симметричного перепутывания. В общем случае многоконфигурационных состояний тождественных частиц описание в терминах разложения и параметра Шмидта характеризует именно полное перепутывание таких состояний, учитывающее вклады как симметричного, так и конфигурационного перепутывания.

Заметим, что описанное выше редуцирование матрицы плотности осуществляется методом вычисления следа полной матрицы плотности по переменным одной из частиц. В случае нетождественных частиц эта процедура эквивалентна редуцированию по одной из физически разделяемых подсистем. В случае тождественных частиц физическое разделение подсистем невозможно, но разделение по переменным частиц остается возможным. При этом мы не можем знать, к какой из тождественных частиц относится та или другая переменная. Но мы точно знаем, что количество переменных (или групп переменных) равно количеству частиц в системе и редуцирование по одной из них всегда возможно. Что касается возможностей экспериментальной реализации мод Шмидта, а также нахождения параметра Шмидта K и всех других параметров волновых функций, эти вопросы обсуждаются ниже на примерах простейших систем типа кутритов и куквартов (см. также [16]).

2. КУБИТЫ, КУТРИТЫ И КУКВАРТЫ

Как хорошо известно, кубит — это произвольная суперпозиция двух ортонормированных квантовых состояний. Один из примеров кубита — это суперпозиция двух поляризационных однофотонных состояний с ортогональными поляризациями

$$|\Psi^{(2)}\rangle = C_1|1_H\rangle + C_2|1_V\rangle \equiv C_1 a_H^\dagger |0\rangle + C_2 a_V^\dagger |0\rangle, \quad (2.1)$$

где $|0\rangle$ — вакуумное состояние, $|1_H\rangle$ и $|1_V\rangle$ — однофотонные состояния, a_H^\dagger и a_V^\dagger — операторы рождения фотонов, C_1 и C_2 — произвольные комплексные константы, удовлетворяющие условию нормировки $|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1$, индексы « H » и « V » определяют поляризационные моды или базисные однофотонные

поляризационные состояния с горизонтальной и вертикальной поляризациями фотона. Верхний индекс «(2)» у Ψ в уравнении (2.1) указывает на то, что количество базисных векторов состояний кубита равно двум. В данном случае и размерность поляризационного однофотонного гильбертова пространства также равна двум, $d_{qb} = 2$.

Вектору состояний (2.1) соответствует поляризационная волновая функция

$$\Psi^{(2)}(\sigma) = C_1 \psi_H(\sigma) + C_2 \psi_V(\sigma), \quad (2.2)$$

где σ — поляризационная переменная фотона, а

$$\begin{aligned} \psi_H(\sigma) &= \langle \sigma | 1_H \rangle = \delta_{\sigma,H} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \psi_V(\sigma) &= \langle \sigma | 1_V \rangle = \delta_{\sigma,V} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.3)$$

— базисные однофотонные поляризационные волновые функции. В матричной форме волновая функция произвольного поляризационного кубита принимает вид

$$\Psi^{(2)} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Аналогично определению кубита (2.1), кутриты и кукварты — это суперпозиции соответственно трех и четырех ортонормированных базисных квантовых состояний,

$$|\Psi^{(3)}\rangle = C_1|A\rangle + C_2|B\rangle + C_3|C\rangle, \quad (2.5)$$

$$|\Psi^{(4)}\rangle = C_1|A'\rangle + C_2|B'\rangle + C_3|C'\rangle + C_4|D\rangle, \quad (2.6)$$

с условиями нормировки $\sum_i |C_i|^2 = 1$. Как и в случае кубитов, здесь и далее верхние индексы «(3)» и «(4)» указывают на число базисных состояний кутритов и куквартов.

В квантовой оптике и квантовой информатике обычно рассматриваются кутриты и кукварты специального вида, а именно, двухчастичные и, в частности, двухфотонные кутриты и кукварты. В абстрактном виде векторы состояний двухчастичных кутритов и куквартов записываются как

$$|\Psi^{(3)}\rangle = C_1|00\rangle + C_2|01\rangle + C_3|11\rangle, \quad (2.7)$$

$$|\Psi^{(4)}\rangle = C_1|00\rangle + C_2|01\rangle + C_3|10\rangle + C_4|11\rangle. \quad (2.8)$$

Запись векторов состояний куквартов (2.8), по-видимому, возникла из модели двух двухуровневых атомов, в которой обозначение $|00\rangle$ означает, что оба атома находятся в основном состоянии, $|01\rangle$ и

$|10\rangle$ — что один из атомов в основном, а другой в возбужденном состоянии, и $|11\rangle$ — что оба атома возбуждены. Запись вектора состояний кутритов в виде (2.7) ассоциируется, скорее, с одним двухэлектронным атомом типа атома гелия, в котором $|00\rangle$ — это состояние невозбужденного атома; в силу неразличимости электронов в этом случае есть только один вектор состояния одноэлектронного возбуждения, $|01\rangle \equiv |10\rangle$; и, наконец, $|11\rangle$ — это состояние с двумя электронами на возбужденном уровне.

Бифотонные состояния типа кутритов и куквартов могут образовываться с помощью процессов спонтанного параметрического рассеяния света (СПРС), в которых фотоны накачки распадаются в нелинейном двулучепреломляющем кристалле на пары фотонов меньших частот. С помощью выбора количества и ориентации кристаллов, типов фазового синхронизма, а также с помощью манипуляций с поляризациями рожденных СПРС-фотонов уже после их выхода из кристалла можно построить бифотонные состояния кутритов и куквартов общего вида. При этом для получения состояний кутритов достаточно использовать процессы коллинеарного вырожденного рассеяния, в которых СПРС-фотоны распространяются примерно в том же направлении, что и фотоны накачки, их частоты равны и составляют половину частоты фотонов накачки, и реализуемые бифотонные состояния могут отличаться друг от друга только поляризациями фотонов. В отличие от этого, для образования состояний куквартов необходимо, чтобы либо частоты СПРС-фотонов, либо направления их распространения отличались друг от друга, т.е. необходима реализация либо коллинеарного невырожденного, либо неколлинеарного вырожденного СПРС. В принципе, эти две возможности эквивалентны, и поэтому, для конкретности, будем рассматривать далее поляризационно-частотные кукварты, реализуемые с помощью комбинаций процессов коллинеарного невырожденного рассеяния, в которых рождаются пары фотонов с различными комбинациями поляризаций и частотами, которые могут принимать только два значения, ω_h (high) и ω_l (low), таких что $\omega_h + \omega_l = \omega_p$, где ω_p — частота накачки. С учетом сказанного, в общем случае векторы состояний бифотонных кутритов и куквартов записываются в виде

$$\begin{aligned} |\Psi^{(3)}\rangle &= \frac{C_1}{\sqrt{2}} a_H^\dagger |0\rangle + C_2 a_H^\dagger a_V^\dagger |0\rangle + \frac{C_3}{\sqrt{2}} a_V^\dagger |0\rangle \equiv \\ &\equiv C_1 |2_H\rangle + C_2 |1_H, 1_V\rangle + C_3 |2_V\rangle \quad (2.9) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} |\Psi^{(4)}\rangle &= C_1 a_{H,\omega_h}^\dagger a_{H,\omega_l}^\dagger |0\rangle + C_2 a_{H,\omega_h}^\dagger a_{V,\omega_l}^\dagger |0\rangle + \\ &+ C_3 a_{V,\omega_h}^\dagger a_{H,\omega_l}^\dagger |0\rangle + C_4 a_{V,\omega_h}^\dagger a_{V,\omega_l}^\dagger |0\rangle \equiv \\ &\equiv C_1 |1_{H,\omega_h}, 1_{H,\omega_l}\rangle + C_2 |1_{H,\omega_h}, 1_{V,\omega_l}\rangle + \\ &+ C_3 |1_{V,\omega_h}, 1_{H,\omega_l}\rangle + C_4 |1_{V,\omega_h}, 1_{V,\omega_l}\rangle. \quad (2.10) \end{aligned}$$

Перепутывание и поляризационные свойства бифотонных кутритов и куквартов обсуждаются ниже по отдельности соответственно в разд. 3 и 4.

3. БИФОТОННЫЕ КУТРИТЫ

3.1. Волновые функции кутритов

Рецепт построения координатных волновых функций многофотонных и многомодовых состояний из соответствующих векторов состояний хорошо известен из квантовой электродинамики [20, гл. 6, § 4, уравнение (6.4)]. В случае бифотонных кутритов с вектором состояний (2.9) имеем только две частицы и только две однофотонные моды, а роль «координат» играют поляризационные переменные σ_1 и σ_2 фотонов. В соответствии с общими правилами находим в этом случае волновые функции базисных состояний бифотонных кутритов, выраженные через произведения однофотонных волновых функций поляризационного кубита (2.3):

$$\begin{aligned} \Psi_{HH}^{(3)}(\sigma_1, \sigma_2) &= \langle \sigma_1, \sigma_2 | 2_H \rangle = \psi_H(\sigma_1) \psi_H(\sigma_2) = \\ &= \delta_{\sigma_1, H} \delta_{\sigma_2, H} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2, \quad (3.1.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{HV}^{(3)}(\sigma_1, \sigma_2) &= \langle \sigma_1, \sigma_2 | 1_H, 1_V \rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_H(\sigma_1) \psi_V(\sigma_2) + \psi_V(\sigma_1) \psi_H(\sigma_2)] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\delta_{\sigma_1, H} \delta_{\sigma_2, V} + \delta_{\sigma_1, V} \delta_{\sigma_2, H}] \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \times \\ &\times \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \right] \equiv \\ &\equiv \Psi_+^{Bell}, \quad (3.1.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{VV}^{(3)}(\sigma_1, \sigma_2) &= \langle \sigma_1, \sigma_2 | 2_V \rangle = \psi_V(\sigma_1) \psi_V(\sigma_2) = \\ &= \delta_{\sigma_1, V} \delta_{\sigma_2, V} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2, \quad (3.1.3) \end{aligned}$$

где Ψ_+^{Bell} — симметричное состояние Белла типа Ψ . Здесь и далее в матричных обозначениях индексы «1» и «2» соответствуют номерам переменных σ_1 и σ_2 в одночастичных волновых функциях.

Волновая функция кутрита общего вида (2.9) определяется суперпозицией базисных волновых функций (3.1.1)–(3.1.3):

$$\Psi^{(3)}(\sigma_1, \sigma_2) = \langle \sigma_1, \sigma_2 | \Psi^{(3)} \rangle = C_1 \Psi_{HH}^{(3)}(\sigma_1, \sigma_2) + C_2 \Psi_{HV}^{(3)}(\sigma_1, \sigma_2) + C_3 \Psi_{VV}^{(3)}(\sigma_1, \sigma_2). \quad (3.1.4)$$

Подчеркнем, что все приведенные волновые функции (3.1.1)–(3.1.4) симметричны относительно перестановки частиц или их переменных $1 \leftrightarrow 2$, как и должно быть для одновременно образующихся фотонов СПРС-пар, поскольку фотоны — это бозоны, подчиняющиеся статистике Бозе–Эйнштейна, и бифотонные волновые функции должны быть симметричными. Заметим, что часто это обстоятельство игнорируется и что на самом деле учет симметрии волновых функций (и матричных элементов) существенно влияет на оценки степени перепутывания бифотонных состояний. Отметим также, что поскольку все бифотонные волновые функции (3.1.1)–(3.1.4) имеют вид произведений или сумм произведений элементов кубитов, в целом бифотонные кутриты — это двухкубитные состояния. Вычисленные в явном виде прямые произведения столбцов в уравнениях (3.1.1)–(3.1.3) приводят выражения для базисных волновых функций кутритов к виду

$$\Psi_{HH}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_{HV}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1.5)$$

$$\Psi_{VV}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что размерность двухкубитного гильбертова пространства, к которому принадлежат эти

волновые функции, есть $D = d^2 = 4$. Конечно, система функций (3.1.5) неполна и становится полной при добавлении к ней антисимметричного состояния Белла

$$\Psi_-^{Bell} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \right] \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

С учетом Ψ_-^{Bell} общее выражение (3.1.4) для волновой функции кутрита принимает вид

$$\Psi^{(3)} = C_1 \Psi_{HH}^{(3)} + C_2 \Psi_+^{Bell} + C_3 \Psi_{VV}^{(3)} + 0 \times \Psi_-^{Bell}, \quad (3.1.6)$$

где нулевой коэффициент перед Ψ_-^{Bell} является обязательным вследствие требования симметрии двухбозонной волновой функции. Поэтому сама возможность существования бифотонных поляризационных кутритов как суперпозиции только трех базисных волновых функций обусловлена именно требованиями симметрии.

3.2. Матрицы плотности кутритов

В общем случае матрица плотности чистых состояний кутритов (3.1.4) определяется стандартным образом

$$\rho^{(3)}(\sigma_1, \sigma_2; \sigma'_1, \sigma'_2) = \Psi^{(3)}(\sigma_1, \sigma_2) \Psi^{(3)*}(\sigma'_1, \sigma'_2). \quad (3.2.1)$$

В матричном виде $\rho^{(3)}$ легко вычисляется с помощью уравнений (3.1.5), (3.1.6):

$$\rho^{(3)} = \Psi^{(3)} \otimes \Psi^{(3)\dagger} = \begin{matrix} & \begin{matrix} H_1 H_2 & H_1 V_2 & V_1 H_2 & V_1 V_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} H_1 H_2 \\ H_1 V_2 \\ V_1 H_2 \\ V_1 V_2 \end{matrix} & \left(\begin{array}{cc|cc} |C_1|^2 & \frac{1}{\sqrt{2}} C_1 C_2^* & \frac{1}{\sqrt{2}} C_1 C_2^* & C_1 C_3^* \\ \frac{1}{\sqrt{2}} C_1^* C_2 & \frac{1}{2} |C_2|^2 & \frac{1}{2} |C_2|^2 & \frac{1}{\sqrt{2}} C_3^* C_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} C_1^* C_2 & \frac{1}{2} |C_2|^2 & \frac{1}{2} |C_2|^2 & \frac{1}{\sqrt{2}} C_3^* C_2 \\ C_1^* C_3 & \frac{1}{\sqrt{2}} C_3 C_2^* & \frac{1}{\sqrt{2}} C_3 C_2^* & |C_3|^2 \end{array} \right) \end{matrix}. \quad (3.2.2)$$

Указанные сверху и слева от самой матрицы плотности обозначения строк и столбцов демонстрируют, что матрица плотности (3.2.2) записана в естественном базисе

$$\begin{aligned}
 H_1 H_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 H_1 V_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 V_1 H_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 V_1 V_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

В этом базисе в матрице плотности (3.2.2) естественным образом выделяются четыре блока, разделенные горизонтальной и вертикальной чертами. Внутри каждого блока поляризация фотона 1 неизменна, а поляризация фотона 2 изменяется. Такое разделение на блоки удобно для нахождения редуцированной матрицы плотности

$$\rho_r^{(3)}(\sigma_1, \sigma'_1) = \sum_{\sigma_2} \rho^{(3)}(\sigma_1, \sigma_2; \sigma'_1, \sigma_2). \tag{3.2.4}$$

В матричном виде суммирование по σ_2 осуществляется крайне просто: в полной матрице плотности (3.2.2) необходимо взять след в каждом из блоков по отдельности, что дает

$$\rho_r^{(3)} = \begin{pmatrix} |C_1|^2 + \frac{|C_2|^2}{2} & \frac{C_1 C_2^* + C_2 C_3^*}{\sqrt{2}} \\ \frac{C_1^* C_2 + C_2^* C_3}{\sqrt{2}} & |C_3|^2 + \frac{|C_2|^2}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.2.5}$$

Заметим, что хотя в общем случае произвольных двухчастичных состояний полной матрице плотности соответствуют две редуцированные матрицы плотности ($\rho_r^{(1)}$ и $\rho_r^{(2)}$ во Введении), в случае бифотонных куквартов редуцирование по переменной σ_1 дает такой же результат, как и редуцирование по

переменной σ_2 , т. е. в матричном виде обе редуцированные матрицы плотности выглядят идентично и определяются выражением (3.2.5).

Можно отметить также, что в работе [16] редуцированная матрица плотности (3.2.5) бифотонного кутрита находилась другим способом. Полная матрица плотности представлялась в виде суммы прямых произведений парциальных матриц, соответствующих фотонам 1 и 2:

$$\begin{aligned}
 \rho^{(3)} &= |C_1|^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_2 + \\
 &+ C_1 C_2^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_2 + \dots,
 \end{aligned}$$

после чего в каждом слагаемом вычислялся след матриц, отвечающих, например, переменным фотона 2. Очевидно, что способ, описанный выше и основанный на разбиении полной матрицы плотности (3.2.2) на блоки и на анализе переменных, ответственных за элементы блоков, значительно проще.

В следующих разделах будут описаны основные свойства бифотонных кутритов, определяемые их полной (3.2.2) и редуцированной (3.2.5) матрицами плотности. Но прежде отметим, что с одной стороны матрица плотности (3.2.2) явно имеет размерность 4×4 , а с другой, поскольку кутрит имеет только три базисных состояния, записанная в базисе этих базисных состояний ($\Psi_{HH}^{(3)}$, $\Psi_{HV}^{(3)} = \Psi_+^{Bell}$, $\Psi_{HV}^{(3)}$) матрица плотности трехмерна и является матрицей когерентности кутрита [21],

$$\rho_{coh} = \begin{pmatrix} |C_1|^2 & C_1 C_2^* & C_1 C_3^* \\ C_1^* C_3 & |C_2|^2 & C_3^* C_2 \\ C_1^* C_3 & C_3 C_2^* & |C_3|^2 \end{pmatrix}. \tag{3.2.6}$$

На самом деле противоречия между четырехмерным и трехмерным представлениями матрицы плотности бифотонного кутрита нет. С помощью перехода от естественного четырехмерного базиса (3.2.3) к базису четырех функций $\{\Psi_{HH}^{(3)}, \Psi_+^{Bell}, \Psi_-^{Bell}, \Psi_{VV}^{(3)}\}$ устанавливается прямая связь между матрицей плотности

(3.2.2) и матрицей когерентности (3.2.6). Преобразование базисов осуществляется матрицей

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2.7}$$

и результат преобразования определяется уравнением

$$U\rho_{4\times 4}^{(3)}U^T = \begin{pmatrix} \rho_{coh}^{3\times 3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.8)$$

В принципе, может возникать вопрос о том, зачем вообще рассматривать четырехмерное представление матрицы плотности бифотонных кутритов, в то время как они, казалось бы, в полной мере характеризуются трехмерной матрицей когерентности. Ответ состоит в том, что, как отмечено выше, четырехмерное представление (3.2.2) удобно именно для нахождения редуцированной матрицы плотности (3.2.5) по причине естественного разбиения всей матрицы 4×4 на четыре блока 2×2 , в каждом из которых фиксирована поляризация одного из фотонов, а поляризация другого фотона изменяется. В трехмерной матрице когерентности (3.2.6) такого разбиения на блоки нет, и поляризационные переменные одного и другого фотонов сильно перепутываются при преобразовании (3.2.8). Таким образом, резюме состоит в том, что для нахождения редуцированной матрицы плотности бифотонных кутритов, а значит, и для оценки степени их перепутывания трехмерная матрица когерентности недостаточна, необходимо и четырехмерное рассмотрение.

3.3. Перепутывание состояний бифотонных кутритов

Исходя из определения параметра Шмидта (1.6) и явного вида редуцированной матрицы плотности $\rho_r^{(3)}$ (3.2.5), находим параметр Шмидта для кутритов общего вида (2.9), (3.1.4)

$$K^{(3)} = \frac{1}{\text{Tr} \left[\left(\rho_r^{(3)} \right)^2 \right]} = \frac{2}{2 - |2C_1C_3 - C_2^2|^2}. \quad (3.3.1)$$

В случае двухкубитных чистых состояний другим часто используемым параметром степени перепутывания является конкарренс C [22]. Этот параметр связан в этом случае с параметром Шмидта соотношением $C = \sqrt{2(1 - K^{-1})}$ [23]. Из этого соотношения следует, что для бифотонных кутритов

$$C^{(3)} = |2C_1C_3 - C_2^2|. \quad (3.3.2)$$

В общем случае двухчастичных состояний с произвольной размерностью d одночастичного гильбертова пространства параметр Шмидта изменяется от единицы до $K_{max} = d$, а конкарренс — от нуля

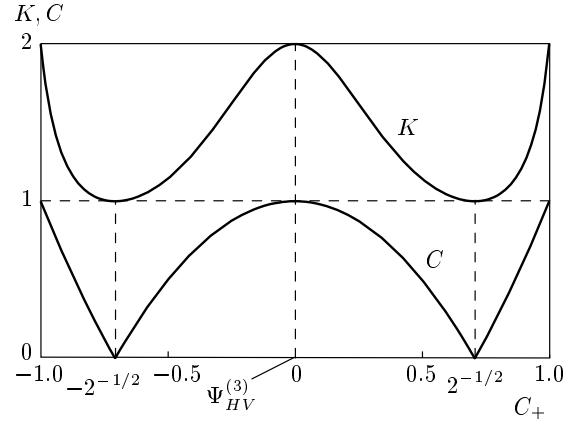


Рис. 1. Зависимости параметров K и C от $C_+ \equiv (C_1 + C_3)/\sqrt{2}$ для кутрита с действительными параметрами $C_{1,2,3}$

до $C_{max} = \sqrt{2(1 - 1/d)}$ [23]. В случае бифотонных кутритов

$$d = K_{max}^{(3)} = 2, \quad C_{max}^{(3)} = 1.$$

Исходя из выражений для $K^{(3)}$ (3.3.1) и $C^{(3)}$ (3.3.2), можно найти [16] общие трехпараметрические семейства максимально перепутанных и неперепутанных состояний бифотонных кутритов:

$$\Psi_{maxent}(\phi, \varphi_1, \varphi_3) = \sin \phi \exp \left[\frac{i}{2}(\varphi_1 + \varphi_3) \right] \Psi_{HV} + \frac{\cos \phi}{\sqrt{2}} [\exp(i\varphi_1) \Psi_{HH} - \exp(i\varphi_3) \Psi_{VV}] \quad (3.3.3)$$

и

$$\Psi_{nonent}(\phi, \varphi_1, \varphi_3) = \frac{\sin \phi}{\sqrt{2}} \exp \left[\frac{i}{2}(\varphi_1 + \varphi_3) \right] \Psi_{HV} + \cos^2 \frac{\phi}{2} \exp(i\varphi_1) \Psi_{HH} + \sin^2 \frac{\phi}{2} \exp(i\varphi_3) \Psi_{VV}. \quad (3.3.4)$$

На рис. 1 в качестве примера показана зависимость степени перепутывания состояния бифотонного кутрита от одного из его параметров, $C_+ \equiv (C_1 + C_3)/\sqrt{2}$. В частности, случай $C_+ = 0$ включает в себя и состояние с $C_1 = C_3 = 0$, т. е. состояние $|1_H, 1_V\rangle$ с волновой функцией $\Psi_{HV} = \Psi_+^{Bell}$, и это состояние, как показано, максимально перепутано, $K = 2$ и $C = 1$. Заметим, что данный конкретный результат — перепутанность состояния $|1_H, 1_V\rangle$ — согласуется с выводами работ [3, 11], но отличается от весьма распространенного мнения, что как данное состояние, так и любые состояния двух фотонов в

разных модах факторизованы и перепутаны (см., например, работы [4, 24]). По-видимому, утверждение о факторизации таких состояний связано с тем, что при определении перепутывания не учитываются квантовые корреляции тождественных частиц, связанные со свойствами симметрии их волновых функций и матричных элементов матрицы плотности. На самом деле для оценки полного перепутывания в чистых бифотонных состояниях учет симметричного перепутывания необходим, что и отражено в приведенных выше выражениях (3.3.1), (3.3.2) для параметров, характеризующих степень перепутывания бифотонных кутритов.

3.4. Моды Шмидта бифотонных кутритов

Моды Шмидта бифотонных кутритов — это собственные функции редуцированной матрицы плотности $\rho_r^{(3)}$ (3.2.5). Ввиду того, что размерность матрицы $\rho_r^{(3)}$ есть 2×2 , она имеет только две пары симметричных мод Шмидта, которые находятся из уравнения

$$\rho^{(3)}\varphi_{\pm} = \lambda_{\pm}\varphi_{\pm}. \quad (3.4.1)$$

В отличие от общего вида разложения Шмидта (1.5), в случае бифотонных кутритов моды Шмидта φ_{\pm} и χ_{\pm} совпадают, если только нет вырождения, $\lambda_{+} \neq \lambda_{-}$, и разложение Шмидта имеет вид

$$\Psi(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{\pm} \sqrt{\lambda_{\pm}} \varphi_{\pm}(\sigma_1)\varphi_{\pm}(\sigma_2). \quad (3.4.2)$$

Собственные значения λ_{\pm} редуцированной матрицы плотности бифотонных кутритов очень просто выражаются через конкарренс $C^{(3)}$ (3.3.2):

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - C^{(3)2}} \right). \quad (3.4.3)$$

При $C^{(3)} = 0$ состояния кутрита не перепутаны, и при этом $\lambda_{+} = 1$ и $\lambda_{-} = 0$. В силу последнего равенства, в этом случае в разложении Шмидта (1.5) остается только одно слагаемое и волновая функция явно факторизована, $\Psi(\sigma_1, \sigma_2) = \varphi_{+}(\sigma_1)\varphi_{+}(\sigma_2)$.

При $C = 1$ состояния кутрита максимально перепутаны и собственные значения редуцированной матрицы плотности двукратно вырождены, $\lambda_{+} = \lambda_{-} = 1/2$. В этом случае, в силу вырождения, определения двух пар мод Шмидта неоднозначны, но в любом варианте есть две пары мод Шмидта и два слагаемых с одинаковыми весами в разложении Шмидта. Рассмотрим, например, простейшее максимально перепутанное состояние кутрита с различными поляризациями фотонов, $|1_H, 1_V\rangle$ (по определению кутрита (2.5), в этом случае $C_1 = C_3 = 0$ и

$C_2 = 1$). Согласно выражению (3.3.2), конкарренс этого состояния $C_{HV}^{(3)} = 1$, а собственные значения матрицы $\rho^{(3)}$ вырождены и равны $1/2$. Моды Шмидта в этом случае легко находятся [16] и в матричной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_{+} = \chi_{+} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \varphi_{-} = \chi_{-} &= \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

вследствие чего разложение Шмидта принимает вид

$$\begin{aligned} \Psi_{HV}^{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\pm} \varphi_{\pm}(\sigma_1)\varphi_{\pm}(\sigma_2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \\ &\times \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_2 - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_2 \right] \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

в согласии с определениями $\Psi_{HV}^{(3)} = \Psi_{+}^{Bell}$ в уравнениях (3.1.2) и (3.1.5).

Однако, как было отмечено выше, в случае вырожденных собственных значений редуцированных матриц плотности ($\lambda_{+} = \lambda_{-} = 1/2$) возможно различное определение мод Шмидта. Конкретно, в случае состояния $|1_H, 1_V\rangle$ любые ортонормированные линейные комбинации мод Шмидта φ_{+} и φ_{-} , а также и χ_{+} и χ_{-} (3.4.4) тоже могут рассматриваться как моды Шмидта данного состояния. В частности, модами Шмидта состояния $|1_H, 1_V\rangle$ можно считать и сомножители в сумме двух слагаемых в исходном определении $\Psi_{HV}^{(3)}$ (3.1.2),

$$\tilde{\varphi}_{+} = \tilde{\chi}_{-} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\varphi}_{-} = \tilde{\chi}_{+} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.4.6)$$

что приводит разложение Шмидта к виду

$$\Psi_{HV}^{(3)} = \Psi_{+}^{Bell} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\pm} \tilde{\varphi}_{\pm}(\sigma_1)\tilde{\chi}_{\pm}(\sigma_2), \quad (3.4.7)$$

эквивалентному определению (3.1.2).

Поскольку структура мод Шмидта состояния $|1_H, 1_V\rangle$ весьма проста, нетрудно сформулировать и возможный метод их выделения в эксперименте. Схема такого возможного эксперимента показана на рис. 2. Пучок бифотонов, характеризуемых вектором состояния $|1_H, 1_V\rangle$, генерируется в нелинейном двулучепреломляющем кристалле в процессе СПРС в условиях коллинеарного вырожденного синхронизма типа II. Пучок направляется на неселективный делитель I и делится на два канала, I и II. Считаем, что при таком разделении, как и при всех последующих преобразованиях пучков фотонов в схеме

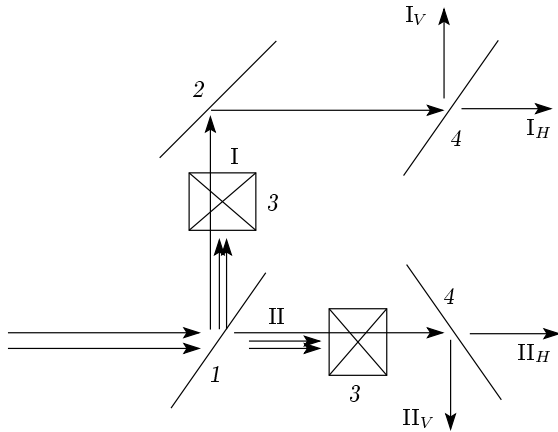


Рис. 2. Схема выделения мод Шмидта состояния $|1_H, 1_V\rangle$: 1 — светоделитель; 2 — зеркало; 3 — устройства, удаляющие неразделенные пары; 4 — поляризационно-селективные светоделители

на рис. 2, направление горизонтальной поляризации остается неизменным и перпендикулярным плоскости рисунка, а направления вертикальной поляризации лежат в плоскости рисунка и перпендикулярны направлениям волновых векторов фотонов.

В каждом из каналов I и II после светоделителя 1 присутствуют как одиночные фотоны разделившихся пар так и неразделенные пары фотонов. Неразделенные пары мешают выделению мод Шмидта и должны быть «убиты». Это может быть сделано достаточно просто по схеме, использованной в эксперименте по телепортации [25] и обозначенной 3 на рис. 2. В каждом из двух каналов ставятся кристаллы, настроенные на удвоение частоты, после прохождения которых неразделенные пары превращаются в одиночные фотоны вдвое большей частоты, которые уводятся из пучков с помощью дихроических светоделителей. В результате в каждом канале остаются только одиночные СПРС-фотоны, поляризация которых не определена: либо H в канале I и V в канале II, либо, наоборот, V в канале I и H в канале II. Далее, в каждом из каналов I и II ставятся поляризационно-селективные светоделители 4, которые направляют фотоны в канал I_H либо I_V и в канал II_H либо II_V в зависимости от их поляризации. Это и будут моды Шмидта $\tilde{\varphi}_{\pm}$ и $\tilde{\chi}_{\pm}$ (3.4.6). Мы точно знаем, что в каналах I и II остались только фотоны разделенных пар, т. е. если в канале I есть фотон, то другой фотон пары обязательно и одновременно попадает в канал II. Если после поляризационного светоделителя в канале I фотон попадает, например, в канал I_H , то фотон в канале II с вероятностью 100%

попадет в канал II_V , а ни в коем случае не в канал II_H . И вторая 100-процентно скоррелированная пара — это фотоны в каналах I_V и II_H .

Аналогичным образом можно выделить и моды Шмидта вида φ_{\pm} и χ_{\pm} (3.4.4). Для этого, во-первых, необходимо повернуть на 45° поляризационно-селективные светоделители 4 (в плоскостях, перпендикулярных направлениям волновых векторов фотонов). Во-вторых, в устройствах 3, удаляющих неразделенные пары, необходимо установить по два спаренных кристалла, осуществляющих ап-конверсию пары фотонов, поляризованных под углом 45° относительно горизонтальной оси в одном кристалле, и пары фотонов, поляризованных под углом 135° , в другом. Тогда после устройств 3 на рис. 2 в каналах I и II остаются только одиночные фотоны разделенных пар с поляризацией в направлениях 45° или 135° в каждом канале. После светоделителей 4 фотоны направляются в индивидуальные попарно скоррелированные каналы I_{45° , II_{45° и I_{-45° , II_{-45° . Это и есть моды Шмидта φ_+ , χ_+ и φ_- , χ_- .

В случае состояний кутритов, более сложных чем $|1_H, 1_V\rangle$, для выделения мод Шмидта необходимо сначала находить их явный вид из уравнения (3.4.1) и затем в схеме на рис. 2 использовать в качестве поляризационно-селективных светоделителей 4 более сложные устройства, выделяющие в каналах I_+ , II_+ , и I_- , II_- именно найденные ортогональные моды Шмидта φ_+ , χ_+ и φ_- , χ_- .

Заметим, что если задача о выделении мод Шмидта решена, то в рамках того же эксперимента определяется и степень перепутывания бифотонного кутрита. В самом деле, при правильно подобранных и выделяющих моды Шмидта светоделителях 4 можно детекторами померить число пар N_+ и N_- , регистрируемых в парах каналов I_+ , II_+ , и I_- , II_- . В соответствии с разложением (теоремой) Шмидта (3.4.2), числа регистрируемых пар N_+ и N_- пропорциональны соответственно λ_+ и λ_- , где λ_{\pm} — собственные значения редуцированной матрицы плотности, определяемые уравнением (3.4.3). Коэффициент пропорциональности между N_{\pm} и λ_{\pm} определяется, в частности, эффективностью детекторов, и его контролировать трудно. Но вот экспериментально измеряемое отношение регистрируемых чисел пар в модах Шмидта к таким факторам не чувствительно и равно

$$\frac{N_+}{N_-} = \frac{\lambda_+}{\lambda_-} = \frac{1 + \sqrt{1 - C^{(3)^2}}}{1 - \sqrt{1 - C^{(3)^2}}}, \quad (3.4.8)$$

откуда легко находится и конкарренс бифотонного кутрита.

3.5. Восстановление параметров бифотонных кутритов по результатам измерений по схеме совпадений

Помимо выделения мод Шмидта может быть также поставлена задача получения экспериментальных данных, достаточных для восстановления изначально неизвестных параметров $C_{1,2,3}$ бифотонного кутрита. В частности, при этом могут быть измерены параметр Шмидта и конкарренс, характеризующие степень перепутывания состояния. В принципе, эта задача решается общими методами квантовой томографии [26, 27]. Но для чистых бифотонных состояний есть и другой, более простой метод, основанный на измерении чисел фотонов по схеме совпадений [16]. Схема возможного эксперимента изображена на рис. 3. Очевидно ее сходство со схемой на рис. 2, но схема на рис. 3 проще: в ней не требуется ликвидации неразделенных пар, образующихся после неселективного светоделителя, так как при измерениях по схеме совпадений неразделенные пары вообще никак себя не проявляют. Измерения должны проводиться двумя детекторами с установленными перед ними различным образом ориентированными поляризаторами. Для полного измерения всех параметров кутрита необходимо измерение чисел фотонов, регистрируемых по схеме совпадений, при всех указанных на рис. 3 ориентациях каждого из поляризаторов в каналах I и II вдоль осей x и y , а также в направлениях осей x' и y' , повернутых на угол 45° по отношению к x и y . Результатом измерений явится определение условных вероятностей в каждом из двух базисов (xy) и $(x'y')$:

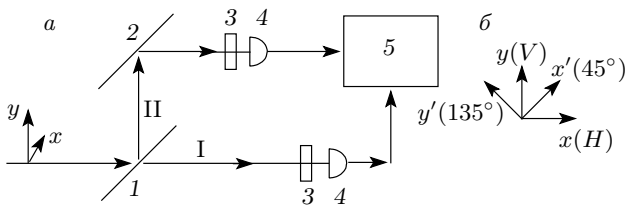


Рис. 3. а) Схема эксперимента для измерения чисел фотонов по схеме совпадений: 1 — светоделитель; 2 — зеркало; 3 — поляризаторы; 4 — детекторы; 5 — компьютер, выделяющий сигналы совпадений. б) Ориентация поляризаторов в двух базисах, (xy) и $(x'y')$

$$w_H|_H, w_H|_V, w_V|_H, w_V|_V, w_{45^\circ}|_{45^\circ},$$

$$w_{45^\circ}|_{135^\circ}, w_{135^\circ}|_{45^\circ}, w_{135^\circ}|_{135^\circ},$$

где, например, обозначение $w_H|_V$ означает вероятность регистрации в канале I горизонтально поляризованного фотона при условии, что в канале II одновременно регистрируется вертикально поляризованный фотон. Суммы условных вероятностей определяют и одночастичные (безусловные или абсолютные) вероятности

$$w_\sigma^{(s)} = \sum_{\sigma'} w_{\sigma|\sigma'}.$$

Например, $w_H^{(s)} = w_H|_H + w_H|_V$ есть вероятность регистрации горизонтально поляризованного фотона в канале I независимо от того, какова поляризация второго фотона всех пар в канале II, и т. п. Очевидно, что суммы двух абсолютных вероятностей регистрации фотонов с ортогональными поляризациями (в каждом данном канале, I или II) равны единице,

$$w_H^{(s)} + w_V^{(s)} = w_{45^\circ}^{(s)} + w_{135^\circ}^{(s)} = 1.$$

Кроме того, в случае кутритов перекрестные условные вероятности равны друг другу:

$$w_H|_V = w_V|_H, \quad w_{45^\circ}|_{135^\circ} = w_{135^\circ}|_{45^\circ}.$$

С учетом этого в каждом из двух базисов, (xy) и $(x'y')$, в результате измерений по схеме совпадений мы можем определить только две, а не четыре независимые константы. Измерения в двух базисах увеличивают число измеряемых констант до четырех. Например, это четыре абсолютные вероятности, $w_H^{(s)}, w_V^{(s)}, w_{45^\circ}^{(s)}$ и $w_{135^\circ}^{(s)}$. Четыре — это именно то количество независимых констант, которое характеризует бифотонный кутрит общего вида. В самом деле, три параметра $C_{1,2,3}$ могут быть комплексными, они задаются шестью действительными константами. С учетом нормировки $\sum_i |C_i|^2 = 1$ остается пять независимых констант. В качестве одной из них можно выбрать общую фазу волновой функции, не влияющую ни на какие измеряемые величины. Полагая эту общую фазу равной нулю, мы уменьшаем число независимых параметров кутрита до четырех. Наконец, чисто математически условные и безусловные вероятности могут быть выражены через параметры кутрита $C_{1,2,3}$. С учетом того, что вероятности $w_{\sigma|\sigma'}$ могут быть измерены экспериментально (как описано выше), мы можем подставить эти измеренные величины в выражения для вероятностей как

функций параметров $C_{1,2,3}$ и получить четыре уравнения для нахождения четырех независимых констант, характеризующих кутрит и содержащих информацию о результатах измерений. Не останавливаясь на деталях вывода и анализа этих уравнений (см. [16], Appendix A), приведем только одну формулу, относящуюся к случаю действительных констант $C_{1,2,3}$ и выражающую параметр Шмидта прямо через экспериментально измеряемые абсолютные вероятности $w_\sigma^{(s)}$:

$$K^{(3)} = 2 \left[1 + \left(w_H^{(s)} - w_V^{(s)} \right)^2 + \left(w_{45^\circ}^{(s)} - w_{135^\circ}^{(s)} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (3.5.1)$$

3.6. Степень поляризации бифотонных кутритов

Редуцированная матрица плотности бифотонных кутритов (3.2.5) может быть использована для нахождения поляризационных параметров Стокса (в расчете на один фотон), по определению [28] равных

$$\mathbf{S} = \text{Tr} \left(\rho_r^{(3)} \boldsymbol{\sigma} \right), \quad (3.6.1)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — вектор матриц Паули. Определение (3.6.1) тождественно хорошо известному определению параметров Стокса через поляризационную матрицу ρ_{pol} фотона [29] $\mathbf{S} = \text{Tr} (\rho_{pol} \boldsymbol{\sigma})$. Отсюда следует, что и сама редуцированная матрица плотности кутрита (3.2.5) тождественна поляризационной матрице фотона

$$\rho_r^{(3)} \equiv \rho_{pol} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + S_3 & S_1 - iS_2 \\ S_1 + iS_2 & 1 - S_3 \end{pmatrix}. \quad (3.6.2)$$

Степень поляризации фотона определяется через параметры Стокса как $P = |\mathbf{S}|$ [29, 30]. С учетом тождества (3.6.2) и определения степени перепутывания кутрита (3.3.2) находим следующее общее соотношение между степенями перепутывания и поляризации бифотонных кутритов:

$$C^2 + P^2 = 1. \quad (3.6.3)$$

Важность этого соотношения определяется тем, что оно может быть использовано для нахождения степени перепутывания бифотонных кутритов на основе результатов чисто поляризационных измерений параметров Стокса и степени поляризации. Соотношение (3.6.3) показывает, в частности, что макси-

мально перепутанными и неполяризованными являются белловские состояния $\Psi_+^{Bell} = \Psi_{HV}^{(3)}$ (3.1.3) и

$$\Phi_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 \right]. \quad (3.6.4)$$

С другой стороны, примерами максимально поляризованных и неперепутанных кутритов являются базисные состояния $\Psi_{HH}^{(3)}$ (3.1.1) и $\Psi_{VV}^{(3)}$ (3.1.3).

4. БИФОТОННЫЕ КУКВАРТЫ

4.1. Поляризационно-частотные волновые функции фотона, кудиты

Основу построения волновых функций бифотонных куквартов составляют однофотонные поляризационно-частотные волновые функции. Если состояние фотона характеризуется его поляризацией (H или V) и частотой (ω_h или ω_l), то в целом эти параметры определяют четыре возможных однофотонных моды: Hh , Hl , Vh и Vl , где символы « h » и « l » используются для сокращения записи вместо ω_h и ω_l . Четырём модам соответствуют четыре оператора рождения фотонов в указанных модах: a_{Hh}^\dagger , a_{Hl}^\dagger , a_{Vh}^\dagger , a_{Vl}^\dagger , и четыре вектора однофотонных состояний: $|1_{Hh}\rangle$, $|1_{Hl}\rangle$, $|1_{Vh}\rangle$, $|1_{Vl}\rangle$. Волновые функции этих состояний зависят от двух переменных, поляризационной σ и частотной ω , и имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_{Hh}(\sigma, \omega) &= \langle \sigma, \omega | 1_{Hh} \rangle = \delta_{\sigma, H} \delta_{\omega, \omega_h} \equiv \\ &\equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{pol} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{freq} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

$$\begin{aligned} \psi_{Hl}(\sigma, \omega) &= \langle \sigma, \omega | 1_{Hl} \rangle = \delta_{\sigma, H} \delta_{\omega, \omega_l} \equiv \\ &\equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{pol} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{freq} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

$$\begin{aligned} \psi_{Vh}(\sigma, \omega) &= \langle \sigma, \omega | 1_{Vh} \rangle = \delta_{\sigma, V} \delta_{\omega, \omega_h} \equiv \\ &\equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{pol} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{freq} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

$$\begin{aligned} \psi_{Vl}(\sigma, \omega) &= \langle \sigma, \omega | 1_{Vl} \rangle = \delta_{\sigma, V} \delta_{\omega, \omega_l} \equiv \\ &\equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{pol} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{freq} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

В матричной записи волновых функций в виде прямого произведения двух двустрочных столбцов верхние индексы «*pol*» и «*freq*» означают, что столбцы относятся соответственно к поляризационной и частотной частям волновых функций. В частотных столбцах принято, что верхняя строчка отвечает частоте ω_h , а нижняя — ω_l .

Из матричного представления волновых функций (4.1.1)–(4.1.4) как четырехстрочных столбцов явно видно, что эти функции образуют базис в четырехмерном гильбертовом пространстве. Такие функции и их суперпозиции

$$\Psi = A_1 \psi_{Hh} + A_2 \psi_{Hl} + A_3 \psi_{Vh} + A_4 \psi_{Vl}$$

являются кудитами с размерностью однофотонного гильбертова пространства $d = 4$. Размерность гильбертова пространства в этом случае в два раза больше, чем в случае кубитов, где $d_{qb} = 2$. Удвоение размерности гильбертова пространства в случае фотонов, не вырожденных по частоте, связано с появлением у них второй степени свободы — частоты — в дополнение к поляризации и с рассмотрением частоты как независимой переменной.

4.2. Волновые функции поляризационно-частотных бифотонных куквартов

Бифотонные поляризационно-частотные кукварты формируются на основе пар однофотонных состояний, рассмотренных в предыдущем разделе. Поэтому ясно, что состояния бифотонных куквартов являются двухкудитными, а не двухкубитными, как это часто предполагается. Как уже отмечалось выше, существуют только четыре бифотонных поляризационно-частотные моды, $\{Hh, Hl\}$, $\{Hh, Vl\}$, $\{Vh, Hl\}$, $\{Vh, Vl\}$. Соответствующие векторы состояний равны

$$\begin{aligned} a_{Hh}^\dagger a_{Hl}^\dagger |0\rangle &= |1_{Hh}, 1_{Hl}\rangle, \\ a_{Hh}^\dagger a_{Vl}^\dagger |0\rangle &= |1_{Hh}, 1_{Vl}\rangle, \\ a_{Vh}^\dagger a_{Hl}^\dagger |0\rangle &= |1_{Vh}, 1_{Hl}\rangle, \\ a_{Vh}^\dagger a_{Vl}^\dagger |0\rangle &= |1_{Vh}, 1_{Vl}\rangle. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Подчеркнем, что в отличие от кутритов, все базисные состояния бифотонных куквартов — это состояния двух фотонов в различных модах.

В соответствии с тем, что мы рассматриваем частоты фотонов как самостоятельные переменные, волновые функции бифотонных куквартов зависят от двух пар переменных, поляризационной и частотной, для каждого фотона, σ_1, ω_1 и σ_2, ω_2 . Разумеется, в силу неразличимости фотонов мы не можем указать, какой из фотонов имеет переменные 1, а какой 2. Но мы точно знаем, что число переменных «координатных» волновых функций многофотонных состояний равно числу фотонов, умноженному на число степеней свободы каждого фотона. В случае бифотонных поляризационно-частотных куквартов полное число переменных волновых функций равно четырем, по две (т. е. по числу степеней свободы) на каждый из двух фотонов. Базисные волновые функции бифотонных куквартов находятся по общим правилам нахождения «координатных» волновых функций многофотонных состояний [20] и имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi_{HH}^{(4)}(\sigma_1, \omega_1; \sigma_2, \omega_2) &= \langle \sigma_1, \omega_1; \sigma_2, \omega_2 | 1_{Hh}, 1_{Hl} \rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{Hh}(\sigma_1, \omega_1) \psi_{Hl}(\sigma_2, \omega_2) + \\ &+ \psi_{Hl}(\sigma_1, \omega_1) \psi_{Hh}(\sigma_2, \omega_2)] = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \\ &\times \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \right\}, \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{HV}^{(4)}(\sigma_1, \omega_1; \sigma_2, \omega_2) &= \langle \sigma_1, \omega_1; \sigma_2, \omega_2 | 1_{Hh}, 1_{Vl} \rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{Hh}(\sigma_1, \omega_1) \psi_{Vl}(\sigma_2, \omega_2) + \\ &+ \psi_{Vl}(\sigma_1, \omega_1) \psi_{Hh}(\sigma_2, \omega_2)] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \right\}, \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{VH}^{(4)}(\sigma_1, \omega_1; \sigma_2, \omega_2) &= \langle \sigma_1, \omega_1; \sigma_2, \omega_2 | 1_{Vh}, 1_{Hl} \rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{Vh}(\sigma_1, \omega_1) \psi_{Hl}(\sigma_2, \omega_2) + \\ &+ \psi_{Hl}(\sigma_1, \omega_1) \psi_{Vh}(\sigma_2, \omega_2)] = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \\ &\times \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \right\}, \quad (4.2.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{VV}^{(4)}(\sigma_1, \omega_1; \sigma_2, \omega_2) &= \langle \sigma_1, \omega_1; \sigma_2, \omega_2 | 1_{Vh}, 1_{Vl} \rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{Vh}(\sigma_1, \omega_1) \psi_{Vl}(\sigma_2, \omega_2) + \\ &+ \psi_{Vl}(\sigma_1, \omega_1) \psi_{Vh}(\sigma_2, \omega_2)] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \right\}. \quad (4.2.5) \end{aligned}$$

Волновая функция бифотонного кукварта общего вида определяется суперпозицией базисных волновых функций (4.2.2)–(4.2.5):

$$\begin{aligned} \Psi^{(4)} &= C_1 \Psi_{HH}^{(4)} + C_2 \Psi_{HV}^{(4)} + \\ &+ C_3 \Psi_{VH}^{(4)} + C_4 \Psi_{VV}^{(4)}. \quad (4.2.6) \end{aligned}$$

Как и должно быть, все четыре базисные волновые функции бифотонных куквартов (4.2.2)–(4.2.5), так же как и волновая функция бифотонного кукварта общего вида (4.2.6), симметричны по отношению к перестановкам переменных частиц $1 \leftrightarrow 2$. После перемножения столбцов в уравнениях (4.2.2)–(4.2.5) базисные волновые функции бифотонных куквартов, а значит, и волновая функция общего вида (4.2.6) принимают вид столбцов с шестнадцатью строчками и, следовательно, принадлежат к гильбертову пространству с размерностью $D = d^2 = 16$. Разумеется, как и в случае бифотонных кутритов, четыре базисные волновые функции бифотонных куквартов, (4.2.2)–(4.2.5), не образуют полной системы функций в 16-мерном гильбертовом пространстве. Недостающие 12 базисных функций — это волновые функции состояний фотонов с одинаковыми частотами (ω_h, ω_h и ω_l, ω_l) и антисимметричные волновые функции. В определении волновой функции бифотонных куквартов общего вида (4.2.6) эти недостающие базисные волновые функции могут быть добавлены только

с нулевыми коэффициентами соответственно по условиям экспериментов с невырожденным СПРС и по свойствам двухбозонных волновых функций. Двухкубитная природа бифотонных куквартов и их высокая размерность ($D = 16$) резко отличают их от двухкубитных куквартов, рассматриваемых ниже.

4.3. Двухкубитные кукварты

Двухкубитные кукварты — это состояния двух различных частиц, базирующиеся на одночастичных состояниях с одной степенью свободы кубитного типа. Простейший пример — спиновые состояния электрона и протона при полном спине системы, равном единице. Базисные векторы состояния такого кукварта — это $|1_{e\uparrow}, 1_{p\uparrow}\rangle, |1_{e\uparrow}, 1_{p\downarrow}\rangle, |1_{e\downarrow}, 1_{p\uparrow}\rangle, |1_{e\downarrow}, 1_{p\downarrow}\rangle$. Единственная степень свободы частиц — это проекция спина на ось z : вверх, \uparrow , или вниз, \downarrow . Суперпозиция этих состояний с коэффициентами $C_{1,2,3,4}$ — это двухкубитный кукварт общего вида. Его волновая функция в матричном виде имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_{e-p}^{(4)} &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_e \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_p + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_e \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_p + \\ &+ C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_e \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_p + C_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_e \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_p, \quad (4.3.1) \end{aligned}$$

где единица в верхних строчках столбцов означает, что спин направлен вдоль оси z , а в нижних строчках — что против направления оси z , соответственно \uparrow и \downarrow .

Для состояний с волновой функцией вида (4.3.1) легко находится редуцированная матрица плотности

$$\begin{aligned} \rho_{r(2qb)}^{(4)} &= \\ &= \begin{pmatrix} |C_1|^2 + |C_2|^2 & C_1 C_3^* + C_2 C_4^* \\ C_1^* C_3 + C_2^* C_4 & |C_3|^2 + |C_4|^2 \end{pmatrix}, \quad (4.3.2) \end{aligned}$$

параметр Шмидта

$$\begin{aligned} K_{2qb} &= \frac{1}{1 - 2|C_1 C_4 - C_2 C_3|^2}, \quad (4.3.3) \\ 1 &\leq K_{2qb} \leq 2 \end{aligned}$$

и конкорренс [28, 31]

$$\begin{aligned} C_{2qb} &= \sqrt{2 \left(1 - K_{2qb}^{-1} \right)} = 2|C_1 C_4 - C_2 C_3|, \quad (4.3.4) \\ 0 &\leq C_{2qb} \leq 1. \end{aligned}$$

Собственные значения $\lambda_{\pm(2qb)}$ редуцированной матрицы плотности двухкубитных состояний (4.3.2) связаны с C_{2qb} (4.3.4) тем же соотношением, что и в случае бифотонных кутритов (3.4.3):

$$\lambda_{\pm(2qb)} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - C_{2qb}^2} \right). \quad (4.3.5)$$

При исследовании бифотонных куквартов обычно считалось [31], что двухкубитная модель по-прежнему применима, так же как и все следующие из нее результаты (4.3.2)–(4.3.4). Это значит, что сохраняется и вид волновой функции кукварта, в которой только следует заменить переменные электрона и протона на переменные неразличимых фотонов 1 и 2:

$$\begin{aligned} \Psi_{2qb}^{(4) biph} = & C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 + \\ & + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 + C_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2. \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Эта волновая функция асимметрична по отношению к перестановке переменных частиц, $1 \leftrightarrow 2$. У фотонов учитывается только одна поляризационная степень свободы. При этом, если речь идет о невырожденных по частоте СПРС-процессах, приходится принять, что частоты фотонов не являются переменными, независимыми от поляризационных переменных, а жестко определены. Например, таким образом, что $\omega_1 \equiv \omega_h$ и $\omega_2 \equiv \omega_l$.

Очевидно, что в свете обсуждения в предыдущем разделе, а также во Введении и в статье [16] все эти предположения нельзя считать приемлемыми. Бифотонные кукварты — не двухкубитные, а двухкудитные состояния. Их волновые функции не могут быть асимметричными. В невырожденном коллинеарном СПРС частоты фотонов не могут быть фиксированными или жестко привязанными к поляризационным переменным, поскольку в силу тождественности частиц невозможно сказать определенно, какой из фотонов какую имеет частоту и, независимо, какую поляризацию. Двухкубитная модель вполне применима к куквартам, образованным парами различных частиц, но неприменима к бифотонным куквартам. Но при всем этом интересно отметить, что, как будет показано ниже, элементы двухкубитной теории находят свое отражение и в теории, описывающей двухкудитные состояния бифотонных куквартов.

4.4. Альтернативные формы записи волновых функций бифотонных куквартов

Прежде чем анализировать свойства перепутывания бифотонных куквартов, приведем еще несколько альтернативных способов записи их волновой функции общего вида (4.2.6) [17]. Во-первых, мы можем ввести вместо пар функций $\Psi_{HH}^{(4)}$, $\Psi_{VV}^{(4)}$ и $\Psi_{HV}^{(4)}$, $\Psi_{VH}^{(4)}$ их суммы и разности, которые можно выразить через произведения волновых функций поляризационных и частотных белловских состояний:

$$\frac{\Psi_{HH}^{(4)} \pm \Psi_{VV}^{(4)}}{\sqrt{2}} = \Phi_{\pm}^{(Bell),pol} \otimes \Psi_{\pm}^{(Bell),freq}, \quad (4.4.1)$$

$$\frac{\Psi_{HV}^{(4)} \pm \Psi_{VH}^{(4)}}{\sqrt{2}} = \Psi_{\pm}^{(Bell),pol} \otimes \Phi_{\pm}^{(Bell),freq}, \quad (4.4.2)$$

где Ψ_{\pm} и Φ_{\pm} — волновые функции белловских состояний,

$$\begin{aligned} \Psi_{\pm} = & \frac{1}{\sqrt{2}} \times \\ & \times \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \right], \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\pm} = & \frac{1}{\sqrt{2}} \times \\ & \times \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 \right]. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

В терминах произведений волновых функций белловских состояний общее выражение (4.2.6) для волновой функции бифотонного кукварта записывается в виде

$$\begin{aligned} \Psi^{(4)} = & \sum_{\pm} C_{\pm} \Phi_{\pm}^{(Bell),pol} \otimes \Psi_{\pm}^{(Bell),freq} + \\ & + \sum_{\pm} B_{\pm} \Psi_{\pm}^{(Bell),pol} \otimes \Phi_{\pm}^{(Bell),freq}, \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

где

$$C_{\pm} = \frac{C_1 \pm C_4}{\sqrt{2}}, \quad B_{\pm} = \frac{C_2 \pm C_3}{\sqrt{2}}. \quad (4.4.6)$$

Произведения поляризационных и частотных белловских волновых функций в уравнении (4.4.5) могут характеризоваться термином «двойные белловские состояния» (double-Bell states).

В некоторых отношениях более удобным, чем полное разложение волновой функции бифотонного кукварта по двойным белловским состояниям (4.4.5), может оказаться смешанный вариант, в котором разложение по двойным белловским состояниям используется только для функций $\Psi_{HV}^{(4)}$ и $\Psi_{VH}^{(4)}$ (4.4.2). Тогда выражение для волновой функции бифотонного кукварта общего вида может быть представлено в виде

$$\Psi^{(4)} = \Psi^{(3)} \otimes \Psi_+^{(Bell),freq} + B_- \Psi_-^{(Bell),pol} \otimes \Psi_-^{(Bell),freq}, \quad (4.4.7)$$

где

$$\Psi^{(3)} = C_1 \Psi_{HH}^{(3)} + B_+ \Psi_+^{(Bell),pol} + C_4 \Psi_{VV}^{(3)} \quad (4.4.8)$$

— волновая функция поляризационного бифотонного кутрита общего вида (3.1.4), в которой только переобозначены коэффициенты: $C_2 \rightarrow B_+$, $C_3 \rightarrow C_4$.

Наконец, еще одно очень полезное выражение для общей волновой функции бифотонных куквартов основано на представлении ее в виде суммы слагаемых с факторизованными частотными и поляризационными переменными:

$$\Psi^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\Psi_{2qb}^{(4)biph} \delta_{\omega_1, \omega_h} \delta_{\omega_2, \omega_l} + \tilde{\Psi}_{2qb}^{(4)biph} \delta_{\omega_2, \omega_h} \delta_{\omega_1, \omega_l} \right] \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \times$$

$$\times \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1^{freq} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2^{freq} \otimes \Psi_{2qb}^{(4)biph} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1^{freq} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2^{freq} \otimes \tilde{\Psi}_{2qb}^{(4)biph} \right], \quad (4.4.9)$$

где

$$\tilde{\Psi}_{2qb}^{(4)biph} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 + C_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 \quad (4.4.10)$$

— волновая функция бифотонного двухкубитного кукварта, причем $\tilde{\Psi}_{2qb}^{(4)biph}$ отличается от $\Psi_{2qb}^{(4)biph}$ (4.3.1) только заменой $C_2 \leftrightarrow C_3$.

Представление (4.4.9) показывает явно, что волновая функция бифотонного кукварта не тождественна волновой функции двухкубитного кукварта, но может быть выражена через двухкубитные волновые функции $\Psi_{2qb}^{(4)biph}$ и $\tilde{\Psi}_{2qb}^{(4)biph}$.

4.5. Матрицы плотности бифотонных куквартов

Самый простой способ получения и записи матрицы плотности куквартов $\rho^{(4)} = \Psi^{(4)} \otimes \Psi^{(4)\dagger}$ состоит в использовании представления (4.4.9) для волновой функции $\Psi^{(4)}$, из которого сразу же находим

$$\rho^{(4)} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{cc|cc} h_1 h_2 & h_1 l_2 & l_1 h_2 & l_1 l_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{2qb}^{(4)} & \Psi_{2qb}^{(4)biph} \otimes \tilde{\Psi}_{2qb}^{(4)biph\dagger} & 0 \\ \hline 0 & \tilde{\Psi}_{2qb}^{(4)biph} \otimes \Psi_{2qb}^{(4)biph\dagger} & \tilde{\rho}_{2qb}^{(4)biph} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} h_1 h_2 \\ h_1 l_2 \\ l_1 h_2 \\ l_1 l_2 \end{array}, \quad (4.5.1)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_{2qb}^{(4)} &= \Psi_{2qb}^{(4)biph} \otimes \Psi_{2qb}^{(4)biph\dagger}, \\ \tilde{\rho}_{2qb}^{(4)} &= \tilde{\Psi}_{2qb}^{(4)biph} \otimes \tilde{\Psi}_{2qb}^{(4)biph\dagger}. \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

В записи полной матрицы плотности бифотонного кукварта (4.5.1) явно указаны только частотные переменные $h \equiv \omega_h$ и $l \equiv \omega_l$. Поляризационные переменные содержатся внутри элементов матрицы плотности, каждый из которых представляет собой матрицу 4×4 (в согласии с тем, что полный размер матрицы плотности есть 16×16). Это относится и к нулевым матричным элементам, которые соответствуют двенадцати пустым базисным двухфотонным состояниям, исключаемым в определении бифотонных куквартов (см. обсуждение в разд. 4.2).

Горизонтальной и вертикальной линиями выделены четыре блока полной матрицы плотности, в каждом из которых частотная переменная фотона 1 неизменна, а переменная фотона 2 меняется. Это удобно для редуцирования матрицы плотности по частотной переменной ω_2 , сводящегося к взятию следа каждого из блоков матрицы по отдельности (аналогично случаю бифотонных кутритов для поляризационных переменных, уравнение (3.2.2)). При этом недиагональные блоки дают нулевой результат. Беря далее след оставшихся диагональных блоков по поляризационной переменной σ_2 , мы получаем следующее выражение для редуцированной матрицы плотности бифотонного кукварта:

$$\rho_r^{(4)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \rho_r^{(4)}(2qb) & 0 \\ 0 & \tilde{\rho}_r^{(4)}(2qb) \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2} \rho_r^{(4)}(2qb) \oplus \tilde{\rho}_r^{(4)}(2qb), \quad (4.5.3)$$

где $\rho_r^{(4)}(2qb)$ — редуцированная матрица плотности двухкубитного состояния из уравнения (4.3.2), а $\tilde{\rho}_r^{(4)}(2qb)$ — матрица плотности двухкубитного состояния, полученная из $\rho_r^{(4)}(2qb)$ с помощью замены (перестановки) коэффициентов $C_2 \leftrightarrow C_3$:

$$\tilde{\rho}_r^{(4)}(2qb) = \begin{pmatrix} |C_1|^2 + |C_3|^2 & C_1 C_2^* + C_3 C_4^* \\ C_1^* C_2 + C_3^* C_4 & |C_2|^2 + |C_4|^2 \end{pmatrix}. \quad (4.5.4)$$

Таким образом, редуцированная матрица плотности бифотонного кукварта (4.5.3) имеет размерность 4×4 и может быть представлена в блочном виде, или, иными словами, является прямой суммой двух различных двухкубитных матриц.

4.6. Степень перепутывания и моды Шмидта бифотонных куквартов

Как легко видеть из определения (4.3.4), конкарренс двухкубитных состояний не меняется при замене $C_2 \leftrightarrow C_3$. Поэтому собственные значения обеих матриц плотности $\rho_r^{(4)}(2qb)$ (4.3.2) и $\tilde{\rho}_r^{(4)}(2qb)$ (4.5.4) в уравнении (4.5.3) одинаковы и равны $\lambda_{\pm}(2qb)$ (4.3.5). Отсюда следует, что четыре собственных значения редуцированной матрицы плотности бифотонных куквартов $\rho_r^{(4)}$ (4.5.3) двукратно вырождены и равны половине собственных значений двухкубитных матриц плотности:

$$\lambda_{\pm}^{(4)} = \frac{\lambda_{\pm}(2qb)}{2} = \frac{1}{4} \left(1 \pm \sqrt{1 - C_2^2 C_3^2} \right). \quad (4.6.1)$$

Используя эти выражения и учитывая их двукратное вырождение, из общего определения параметра Шмидта (1.6) находим, что в случае бифотонных куквартов параметр Шмидта ровно в два раза больше, чем в двухкубитной модели (4.3.3),

$$K^{(4)} = \frac{1}{2 \sum_{\pm} \lambda_{\pm}^2} = 2K_{2qb} = \frac{2}{1 - 2|C_1 C_4 - C_2 C_3|^2}. \quad (4.6.2)$$

В зависимости от выбора констант кукварта $C_{1,2,3,4}$ величина параметра Шмидта $K^{(4)}$ изменяется в пределах от 2 до 4. Это значит, что состояния всех би-

фотонных куквартов перепутаны. В частности, перепутаны все базисные состояния бифотонных куквартов (4.2.2)–(4.2.5), но степень их перепутывания минимальна и характеризуется значением параметра Шмидта $K = 2$. При этом если в состояниях $\Psi_{HH}^{(4)}$ (4.2.2) и $\Psi_{VV}^{(4)}$ (4.2.5) имеет место чисто частотное перепутывание, то в состояниях $\Psi_{HV}^{(4)}$ (4.2.3) и $\Psi_{VH}^{(4)}$ (4.2.4) перепутывание смешанное, частотно-поляризационное. Один из примеров максимально перепутанного бифотонного кукварта (с $K = 4$) — это состояние, характеризуемое волновой функцией вида

$$\Psi_{maxent}^{(4)} = \frac{1}{2} \left(\Psi_{HH}^{(4)} + \Psi_{HV}^{(4)} - \Psi_{VH}^{(4)} + \Psi_{VV}^{(4)} \right). \quad (4.6.3)$$

Поскольку бифотонные кукварты — не двухкубитные, а двухкудитные состояния, мы не можем определить для них конкарренс по Вуттерсу [22]. Если же, следуя работе [23], определить I -конкарренс $C_I^{(4)}$ тем же соотношением с параметром Шмидта $K^{(4)}$, что и для двухкубитных состояний (4.3.4), то результат имеет вид

$$C_I^{(4)} = \sqrt{2(1 - 1/K^{(4)})} = \sqrt{1 + 2|C_1 C_4 - C_2 C_3|^2}. \quad (4.6.4)$$

Это выражение заметно отличается от выражения (4.3.4) для C_{2qb} : I -конкарренс бифотонных куквартов изменяется в интервале $\left[1, \sqrt{3/2}\right]$.

В соответствии с тем, что редуцированная матрица бифотонного кукварта четырехмерна, ей соответствуют четыре пары мод Шмидта, по две пары на каждое из двух двукратно вырожденных собственных значений, λ_+ и λ_- (4.6.1). Пусть u_{\pm} и \tilde{u}_{\pm} — собственные функции двухкубитных редуцированных матриц плотности $\rho_r^{(4)}(2qb)$ (4.3.2) и $\tilde{\rho}_r^{(4)}(2qb)$ (4.5.4):

$$\begin{aligned} \rho_r^{(4)}(2qb) u_{\pm} &= \lambda_{\pm}(2qb) u_{\pm}, \\ \tilde{\rho}_r^{(4)}(2qb) \tilde{u}_{\pm} &= \lambda_{\pm}(2qb) \tilde{u}_{\pm}. \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

По своей структуре функции u_{\pm} и \tilde{u}_{\pm} отличаются друг от друга, если $C_2 \neq C_3$, и $u_{\pm} \equiv \tilde{u}_{\pm}$, если $C_2 = C_3$.

Моды Шмидта, отвечающие собственным значениям λ_{\pm} (4.6.1) редуцированной матрицы плотности двухкудитного кукварта, следующим образом выражаются через u_{\pm} и \tilde{u}_{\pm} :

$$(\varphi_{\pm}) = \begin{pmatrix} u_{\pm} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\chi_{\pm}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{u}_{\pm} \end{pmatrix}, \quad (4.6.6)$$

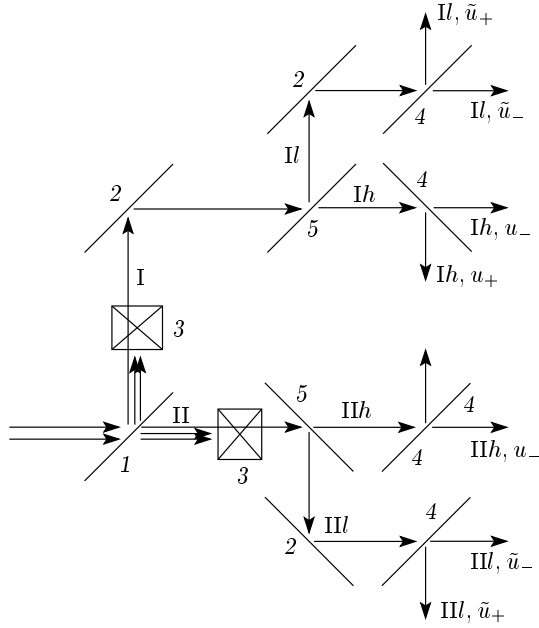


Рис. 4. Схема выделения мод Шмидта бифотонных куквартов. Обозначения те же, что и на рис. 2: 5 — дихроические светоделители

а разложение Шмидта имеет вид

$$\Psi^{(4)} = \sum_{\pm} \sqrt{\lambda_{\pm}^{(4)}} [(\varphi_{\pm})_1 (\chi_{\pm})_2 + (\varphi_{\pm})_2 (\chi_{\pm})_1]. \quad (4.6.7)$$

Выделение мод Шмидта бифотонных куквартов в реальном эксперименте может осуществляться практически по той же схеме, что и в случае бифотонных кутритов (см. рис. 2). Единственное отличие состоит в том, что на самом последнем этапе, при разделении на моды в каналах I и II, надо использовать не только поляризационные светоделители 4, но и (перед ними) дихроические светоделители 5 (рис. 4). После разделения исходного пучка бифотонов неселективным светоделителем 1 и удаления неразделившихся пар мы получаем ситуацию, в которой фотоны каждой из оставшихся пар гарантированно попадают в разные каналы, I или II. Поляризации фотонов и их частоты пока еще не определены. После прохождения дихроических светоделителей 5 возникают пары скоррелированных каналов, Ih, III и II, Ph, но поляризации фотонов все еще неконтролируемы. Если теперь поляризационно-селективные светоделители 4 настроены на выделение мод u_{\pm} в высокочастотных и \tilde{u}_{\pm} в низкочастотных каналах, то мы в результате получаем следующие четыре пары скоррелированных каналов, отвечающие четы-

рем слагаемым в разложении Шмидта (4.6.7) и соответствующие двум различным двукратно вырожденным собственным значениям редуцированных матриц плотности:

$$\begin{aligned} \lambda_+^{(4)} &\rightarrow \{Ih, u_+, III, \tilde{u}_+\}, \quad \{II, \tilde{u}_+, Ph, u_+\}, \\ \lambda_-^{(4)} &\rightarrow \{Ih, u_-, III, \tilde{u}_-\}, \quad \{II, \tilde{u}_-, Ph, u_-\}. \end{aligned} \quad (4.6.8)$$

4.7. Проявления бифотонных куквартов как смешанных состояний

Предположим, что при исследовании бифотонных куквартов мы отказываемся по каким-либо причинам от частотных фильтров и дихроических светоделителей, а используем только поляризаторы и широкополосные детекторы, регистрирующие с одинаковой эффективностью как высоко-, так и низкочастотные фотоны. Тогда информация о частотной степени свободы фотонов оказывается недостижимой, и полную матрицу плотности кукварта (4.5.1) надо усреднить (взять след) по частотам обоих фотонов. Очевидно, что в результате мы получим поляризационную матрицу плотности, описывающую смешанное состояние и равную простой полусумме двухкубитных матриц $\rho_{2qb}^{(4)}$ и $\tilde{\rho}_{2qb}^{(4)}$ (4.5.2)

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_{2qb}^{(4)} + \tilde{\rho}_{2qb}^{(4)}}{2}. \quad (4.7.1)$$

Альтернативный и еще более простой вариант записи усредненной матрицы плотности следует из представления волновой функции бифотонного кукварта в виде (4.4.7). При этом следует учесть, что возникающие при составлении матрицы плотности перекрестные произведения волновых функций антисимметричного и симметричного частотных белловских состояний после усреднения по частотам дают нуль, вследствие чего усредненная матрица плотности принимает вид

$$\bar{\rho} = \begin{pmatrix} \rho^{(3)} & 0 \\ 0 & |B_-|^2 \end{pmatrix}, \quad (4.7.2)$$

где $\rho^{(3)}$ — матрица когерентности бифотонного кутрита (3.2.6) с переобозначениями $C_2 \rightarrow B_+$ и $C_3 \rightarrow C_4$. Собственные значения матрицы (4.7.2) легко находятся и с учетом нормировки $|C_1|^2 + |B_+|^2 + |C_4|^2 + |B_-|^2 = 1$ записываются в виде

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 1 - |B_-|^2, \quad \lambda_4 = |B_-|^2. \quad (4.7.3)$$

Собственные значения λ_i могут быть использованы

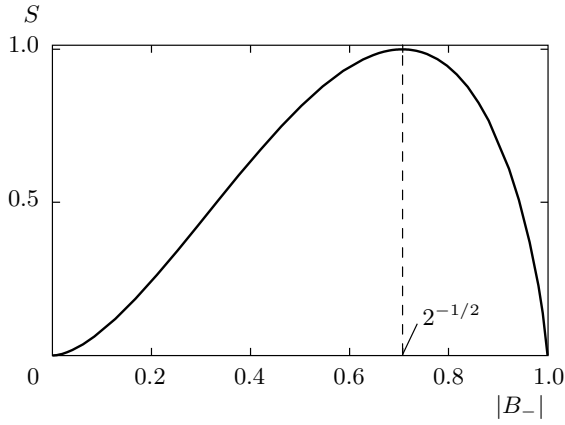


Рис. 5. Энтропия состояния, описываемого матрицей плотности $\bar{\rho}$ (4.7.4), в зависимости от параметра $|B_-|$

ны для нахождения энтропии состояния, описываемого матрицей плотности $\bar{\rho}$ (4.7.2):

$$S(\bar{\rho}) = - \sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i = -2|B_-|^2 \log_2 |B_-| - (1 - |B_-|^2) \log_2 (1 - |B_-|^2). \quad (4.7.4)$$

Величина энтропии является показателем чистоты бифотонного состояния: если $S = 0$, то состояние чистое, а если $S \neq 0$ — смешанное. Зависимость $S(\bar{\rho})$ от параметра $|B_-|$ показана на рис. 5. Как видно из рисунка, $S(\bar{\rho}) \neq 0$ при всех значениях параметра $|B_-|$ за исключением двух предельных случаев, $|B_-| = 0$ и $|B_-| = 1$, когда исходная волновая функция бифотонного кукварта равна соответственно $\Psi^{(4)} = \Psi^{(3)} \otimes \Psi_{+}^{(Bell),freq}$ и $\Psi^{(4)} = \Psi_{-}^{(Bell),pol} \otimes \Psi_{-}^{(Bell),freq}$. В этих двух случаях поляризационные и частотные части волновых функций факторизованы. Поэтому усреднение по частотам оставляет состояние чистым. При всех других значениях параметра $|B_-|$, не равных нулю или единице, факторизации нет, $S(\bar{\rho}) \neq 0$, и состояния кукварта, усредненное по частотам, является смешанным.

Отдельных комментариев заслуживает случай $|B_-| = 1$. В этом случае волновая функция кукварта есть двойное белловское состояние, состоящее из прямого произведения двух антисимметричных белловских волновых функций, поляризационной и частотной. Также уже отмечено, что усреднение по частотным переменным в этом случае оставляет состояние чистым, и в отношении поляризационных переменных оно характеризуется волновой функцией $\Psi_{-}^{(Bell),pol}$ чистого антисимметричного белловского состояния. Несомненно, что именно эта ситуа-

ция реализуется в исследованиях антисимметричных поляризационных белловских состояний в процессах невырожденного СПРС (см., например, работу [32]), когда частоты фотонов не рассматриваются как независимые степени свободы, что и соответствует усреднению по частотным переменным.

4.8. Корреляции в смешанных состояниях

Усредненная по частотам матрица плотности $\bar{\rho}$ имеет размерность 4×4 , и соответствующее состояние является двухкубитным. Для таких состояний можно определить, например, конкорренс по Вуттерсу [22]. Согласно [17],

$$\bar{C} = ||2C_1C_4 - B_+^2| - |B_-|^2|. \quad (4.8.1)$$

Здесь и далее знак усреднения используется только для указания, что вычисляемые характеристики относятся к матрице плотности, усредненной по частотным переменным.

Представляет интерес также нахождение параметра Шмидта смешанного двухкубитного состояния, для чего сначала надо найти его редуцированную матрицу плотности $\bar{\rho}_r$. Наиболее просто $\bar{\rho}_r$ находится с помощью представления полной усредненной матрицы плотности в виде полусуммы двух двухкубитных матриц плотности (4.7.1). Поскольку двухкубитные матрицы плотности $\rho_r^{(4)}(2qb)$ и $\tilde{\rho}_r^{(4)}(2qb)$ известны, (4.3.2) и (4.5.4), усредненная редуцированная матрица плотности сразу же записывается в виде

$$\bar{\rho}_r = \begin{pmatrix} |C_1|^2 + \frac{|B_+|^2 + |B_-|^2}{2} & \frac{C_1 B_+^* + B_+ C_4^*}{\sqrt{2}} \\ \frac{C_1^* B_+ + B_+^* C_4^*}{\sqrt{2}} & |C_4|^2 + \frac{|B_+|^2 + |B_-|^2}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.8.2)$$

Находим собственные значения этой матрицы,

$$\bar{\lambda}_{r\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{(1 - |B_-|^2)^2 - |2C_1C_4 - B_+^2|^2}}{2}, \quad (4.8.3)$$

после чего определяем параметр Шмидта

$$\bar{K} = \frac{2}{1 + (1 - |B_-|^2)^2 - |2C_1C_4 - B_+^2|^2}. \quad (4.8.4)$$

Наконец, параметры Стокса и степень поляризации смешанного состояния определяются стандартным образом:

$$\bar{\mathbf{S}} = \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \bar{\rho}_r), \quad \bar{P} = |\bar{\mathbf{S}}| \equiv P^{(4)}.$$

Последнее равенство следует из того, что для вычисления параметров Стокса бифотонного кукварта в целом, $\mathbf{S}^{(4)}$, необходимо вычислить след по всем переменным от полной матрицы плотности кукварта, умноженной на вектор матриц Паули, $\mathbf{S}^{(4)} = \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \rho_r^{(4)})$. На промежуточной стадии такого вычисления, после взятия следа по переменным ω_1 , ω_2 и σ_2 , мы получим выражение для $\mathbf{S}^{(4)}$, в точности совпадающее с определением $\bar{\mathbf{S}}$. Следовательно, степень поляризации $P^{(4)}$ бифотонного кукварта совпадает со степенью поляризации смешанного состояния, получающегося после усреднения по частотам, \bar{P} .

Прямой расчет показывает, что в случае смешанных состояний имеет место та же связь между степенью поляризации \bar{P} и параметром Шмидта \bar{K} , что и в случае чистых двухкубитных состояний:

$$\bar{P}^2 + 2(1 - \bar{K}^{-1}) = 1. \quad (4.8.5)$$

В то же время, в отличие от чистых двухкубитных состояний, в смешанных состояниях конкарренс и параметр Шмидта не связаны друг с другом,

$$\bar{C} \neq \sqrt{2(1 - \bar{K}^{-1})}. \quad (4.8.6)$$

Поскольку конкарренс является мерой перепутывания двухкубитных состояний, ясно, что если состояния являются смешанными, то параметр Шмидта уже не может использоваться в качестве меры степени перепутывания, что, в принципе, хорошо известно. Только в случае чистых двухчастичных состояний параметр K прямо связан со степенью перепутывания. Однако соотношение (4.8.5) между степенью поляризации и параметром Шмидта показывает, что как в чистых состояниях бифотонных кутритов и куквартов, так и в смешанных состояниях, возникающих из бифотонных поляризационно-частотных куквартов, параметр Шмидта прямо связан с классическим параметром состояний — степенью их поляризации.

В общем случае параметр Шмидта смешанных состояний (4.8.4) отличается от параметра Шмидта двухкубитного кукварта K_{2qb} (4.3.3) и от параметра Шмидта двухкубитного кукварта $K^{(4)} = 2K_{2qb}$ (4.6.2). В связи с этим важно отметить, что степень поляризации бифотонного (двухкубитного) кукварта определяется именно параметром Шмидта смешанного состояния, а не кукварта в целом. Простой пример — максимально перепутанное состояние бифотонного кукварта вида (4.6.3), параметры которого равны $C_1 = C_4 = 1/2$ и $C_2 = -C_3 = 1/2$, или

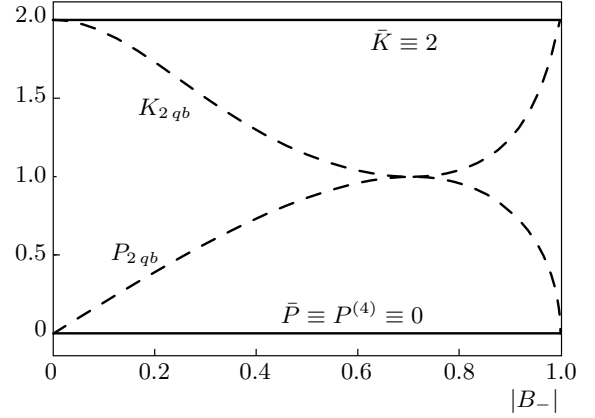


Рис. 6. Параметр Шмидта и степень поляризации в зависимости от $|B_-|$ для бифотонного кукварта с $C_1 = C_4 = 0$ в двухкубитной модели (4.4.10) (штриховые линии) и в смешанном состоянии, получающемся после усреднения по частотам (сплошные линии)

$B_+ = 0$ и $B_- = 1/\sqrt{2}$. Согласно (4.3.3), (4.6.2), в этом случае $K_{2qb} = 2$ и $K^{(4)} = 4$. В то же время, согласно (4.8.4), $\bar{K} = 2 \neq K^{(4)}$. Подстановка значения $\bar{K} = 2$ в уравнение (4.8.5) дает $\bar{P} = P^{(4)} = 0$, т. е., как и должно быть, максимально перепутанный бифотонный кукварт (4.6.3) не поляризован.

В рассмотренном примере параметр Шмидта \bar{K} смешанного состояния совпадает с K_{2qb} , но в общем случае они также различны, $\bar{K} \neq K_{2qb}$, что иллюстрируется примером другого частного вида бифотонного кукварта с параметрами $C_1 = C_4 = 0$ и действительными B_+ и B_- , такими что $|B_+|^2 + |B_-|^2 = 1$. Это состояние с волновой функцией вида

$$\begin{aligned} \Psi^{(4)} &= B_+ \Psi_+^{(Bell),pol} \otimes \Psi_+^{(Bell),freq} + \\ &+ B_- \Psi_-^{(Bell),pol} \otimes \Psi_-^{(Bell),freq} \equiv \\ &\equiv \frac{B_+ + B_-}{\sqrt{2}} \Psi_{HV}^{(4)} + \frac{B_+ - B_-}{\sqrt{2}} \Psi_{VH}^{(4)}. \end{aligned} \quad (4.8.7)$$

Для этого состояния на рис. 6 показаны зависимости от $|B_-|$ параметров Шмидта \bar{K} и K_{2qb} , а также степени поляризации данного состояния кукварта, рассчитанной на основе представлений об их двухкубитной природе и смешанных состояниях, $\bar{P} \equiv P^{(4)}$, и на основе двухкубитной модели, P_{2qb} . Различия между этими двумя группами результатов очевидны, и они могут быть обнаружены в эксперименте. Точнее, экспериментально может быть измерена зависимость от $|B_-|$ степени поляризации состояния (4.8.7), и по виду этой зависимости можно будет судить о правильности или неправильности

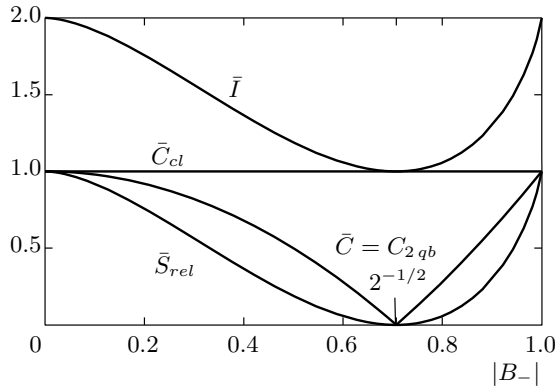


Рис. 7. Конкарренс \bar{C} , относительная энтропия \bar{S}_{rel} , взаимная информация фон Неймана \bar{I} и мера классических корреляций \bar{C}_{cl} для смешанного состояния, возникающего из бифотонного кукварта вида (4.8.7)

той или другой теории. По нашим представлениям для конкретного состояния (4.8.7) результатом эксперимента должно стать подтверждение того факта, что данное состояние не поляризовано при всех значениях $|B_-|$, $\bar{P} \equiv P^{(4)} \equiv 0$, в отличие от предсказаний двухкубитной модели.

Конкарренс смешанных состояний, возникающих в результате усреднения по частотам, \bar{C} (4.8.1), в общем случае отличается от C_{2qb} (4.3.4). Однако в рассматриваемом примере состояния с $C_1 = C_4 = 0$ (4.8.7) эти величины совпадают,

$$\bar{C} = C_{2qb} = |B_+|^2 - |B_-|^2 = 1 - 2|B_-|^2. \quad (4.8.8)$$

Для этого случая зависимость $\bar{C}(|B_-|)$ приведена на рис. 7 вместе с некоторыми другими корреляционными характеристиками смешанного поляризованного состояния бифотонного кукварта. Одна из них — взаимная информация фон Неймана \bar{I} , определяемая как

$$\bar{I} = 2S(\bar{\rho}_r) - S(\bar{\rho}), \quad (4.8.9)$$

где $S(\bar{\rho})$ — энтропия (4.7.4) смешанного состояния, а энтропия редуцированного смешанного состояния в случае $C_1 = C_4 = 0$ равна единице, $S(\bar{\rho}_r) = 1$ [16]. Более или менее считается общепринятым, что взаимная информация фон Неймана может рассматриваться как суммарная мера всех корреляций, квантовых и классических, в системе [33–36]. Еще одна кривая на рис. 7 — это относительная энтропия S_{rel} , определяемая [33, 34] как минимальное «расстояние» от исследуемой матрицы плотности $\bar{\rho}$ до

матрицы плотности «ближайшего» перепутанного состояния σ :

$$S_{rel}(\bar{\rho}) = \text{Tr}[\bar{\rho}(\log_2 \bar{\rho} - \log_2 \sigma)]. \quad (4.8.10)$$

В принципе, нахождение «ближайшей» матрицы плотности перепутанного состояния σ — сложная задача. Но в рассматриваемом случае состояния бифотонного кукварта с $C_1 = C_4 = 0$ матрица плотности (4.7.2) смешанного состояния очень проста. С учетом только ее ненулевых строк и столбцов она имеет вид

$$\begin{pmatrix} |B_+|^2 & 0 \\ 0 & |B_-|^2 \end{pmatrix}.$$

Для такой матрицы результат известен [34, 37]: «ближайшая» перепутанная матрица в этом случае есть

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

и вычисление по формуле (4.8.10) дает

$$S_{rel}(\bar{\rho}) = 1 - S(\bar{\rho}). \quad (4.8.11)$$

Как видно из рис. 7, всегда $S_{rel} \leq C$, т. е. как мера квантовых корреляций относительная энтропия лучше, чем конкарренс, поскольку конкарренс превышает степень перепутывания за исключением выделенных случаев, когда $S_{rel} = C = 1$ или $S_{rel} = C = 0$. Если принять, что относительная энтропия определяет истинную меру квантовых корреляций, а взаимная информация фон Неймана есть сумма количественных (энтропийных) мер квантовых и классических корреляций, то для меры классических корреляций получаем [35, 36]

$$C_{cl}(\bar{\rho}) = I(\bar{\rho}) - S_{rel}(\bar{\rho}). \quad (4.8.12)$$

В случае состояния бифотонного кукварта с $C_1 = C_4 = 0$ отсюда следует, что $C_{cl}(\bar{\rho}) \equiv 1$ независимо от величины $|B_-|$. Этот результат коррелирует с тем, что в рассматриваемом примере не зависят от $|B_-|$ также и другие классические величины, параметр Шмидта $\bar{K} \equiv 2$ и степень поляризации $\bar{P} \equiv 0$ (см. рис. 6). В предельных случаях чистых состояний куквартов, $|B_-| = 0$ или $|B_-| = 1$, параметры, характеризующие степени квантовых (C и S_{rel}) и классических (C_{cl}) корреляций, совпадают друг с другом и равны половине взаимной информации фон Неймана, $C = S_{rel} = C_{cl} = I/2 = 1$. Именно поэтому в чистых двухчастичных состояниях параметр Шмидта может считаться неэнтропийной количественной характеристикой как классических, так и квантовых корреляций.

4.9. Поляризационно-угловые бифотонные кукварты

Поляризационно-угловые бифотонные кукварты получаются в процессах неколлинеарного СПРС, вырожденного по частотам фотонов, и их свойства идентичны описанным выше свойствам поляризационно-частотных куквартов. Все теоретическое описание может быть полностью повторено с заменой частотных переменных фотонов, ω_1 и ω_2 , на угловые, θ_1 и θ_2 , где $\theta_{1,2}$ — углы между направлениями волновых векторов фотонов $\mathbf{k}_{1,2}$ и направлением волнового вектора накачки \mathbf{k}_p , параллельного оси z , например, в плоскости yz . Как и прежде, надо предполагать, что каждая из двух угловых переменных может принимать только два значения, обозначаемых, например, как θ_u (up) и θ_d (down), но так, что $\theta_1 \neq \theta_2$. Предполагается, что угловые распределения фотонов в окрестностях θ_u и θ_d являются узкими, т. е. характеризуемыми ширинами порядка $\delta\theta \ll |\theta_u - \theta_d|$, $\delta\theta \ll \Delta\theta$, где $\Delta\theta$ — угловая ширина принимающих детекторов.

В принципе, поляризационно-угловые кукварты могут быть получены и из поляризационно-частотных куквартов с помощью дихроического светоделителя, направляющего высокочастотные и низкочастотные фотоны по разным каналам соответственно под углами θ_u и θ_d . Если при расщеплении бифотонного пучка обычным неселективным светоделителем фотоны приобретают новую степень свободы, дополнительную по отношению к поляризационной и частотной степеням свободы, то в случае дихроического светоделителя это не так. Математически действие последнего проявляется в следующих заменах в частотных частях однофотонных волновых функций (4.1.1)–(4.1.4):

$$\begin{aligned} \delta_{\omega_{1,2}, \omega_h} &\rightarrow \delta_{\omega_{1,2}, \omega_h} \delta_{\theta_{1,2}, \theta_u}, \\ \delta_{\omega_{1,2}, \omega_l} &\rightarrow \delta_{\omega_{1,2}, \omega_l} \delta_{\theta_{1,2}, \theta_d}. \end{aligned} \quad (4.9.1)$$

Поскольку при таких заменах номера 1, 2 частотных и угловых переменных всегда совпадают, а значения частот и углов, которые они могут принимать, всегда попарно скоррелированы (ω_h с θ_u и ω_l с θ_d), по существу пары «частота–угол» выступают как единые переменные, $(\omega, \theta)_1$ и $(\omega, \theta)_2$, и эти комбинированные переменные могут принимать два значения, (ω_h, θ_u) и (ω_l, θ_d) . Все это делает получающиеся образования тождественными поляризационно-угловым куквартам, образуемым в процессах неколлинеарного вырожденного СПРС. Для удобства в дальнейшем и для таких куквартов, образованных с помощью дихроического светоделителя, будем говорить

только об угловых переменных θ_1 и θ_2 и о двух направлениях распространения, θ_u и θ_d , опуская упоминание о дублирующих частотных переменных фотонов.

Но все же поляризационно-частотные и поляризационно-угловые бифотонные кукварты различаются не только по способу их создания, но и по схемам экспериментов, позволяющим осуществить выделение мод Шмидта и измерение параметров куквартов. В случае поляризационно-частотных куквартов одним из ключевых элементов рассмотренных выше схем предлагаемых экспериментов является расщепление пучка бифотонов неселективным светоделителем, например, в плоскости yz . Как уже отмечалось, это создает для фотонов пучка пространственное разделение на две части и дополнительную (угловую) степень свободы, что в свою очередь является предпосылкой для измерений по схемам совпадений. В случае поляризационно-угловых куквартов пространственное разделение бифотонного пучка уже есть с самого начала, но этого недостаточно для реализации описанных выше сценариев, поскольку угловые переменные в плоскости yz — это те переменные (вместе с поляризационными переменными), перепутывание по которым необходимо исследовать.

Для создания необходимой дополнительной степени свободы необходимо выйти за рамки угловых и поляризационных переменных кукварта, $\{\theta_1, \sigma_1\}$ и $\{\theta_2, \sigma_2\}$. Это может быть сделано с помощью неселективных светоделителей, установленных в каждом из каналов, «Up» и «Down», и разделяющих пучки в каждом из этих каналов на два в плоскости xz , перпендикулярной оси z (рис. 8). Теперь имеет место полная аналогия с тем, что было описано выше для поляризационно-частотных куквартов. В силу того, что по предположению $\theta_1 \neq \theta_2$, всегда один из фотонов СПРС-пар оказывается в верхней (Up), а один — в нижней (Down) частях схемы на рис. 8. После светоделителей 1 фотоны СПРС-пар могут разделиться между левой L (Left) и правой R (Right) частями схемы, но остаются и неразделенные пары, в которых оба фотона оказываются слева или оба справа. Таким образом, возможны комбинации фотонов (Lu, Rd) , (Ld, Ru) , (Ld, Lu) и (Rd, Ru) . Как и прежде, для выделения мод Шмидта кукварта необходимо избавиться от неразделенных пар, что делается так же, как и в случае поляризационно-частотных куквартов и как показано на рис. 8. После прохождения устройств 3, удаляющих неразделенные пары, получаем четыре канала, в которых оставшиеся фотоны СПРС-пар могут

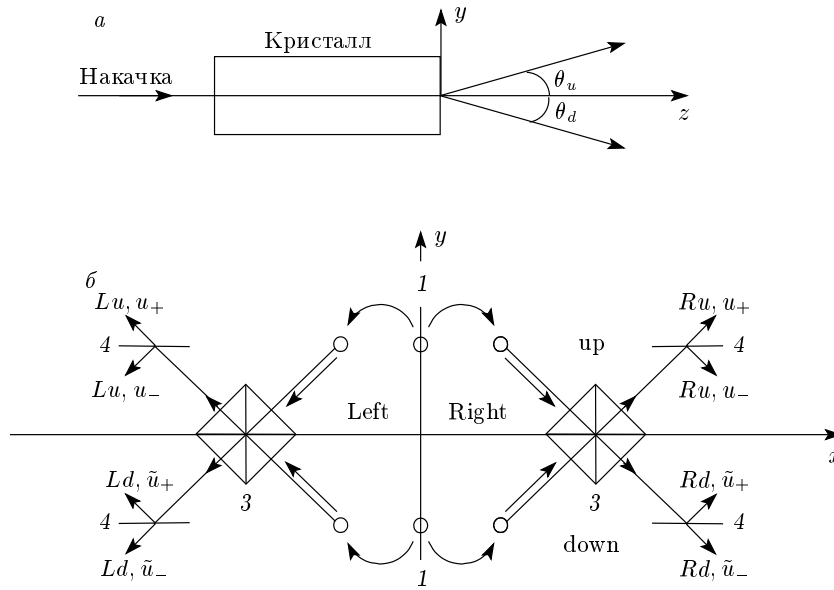


Рис. 8. Схемы неколлинеарного СПРС (а) и эксперимента, в котором возможно выделение мод Шмидта спектрально-углового кукварта (б). Обозначения те же, что и на рис. 2 и 4

распределиться только следующим образом: Lu, Rd или Ld, Ru . Но при этом еще остается полная неопределенность по поляризациям фотонов. Поскольку верхняя и нижняя части схемы являются полными аналогами высокочастотной и низкочастотной частей схемы выделения мод Шмидта поляризационно-частотных куквартов (см. рис. 4), в каналах Lu и Ru необходимо установить устройства, выделяющие моды Шмидта u_{\pm} (4.6.5), а в каналах Ld и Rd — устройства, выделяющие моды Шмидта \tilde{u}_{\pm} (4.6.5). В простейшем случае состояния $\Psi_{HV}^{(4)}$ указанные устройства — это просто селективные светоделители горизонтально и вертикально поляризованных фотонов. В общем случае пары мод и разложение Шмидта имеют такой же вид, как и в случае поляризационно-частотных куквартов, (4.6.6) и (4.6.7), при следующем соответствии пар мод каналам на рис. 8:

$$\begin{aligned} \lambda_+^{(4)} &\rightarrow \{Lu, u_+, Rd, \tilde{u}_+\}, \{Ld, \tilde{u}_+, Ru, u_+\}, \\ \lambda_-^{(4)} &\rightarrow \{Lu, u_-, Rd, \tilde{u}_-\}, \{Ld, \tilde{u}_-, Ru, u_-\}. \end{aligned} \quad (4.9.2)$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в статье дано описание природы и свойств бифотонных кутритов и куквартов, во многом отличное от общепринятого. Причинами различия являются последовательный учет требований

симметрии волновых функций пар тождественных частиц, а также, в случае куквартов, равноправное рассмотрение всех степеней свободы фотонов и соответствующих этим степеням свободы переменных (таких как поляризации и частоты или поляризации и угловые переменные и т. п.).

В случае бифотонных кутритов у фотонов есть только одна степень свободы — поляризация. С учетом симметрии волновых функций кутритов они могут быть как перепутаны, так и не перепутаны в зависимости от величин констант, определяющих состояния кутритов. Параметрами, характеризующими степень перепутывания, являются параметр Шмидта и конкарренс. Также показательным является разложение бифотонной волновой функции по произведениям мод Шмидта (разложение или теорема Шмидта). Найдены семейства максимально перепутанных и неперепутанных кутритов. Предложены схемы экспериментов для выделения мод Шмидта и для восстановления параметров бифотонного кутрита по экспериментальным данным. Установлено фундаментальное соотношение между степенью поляризации кутрита и степенью его перепутывания, что позволяет определять степень перепутывания бифотонных кутритов по измерениям их параметров Стокса и степени поляризации.

В случае бифотонных куквартов каждый из двух фотонов имеет две степени свободы — поляризацию и частоту (или поляризацию и угол θ , определя-

ющий направление волнового вектора фотона). В отличие от общепринятого подхода, частоты фотонов $\omega_{1,2}$ (или углы $\theta_{1,2}$) рассматриваются как переменные, не зависящие от поляризационных переменных $\sigma_{1,2}$ и дающие вклад в полную степень перепутывания куквартов. В силу этого бифотонные кукварты оказываются не двухкубитными состояниями, как обычно считается, а двухкудитными с размерностями одно- и двухфотонного гильбертова пространства, равными соответственно 4 и 16. Параметр Шмидта, характеризующий степень перепутывания чистого состояния двухкудитного бифотонного кукварта, оказывается равным удвоенному параметру Шмидта модельного двухкудитного кукварта. Описана схема эксперимента, в котором могут быть выделены четыре пары мод Шмидта бифотонного кукварта.

Если одна из степеней свободы бифотонного кукварта оказывается ненаблюдаемой, то кукварт проявляет себя как смешанное состояние. Исследованы свойства таких смешанных состояний, их степень перепутывания и, в простейшем случае, мера классических корреляций. Показано, что в случае бифотонных поляризационно-частотных куквартов их степень поляризации никак не связана со степенью перепутывания, а определяется параметром Шмидта смешанного поляризационного двухкубитного состояния, получающегося из чистого состояния бифотонного кукварта в результате усреднения по частотам. Показано, в частности, что экспериментально измеряемая степень поляризации поляризационно-частотного бифотонного кукварта отличается от степени поляризации, найденной в рамках модели двухкубитного состояния. Таким образом, измерение степени поляризации куквартов в зависимости от их параметров может стать средством прямой экспериментальной проверки теории двухкудитных бифотонных куквартов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-02-01043).

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Schrödinger, *Naturwissenschaften* **23**, 807, 823, 844 (1935) (English translation in *Proc. Amer. Phil. Soc.* **124**, 323 (1980)).
2. J. Schliemann, J. I. Cirac, M. Kus et al., *Phys. Rev. A* **64**, 022303 (2001).
3. R. Paskauskas and L. You, *Phys. Rev. A* **64**, 042310 (2001).
4. Y. S. Li, B. Zeng, X. S. Liu, and G. L. Long, arXiv:quant-ph/0104101.
5. A. Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods*, Kluwer Acad. Publ., New York (2002).
6. P. Zanardi, *Phys. Rev. A* **65**, 042101 (2002).
7. J. R. Gittings and A. J. Fisher, *Phys. Rev. A* **66**, 032305 (2002).
8. S. J. van Enk, *Phys. Rev. A* **67**, 022303 (2003).
9. X.-G. Wang and B. C. Sanders, *J. Phys. A* **38**, L67 (2005).
10. H. M. Wiseman and J. A. Vaccaro, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 097902 (2003).
11. B. P. Lanyon, T. J. Weinhold, N. K. Langford et al., *Phys. Rev. Lett.* **100**, 060504 (2008).
12. S.-Y. Baek and Y.-H. Kim, *Phys. Rev. A* **75**, 034309 (2007).
13. J. Joo, T. Rudolph, and B. C. Sanders, *J. Phys. B* **42**, 114007 (2009).
14. H. S. Eisenberg, G. Khoury, G. A. Durkin et al., *Phys. Rev. Lett.* **93**, 193901 (2004).
15. С. П. Кулик, С. Н. Молотков, С. С. Страупе, Письма в ЖЭТФ **92**, 212 (2010).
16. M. V. Fedorov, P. A. Volkov, Yu. M. Mikhailova et al., *New J. Phys.* **13**, 083004 (2011).
17. M. V. Fedorov, P. A. Volkov, Yu. M. Mikhailova, *Phys. Rev. A* **84**, 032335 (2011).
18. R. Grobe, K. Rzazewski, and J. H. Eberly, *J. Phys. B* **27**, L503 (1994).
19. A. Ekert and P. L. Knight, *Amer. J. Phys.* **63**, 415 (1995).
20. С. Швебер, *Введение в релятивистскую квантовую теорию поля*, Изд-во иностр. лит., Москва (1963).
21. Д. Н. Клышко, ЖЭТФ **111**, 1955 (1997).
22. W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2245 (1998).
23. P. Rungta and C. M. Caves, *Phys. Rev. A* **67**, 012307 (2003).
24. M. H. Rubin, D. N. Klyshko, Y. H. Shih, and A. V. Sergienko, *Phys. Rev. A* **50**, 5122 (1994).

25. Y.-H. Kim, S. P. Kulik, and Y. Shih, *Phys. Rev. Lett.* **7**, 1370 (2001).
26. Yu. I. Bogdanov, L. A. Krivitsky, and S. P. Kulik, *Pis'ma v Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **78**, 804 (2003).
27. Yu. I. Bogdanov, M. V. Chekhova, S. P. Kulik et al., *Phys. Rev. Lett.* **93**, 230503 (2004).
28. An-Min Wang, *Chinese Phys. Lett.* **17**, 243 (2000).
29. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Физматлит, Москва (1950).
30. A. V. Burlakov and D. N. Klyshko, *Pis'ma v Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **69**, 795 (1999).
31. Yu. I. Bogdanov, E. V. Moreva, G. A. Maslennikov et al., *Phys. Rev. A* **73**, 063810 (2006).
32. G. Brida, M. V. Chekhova, M. Genovese, and L. Krivitsky, *Phys. Rev. A* **76**, 053807 (2007).
33. V. Vedral, M. B. Plenio, M. A. Rippin, and P. L. Knight, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2275 (1997).
34. V. Vedral and M. B. Plenio, *Phys. Rev. A* **57**, 1619 (1998).
35. S. Hamieh, J. Qi, D. Simonovich, and M. K. Ali, *Phys. Rev. A* **67**, 024301 (2003).
36. S. Oh and J. Kim, *Phys. Rev. A* **69**, 054305 (2004).
37. S. Wu and Y. Zhang, arXiv:quant-ph/0004018v2.