

УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧЕРЕНКОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ТЯЖЕЛЫХ ИОНОВ С УЧЕТОМ ТОРМОЖЕНИЯ В РАДИАТОРЕ

О. В. Богданов^{a,b}, Е. И. Фикс^a, Ю. Л. Пивоваров^a*

*^aНациональный исследовательский Томский политехнический университет
634050, Томск, Россия*

*^bНациональная лаборатория Фраскати
00044, Фраскати, Италия*

Поступила в редакцию 11 октября 2011 г.

Численными методами исследованы зависимости структуры и ширины углового распределения излучения Вавилова – Черенкова с фиксированной длиной волны вблизи черенковского конуса как от параметров радиатора (толщина, показатель преломления), так и параметров пучка релятивистских тяжелых ионов (заряд, начальная энергия). Торможение релятивистских тяжелых ионов в радиаторе, приводя к уменьшению скорости ионов, меняет условие конструктивной интерференции волн, испущенных с различных участков траектории, в результате чего возникает сложное угловое распределение излучения Вавилова – Черенкова. Ключевой величиной является тормозная способность тонкого слоя радиатора (средние потери энергии иона), которая в работе вычислялась по формуле Бете–Блоха и с помощью пакета SRIM. Получена простая формула для оценки ширины углового распределения черенковского излучения (с фиксированной длиной волны) релятивистских тяжелых ионов с учетом торможения в радиаторе. Измерение ширины может дать прямую информацию о заряде пролетающего через радиатор иона, тем самым расширяя возможности черенковских детекторов. Обсуждается также изотопический эффект — зависимость углового распределения излучения Вавилова – Черенкова от массы иона.

1. ВВЕДЕНИЕ

Черенковское излучение (ЧИ) возникает при движении заряженной частицы в прозрачной среде со скоростью, превышающей фазовую скорость распространения света в этой среде. Теоретическое объяснение явления ЧИ было дано Таммом и Франком в работе [1]. Теория Тамма–Франка (ТФ) не учитывает отклонение траектории частицы от прямолинейной из-за многократного рассеяния и уменьшение скорости частицы вследствие потерь энергии на ионизацию. Впервые влияние многократного рассеяния на угловое распределение ЧИ без учета потерь энергии было исследовано Дедриком [2]. В статье Кузьмина и Тарасова [3] был рассмотрен другой крайний случай — угловое распределение ЧИ для релятивистских тяжелых ионов ($Z, A \gg 1$) с учетом потерь энергии (торможения) ионов в тонком радиаторе, в пренебрежении многократным рассея-

нием. Модель Кузьмина–Тарасова (КТ) предсказывает тонкую структуру углового распределения ЧИ вблизи черенковского конуса, подобную возникающей при дифракции Френеля.

В работе [4] был разработан новый метод, основанный на использовании компьютерного кода SRIM [5], который позволяет достаточно точно определять потери энергии и скорость иона в зависимости от глубины проникновения в радиатор и тем самым избежать используемого в модели КТ приближения тонкого радиатора. Согласно [4], полученные с помощью SRIM значения скорости подставляются в формулу классической электродинамики для спектрально-углового распределения излучения заряженной частицы, движущейся по произвольной траектории в прозрачной среде с известной частотной дисперсией (показателем преломления).

В настоящей работе получена оценка ширины углового распределения ЧИ релятивистских тяжелых

*E-mail: bov@tpu.ru

ионов с учетом торможения в радиаторе и проведены расчеты структуры углового распределения ЧИ с использованием различных способов описания торможения (потерь энергии): по формуле Бете–Блоха, с помощью пакета программ SRIM. Полученные расчеты демонстрируют зависимости от толщины радиатора, длины волны излучения, заряда иона. Также исследуется изотопический эффект — зависимость углового распределения ЧИ от массы иона.

2. ТОРМОЖЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ИОНА В РАДИАТОРЕ И ОЦЕНКА УГЛОВОЙ ШИРИНЫ КОНУСА ЧЕРЕНКОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Черенковские фотоны излучаются в направлении движения частицы (частица движется в радиаторе с постоянной скоростью v) в конус, угол излучения θ связан со скоростью частицы формулой

$$\cos \theta = \frac{c}{nv}, \quad (1)$$

где c — скорость света в вакууме, n — показатель преломления радиатора.

В теории ТФ, как известно, ширина $\Delta\vartheta_{TF}$ углового распределения ЧИ вблизи черенковского конуса определяется длиной волны излучения λ и толщиной радиатора L :

$$\Delta\vartheta_{TF} \approx \lambda/L. \quad (2)$$

Понятно, что при учете торможения в радиаторе скорость иона уменьшается и, в соответствии с (1), угол ЧИ также уменьшается. Достаточно просто получить оценку ширины углового распределения в случае тонкого радиатора. Как и в модели КТ [3], используем зависимость скорости частицы от глубины проникновения x в радиатор в приближении тонкого радиатора:

$$\frac{1}{v(x)} \approx \frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_0^2} v'_0 x, \quad v'_0 = \left. \frac{dv(x)}{dx} \right|_{x=0} < 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} v'_0 &= \frac{dv}{dE} \frac{dE}{dx} = \frac{c^2}{Ev} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{dE}{dx} \Big|_{x=0} = \\ &= -\frac{c^2}{E_0 \gamma_0^2 v_0} S(E_0). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь E — полная энергия частицы; E_0 , γ_0 , v_0 — энергия, релятивистский фактор и скорость иона при влете в радиатор; $-dE/dx = S(E_0)$ — тормозная способность иона, соответствующее его начальной скорости. При толщине радиатора $x = L$, если

справедливо разложение (3), можно определить скорость иона v_1 при вылете из радиатора. Учитывая, что черенковские углы, соответствующие начальной v_0 и конечной v_1 скоростям иона, равны

$$\theta_{0,1} = \arccos \frac{1}{n\beta_{0,1}}, \quad \beta_{0,1} = \frac{v_{0,1}}{c},$$

оцениваем ширину $\Delta\theta_S$ углового распределения ЧИ релятивистских тяжелых ионов с учетом торможения следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta\theta_S &= \theta_0 - \theta_1 \approx \arccos \frac{1}{n\beta_0} - \\ &- \arccos \left(\frac{1}{n\beta_0} \left(1 - \frac{v'_0 L}{v_0} \right) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку ЧИ сосредоточено в узком интервале углов $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_0$, $\theta_0 - \theta_1 \ll 1$, последнее слагаемое в правой части (5) можно разложить в ряд Тейлора в окрестности значения аргумента $1/n\beta_0$. Разложение с учетом только первых двух членов имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \arccos \left(\frac{1}{n\beta_0} \left(1 - \frac{v'_0 L}{v_0} \right) \right) &\approx \arccos \frac{1}{n\beta_0} + \\ &+ \frac{v'_0 L}{v_0} \operatorname{ctg} \theta_0. \end{aligned} \quad (6)$$

Подстановка (6) в (5) приводит к простой формуле для $\Delta\theta_S$:

$$\Delta\theta_S \approx \frac{|v'_0|L}{v_0} \operatorname{ctg} \theta_0 = \frac{c^2}{E_0 \gamma_0^2 v_0^2} S(E_0) L \operatorname{ctg} \theta_0. \quad (7)$$

С учетом (1) формулу (7) можно представить в виде

$$\Delta\theta_S = \frac{1}{E_0 \gamma_0^2 \beta_0^2} S(E_0) \frac{1}{\sqrt{(n\beta_0)^2 - 1}}, \quad n = n(\lambda). \quad (8)$$

Выполненная простая оценка ширины углового распределения совпадает с шириной распределения в модели КТ, возникающей при сложном вычислении углового распределения ЧИ в [3]. Если толщина радиатора такова, что разложение (3) неприменимо, конечное значение скорости нужно вычислять, используя, например, пакет программ SRIM или аналогичный пакет, а затем определять ширину как

$$\Delta\theta_S = \theta_0 - \theta_1 \approx \arccos \frac{1}{n\beta_0} - \arccos \frac{1}{n\beta_1}.$$

Формула (8) для ширины $\Delta\theta_S$ углового распределения ЧИ вблизи черенковского конуса демонстрирует линейную зависимость от толщины радиатора, в отличие от соотношения $\Delta\vartheta_{TF} \approx \lambda L^{-1}$. Таким

образом, в очень тонком радиаторе (торможением можно пренебречь) ширина углового распределения ЧИ обратно пропорциональна толщине радиатора — $\Delta\vartheta_{TF} \approx \lambda L^{-1}$, а с ростом толщины эта зависимость переходит в прямую — $\Delta\vartheta_S \approx SL$. Также из формулы (8) следует явная зависимость от тормозной способности радиатора $S(E_0)$ (в свою очередь зависит от квадрата заряда иона) и от длины волны излучения, так как $n = n(\lambda)$.

Более того, формула (8) учитывает и изотопический эффект: действительно, тормозная способность $S(E_0)$ пропорциональна квадрату заряда иона — одинаково для изотопов, но множитель $E_0^{-1} = (\gamma_0 M c^2)^{-1}$ в явном виде содержит зависимость от массы изотопа.

3. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Согласно теории Тамма – Франка [1], угловое распределение ЧИ в радиаторе конечной толщины определяется формулой

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \omega L \left(\frac{ze \sin \theta}{c} \right)^2 f_{TF}(\theta, \omega), \quad (9)$$

где

$$f_{TF}(\theta, \omega) = \frac{1}{\Delta\vartheta_{TF}} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2, \quad (10)$$

$$x = \frac{\pi}{\Delta\vartheta_{TF}} \left(\cos \theta - \frac{1}{\beta n} \right). \quad (11)$$

Формулы (10), (11) содержат ширину $\Delta\vartheta_{TF}$ углового распределения ЧИ вблизи черенковского угла:

$$\Delta\vartheta_{TF} = \lambda(nL)^{-1}. \quad (12)$$

Здесь ze — заряд иона, $\lambda = 2\pi c/\omega$ — длина волны излучения, ω — частота черенковского фотона. Угловое распределение (10) имеет дифракционную структуру и его ширина $\Delta\vartheta_{TF} \propto \lambda L^{-1}$.

В работе [3] для анализа углового распределения ЧИ и ширины углового распределения ЧИ с учетом торможения в радиаторе использовалась формула классической электродинамики для спектрально-углового распределения излучения заряженной частицы, движущейся в веществе по произвольной траектории:

$$\frac{d^2 W}{d\omega d(\cos \theta)} = \left(\frac{ze \sin \theta}{c} \right)^2 \frac{k\omega}{2\pi} \left\{ \int_0^L e^{i\Phi(x)} dx \right\}^2, \quad (13)$$

где

$$\Phi(x) = kx \cos \theta - \omega \int_0^x \frac{dx'}{v(x')},$$

$k = \omega n/c$ — волновое число черенковского фотона.

Используя разложение (3), авторы работы [3] путем дальнейших преобразований формулы (13) (см. Приложение) получили аналитические формулы для расчета углового распределения ЧИ релятивистских тяжелых ионов с учетом торможения в тонком радиаторе:

$$\frac{d^2 I}{d\omega d(\cos \theta)} = \omega L \left(\frac{ze \sin \theta}{c} \right)^2 f_{KT}(\theta, \omega), \quad (14)$$

где

$$f_{KT}(\theta, \omega) = \frac{1}{2\Delta\theta_{KT} \sin \theta_0} \times \left([C(u_1) - C(u_0)]^2 + [S(u_1) - S(u_0)]^2 \right). \quad (15)$$

В формуле (15)

$$C(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^u \cos t^2 dt, \quad S(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^u \sin t^2 dt$$

— интегралы Френеля;

$$u_{0,1} = -\frac{k \cos \theta - \omega/v_{0,1}}{a}, \quad a = \sqrt{-\frac{2\omega v'_0}{v_0^2}};$$

$$\Delta\theta_{KT} = \theta_0 - \theta_1 \approx \frac{|v'_0|L}{v_0} \operatorname{ctg} \theta_0$$

— ширина углового распределения ЧИ,

$$\theta_{0,1} = \arccos \left(\frac{c}{nv_{0,1}} \right); \quad \frac{1}{v_1} \approx \frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_0^2} v'_0 L,$$

v_1 — скорость частицы на выходе из радиатора.

Формула (15) содержит правильные выражения для пределов интегрирования (аргументов интегралов Френеля), в работе [3] они, видимо, приведены с опечатками.

Таким образом, различие угловых распределений ЧИ, полученных по теории ТФ [1] и в рамках модели КТ [3], заключается только в функциях $f_{TF}(\theta, \omega)$ и $f_{KT}(\theta, \omega)$. При этом $f_{TF}(\theta, \omega)$ содержит зависимость от длины волны излучения и толщины радиатора, а в $f_{KT}(\theta, \omega)$ появляется зависимость от начальной энергии частицы и ее удельных потерь энергии dE/dx в радиаторе. Зависимость от толщины радиатора L совершенно различна: в первом случае — это зависимость типа L^{-1} , во втором — линейная зависимость от L .

На рис. 1 схематично представлены угловые распределения ЧИ согласно теории ТФ, ширина углового распределения ЧИ $\Delta\vartheta_{TF} = \lambda(nL)^{-1}$, и с уче-

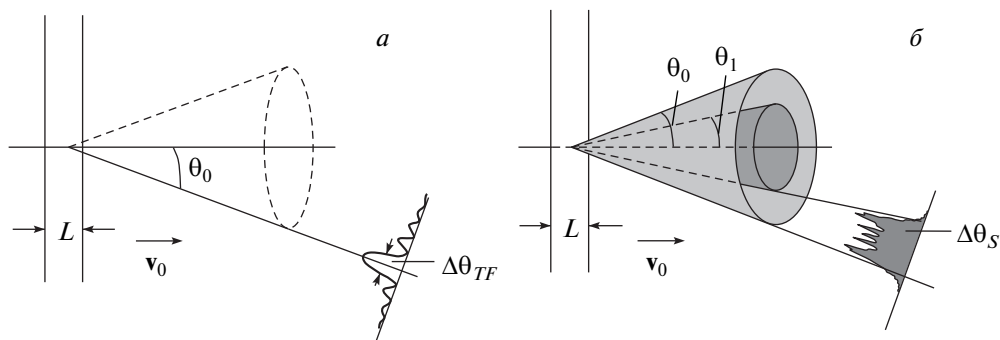


Рис. 1. Черенковский конус и диффракционно подобная структура углового распределения ЧИ: согласно теории ТФ (а) и с учетом торможения ионов в радиаторе (б)

том торможения ионов в радиаторе, ширина углового распределения зависит от тормозной способности радиатора как

$$\Delta\theta_S = \frac{L}{\beta_0^2 E_0 \gamma_0^2} \frac{S(E_0)}{\sqrt{(n(\lambda)\beta_0)^2 - 1}}$$

В последнем случае угловое распределение с ростом толщины радиатора становится шире и «ползет» внутрь первоначального черенковского конуса. Результаты детальных численных расчетов представлены в разд. 4.

Сделаем замечание о применимости приближения тонкого радиатора: преимущество подхода состоит в быстрой вычислениях и отсутствии необходимости пользоваться сторонними программами (SRIM в [4]), которые накладывают свои ограничения. Недостаток заключается в том, что данный подход применим только в случае тонкого радиатора, перед вычислениями необходимо проводить оценку применимости разложения (3).

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Формула (15) связывает структуру углового распределения ЧИ вблизи «первоначального» черенковского конуса с наблюдаемой длиной волны излучения, характеристиками радиатора (толщиной, тормозной способностью, показателем преломления) и пучка частиц (зарядом, массой). При этом необходимо учитывать, что формула (15) справедлива только для тонкого радиатора (когда еще можно пользоваться приближением (3)). В работе [3] не указано, как рассчитывались удельные потери энергии dE/dx , необходимые для определения v'_0 . В проведенных нами расчетах удельных

потерь энергии (торможения) использовалась формула Бете–Блоха (см., например, [6]):

$$-\frac{dE}{dx} = \rho 2\pi z^2 N_A r_e^2 m_e c^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \times \left(\ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 T_{max}}{I^2 (1 - \beta^2)} - 2\beta^2 \right), \quad (16)$$

где

$$T_{max} = \frac{2\beta^2 \gamma^2 m_e c^2}{1 + 2\gamma m_e c^2 / M c^2 + (m_e / M)^2}$$

— максимальная энергия, которая может быть передана электрону радиатора, $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ моль⁻¹ — число Авогадро, z — заряд частицы в единицах элементарного заряда, Z и A — атомный номер и атомный вес вещества, $m_e c^2$ — энергия покоя электрона, ρ [г·см⁻³] — плотность радиатора, $r_e^2 = 2.818 \cdot 10^{-13}$ см — радиус электрона, I [эВ] = $16Z^{0.9}$ — средний потенциал ионизации.

По формуле (15) были проведены расчеты для различных мишеней и ионов, исследована зависимость ширины черенковского кольца от материала радиатора, его длины, заряда иона и наблюдаемой длины волны излучения. Данные расчетов приведены в табл. 1–3. Также с помощью формулы (7) была исследована зависимость ширины черенковского кольца от массы для разных изотопов одного элемента, имеющих одинаковую начальную скорость при влете в радиатор (табл. 4).

Проанализировав данные табл. 1–3, можно сказать, что к увеличению ширины углового распределения ЧИ приводит увеличение следующих величин: длины радиатора, заряда иона, наблюдаемой длины волны излучения.

По данным табл. 4 видно, что увеличение массы частицы при неизменном заряде приводит к уменьшению ширины углового распределения ЧИ — изо-

Таблица 1. L -зависимость

Материал радиатора	n	λ , нм	L , см	Ион	$\Delta\theta$
LiF	1.4	390	0.01	Au	0.000337806
LiF	1.4	390	0.25	Au	0.00844515
LiF	1.4	390	0.5	Au	0.0168903
LiF	1.4	390	1	Au	0.0337806
SiO ₂	1.544	546	0.01	Au	0.000241845
SiO ₂	1.544	546	0.25	Au	0.00604613
SiO ₂	1.544	546	0.5	Au	0.0120923
SiO ₂	1.544	546	1	Au	0.0241845
C	2.417	529	0.01	Au	0.000185893
C	2.417	529	0.25	Au	0.00464732
C	2.417	529	0.5	Au	0.00929463
C	2.417	529	1	Au	0.0185893

Таблица 2. z^2 -зависимость

Материал радиатора	n	λ , нм	L , см	Ион	$\Delta\theta$
LiF	1.4	390	0.5	Au	0.0168903
LiF	1.4	390	0.5	Fe	0.00645314
LiF	1.4	390	0.5	Ne	0.00260507
LiF	1.4	390	0.5	Be	0.000947586
SiO ₂	1.544	546	0.5	Au	0.0120923
SiO ₂	1.544	546	0.5	Fe	0.00461935
SiO ₂	1.544	546	0.5	Ne	0.00186718
SiO ₂	1.544	546	0.5	Be	0.000678408
C	2.417	529	0.5	Au	0.00929463
C	2.417	529	0.5	Fe	0.00355008
C	2.417	529	0.5	Ne	0.00143701
C	2.417	529	0.5	Be	0.000521457

Таблица 3. λ -зависимость

Материал радиатора	n	λ , нм	L , см	Ион	$\Delta\theta$
LiF	1.44	200	0.5	Au	0.0155901
LiF	1.39	600	0.5	Au	0.0172626
LiF	1.38	1750	0.5	Au	0.0176578
LiF	1.36	3400	0.5	Au	0.0185268

Таблица 4. m -зависимость

Материал радиатора	n	λ , нм	L , см	Ион	$\Delta\theta$
LiF	1.4	390	0.5	^4Li	0.00117838
LiF	1.4	390	0.5	^7Li	0.000710866
LiF	1.4	390	0.5	^8Li	0.000595545
LiF	1.4	390	0.5	^{12}Li	0.00039536

топический эффект [7]. Суть изотопического эффекта состоит в том, что ширина черенковского кольца для различных изотопов одного элемента, имеющих одинаковые начальную скорость и релятивистский фактор, будет различна. Пусть два изотопа с массами M_1 и M_2 и начальными энергиями $E_1(0)$ и $E_2(0)$ имеют одинаковые начальную скорость v_0 и релятивистский фактор γ_0 на влете в радиатор,

$$\gamma_0 = \frac{E_1(0)}{M_1 c^2} = \frac{E_2(0)}{M_2 c^2}.$$

После прохождения в радиаторе начального участка длиной Δx оба изотопа потеряют одинаковое количество энергии

$$\Delta E_1 = \Delta E_2 = -\frac{dE}{dx} = S(\gamma_0, v_0).$$

Это утверждение основано на том, что, согласно формуле Бете–Блоха (16), потери энергии в радиаторе dE/dx для частицы определяются ее релятивистским фактором и зарядом. Для изотопов эти величины одинаковы на начальном участке Δx . На следующем участке изотопы уже будут иметь различные начальные энергии и релятивистские факторы:

$$\begin{aligned} E_1(\Delta x) &= E_1(0) - \Delta E_1 = E_1(0) - S(\gamma_0, v_0)\Delta x, \\ E_2(\Delta x) &= E_2(0) - \Delta E_2 = E_2(0) - S(\gamma_0, v_0)\Delta x, \\ E_1(0) \neq E_2(0) &\Rightarrow E_1(\Delta x) \neq E_2(\Delta x) \Rightarrow \gamma_1(\Delta x) \neq \gamma_2(\Delta x). \end{aligned}$$

И на следующем участке пути потери энергии для изотопов будут различны:

$$S(\gamma_1(\Delta x), v_1(\Delta x)) \neq S(\gamma_2(\Delta x), v_2(\Delta x))$$

и т. д.

Изменения релятивистского фактора ведут к изменениям скорости: $\Delta\beta = \Delta\gamma/\beta\gamma^3$. Для двух изотопов изменения скорости связаны соотношением

$$\frac{\Delta\beta_1}{\Delta\beta_2} = \frac{M_2}{M_1}.$$

Результаты расчетов ширины углового распределения ЧИ для различных изотопов вблизи черенковского угла

$$\theta_0 = \arccos\left(\frac{1}{n\beta_0}\right)$$

приведены на рис. 2.

Кривые углового распределения ЧИ для разных изотопов одного элемента сдвинуты относительно друг друга. Это объясняется тем, что чем меньше масса изотопа, тем больше изменяется его скорость в процессе движения в радиаторе; следовательно, конечная скорость на выходе из радиатора для более легких частиц будет меньше, чем для более тяжелых; соответственно уменьшается и черенковский угол $\theta_c = \arccos(c(nv)^{-1})$. Очевидно, что изотопический эффект наиболее ярко проявляется в случае изотопов Li, когда относительное изменение числа нейтронов велико.

На рис. 3 приведены зависимости ширины углового распределения ЧИ от глубины проникновения в радиатор для изотопов ^4Li , ^7Li , ^8Li , ^{12}Li .

На рис. 4 представлены результаты расчетов безразмерной функции $f(\theta_0 + \theta, \omega)$ (см. формулу (15)), характеризующей угловое распределение ЧИ, вблизи черенковского угла $\theta_0 = \arccos(1/n\beta_0)$. Полученная нами (с использованием формулы Бете–Блоха для расчета удельных потерь энергии) функция обозначена как $f_{BB}(\theta_0 + \theta, \omega)$, графики из работы [3] — $f_{KT}(\theta_0 + \theta, \omega)$, результаты расчетов с использованием компьютерного кода SRIM — $f_{SRIM}(\theta_0 + \theta, \omega)$ [4].

Как уже было отмечено ранее, использование компьютерного кода SRIM для расчета углового распределения ЧИ позволяет получить наиболее точные результаты. На рис. 4 видно, что графики для $f_{BB}(\theta, \omega)$ и $f_{KT}(\theta, \omega)$ симметричны, чего нельзя сказать о графике для $f_{SRIM}(\theta, \omega)$. Это связано с тем, что при расчете $f_{BB}(\theta, \omega)$ и $f_{KT}(\theta, \omega)$ используется приближение тонкого радиатора, а при расчете с помощью SRIM — нет. Соответственно, вид кривой $f_{SRIM}(\theta, \omega)$ более приближен к точному.

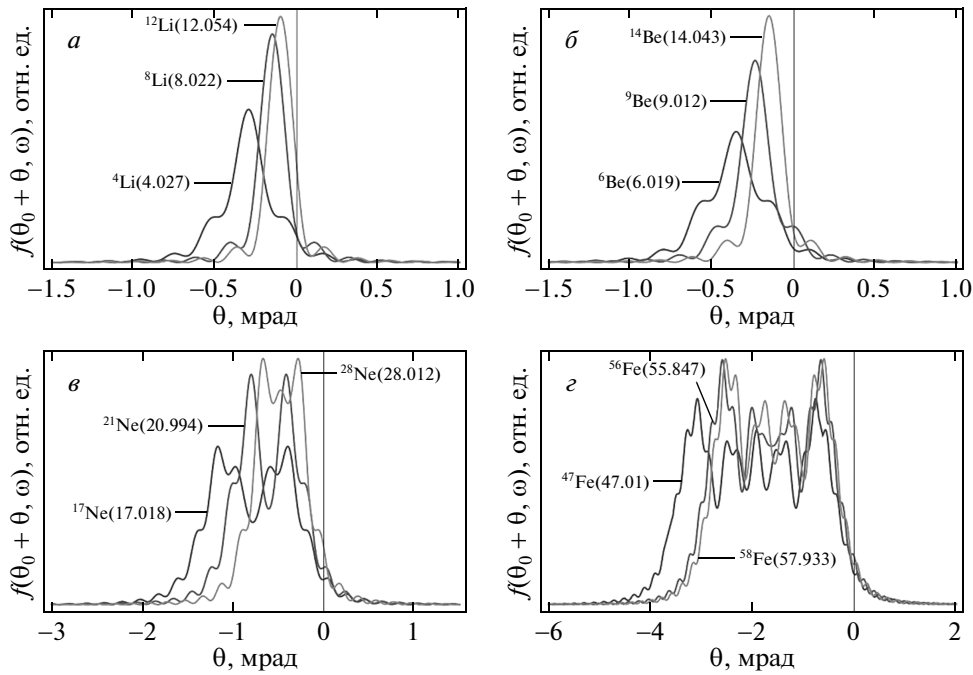


Рис. 2. Угловое распределение ЧИ изотопов: а) ${}^4\text{Li}$, ${}^8\text{Li}$, ${}^{12}\text{Li}$, б) ${}^6\text{Be}$, ${}^9\text{Be}$, ${}^{14}\text{Be}$, в) ${}^{17}\text{Ne}$, ${}^{21}\text{Ne}$, ${}^{28}\text{Ne}$, г) ${}^{47}\text{Fe}$, ${}^{56}\text{Fe}$, ${}^{58}\text{Fe}$; радиатор LiF толщиной $L = 0.25$ см, длина волны излучения $\lambda = 390$ нм, показатель преломления $n = 1.4$, начальная энергия изотопов 1000 МэВ/нуклон, $\theta_0 = \arccos(1/n\beta_0)$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный анализ углового распределения ЧИ релятивистских тяжелых ионов с учетом торможения в радиаторе демонстрирует зависимость структуры и ширины углового распределения ЧИ вблизи «начального» черенковского конуса от заряда (тормозной способности) и начальной энергии иона, толщины и показателя преломления радиатора, а также зависимость от массы иона (изотопическая зависимость). Полученная простая формула для оценки ширины углового распределения достаточно хорошо подтверждается численными расчетами.

Обсудим применимость использованных в работе приближений. Ограничений на толщину радиатора нет. Действительно, радиатор произвольной толщины при расчетах излучения Вавилова–Черенкова разбивается на большое количество тонких слоев. Для определения уменьшения скорости иона на выходе из очередного слоя используется формула Бете–Блоха, которая применима в диапазоне $2 \leq \gamma\beta \leq 100$. В нашей задаче нижней границей энергии ионов является порог возникновения излучения Вавилова–Черенкова, который может быть достигнут при торможении ионов в радиаторе, но это все еще

область действия формулы Бете–Блоха. Численные расчеты в работе выполнены для $\gamma\beta \approx 1.5\text{--}2$. При гораздо более высоких энергиях для определения ионизационных потерь энергии релятивистских тяжелых ионов следует использовать теорию Линдхарда–Соренсена [8], а также учесть вклад других процессов в полные потери энергии. Физической причиной, которая может привести к широкому гало вблизи черенковского угла, может быть изменение (флуктуации) зарядовых состояний ионов в радиаторе при энергии вблизи или ниже порога возникновения излучения (см. [9,10]). Однако при более высоких энергиях вероятность подхвата электрона мишени (радиатора) или рождения электрон-позитронной пары полем атома мишени в поле релятивистского ядра крайне малы.

Остающиеся проблемы, которые следует учитывать в численных расчетах, носят «технический» характер. Первое, это учет начального разброса в пучке ионов по энергиям и возникающего разброса в процессе прохождения через радиатор (фактически переход от непрерывных потерь энергии к учету распределения по потерям в каждом слое радиатора). Второе, это учет начальной угловой расходимости пучка и возникающего в процессе прохождения че-

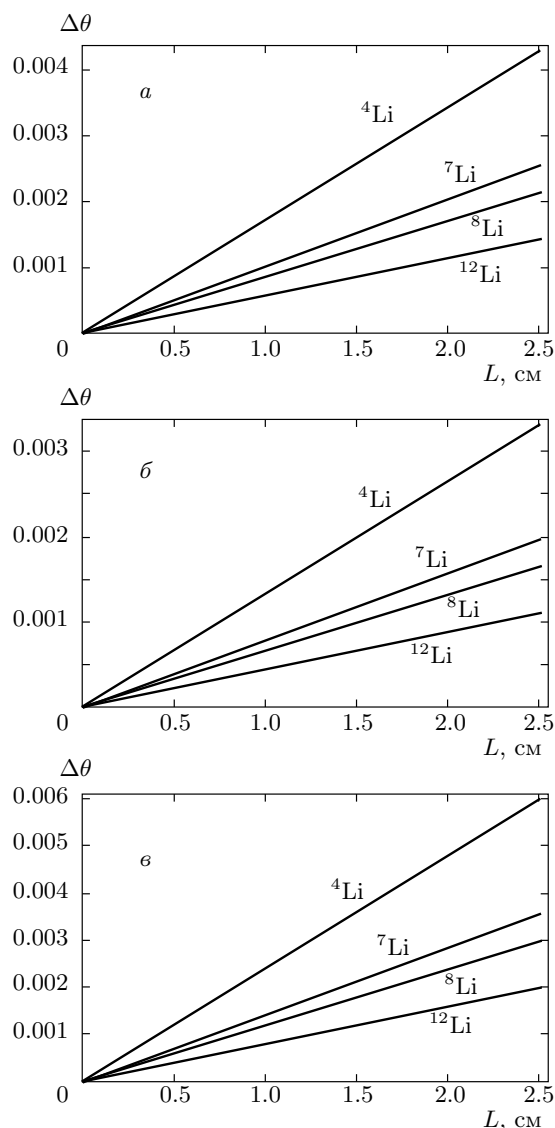


Рис. 3. Зависимости ширины углового распределения ЧИ от глубины проникновения в радиатор для изотопов ${}^4\text{Li}$, ${}^7\text{Li}$, ${}^8\text{Li}$, ${}^{12}\text{Li}$, толщина радиаторов от $L = 0$ см до $L = 0.25$ см, начальная энергия изотопов 1000 МэВ/нуклон: *a* — радиатор SiO_2 : длина волны излучения $\lambda = 546$ нм, показатель преломления $n = 1.544$; *b* — радиатор C : $\lambda = 529$ нм, $n = 2.417$; *c* — радиатор LiF : $\lambda = 390$ нм, $n = 1.4$

рез радиатор углового страгглинга (отклонения траекторий ионов от прямолинейных). Эти моменты легко учесть с помощью соответствующих распределений для релятивистских тяжелых ионов, см., например, в [11].

Указание на проявление обсуждаемых особенностей угловых распределений черенковского излучения, обязанных торможению, видимо, было получе-

но в экспериментах [12–14] на пучке 600 МэВ/а.е.м. ионов Au GSI Darmstadt, но детально эти данные не анализировались. Анализ этих экспериментов требует отдельного рассмотрения. Представляется интересным проведение новых экспериментов на пучках GSI (FAIR) Darmstadt по прецизионным исследованиям угловых распределений черенковского излучения с фиксированной длиной волны, генерируемого релятивистскими тяжелыми ионами в прозрачных твердотельных радиаторах. Для этих целей необходима иная экспериментальная методика по сравнению с представленной в работах [12–14], например, использование прецизионных оптических спектрометров. Вполне возможно, это откроет путь к новым применениям черенковских (в том числе RICH) детекторов — например, для одновременного определения скорости (энергии) и заряда ионов.

Авторы признательны Н. Geissel и С. Scheidenberger (GSI Darmstadt) за полезные обсуждения экспериментов [12–14].

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (контракт № МК-2059.2011.2), РФФИ (грант № 12-02-01314-а) и ФЦП (контракт № П691).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Преобразование формулы (13)

1. Подставив формулу (3) в выражение

$$\Phi(x) = kx \cos \theta - \omega \int_0^x \frac{dx'}{v(x')},$$

получим

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= kx \cos \theta - \omega - \int_0^x \left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_0^2} v_0' x' \right) dx' = \\ &= kx \cos \theta - \omega \left(\frac{x}{v_0} - \frac{v_0' x^2}{v_0^2} \right). \end{aligned}$$

Обозначим

$$a = k \cos \theta - \frac{\omega}{v_0}, \quad b = \frac{\omega |v_0'|}{2v_0^2}. \quad (17)$$

С учетом $v_0' < 0 \Rightarrow v_0' = -|v_0'|$, получим:

$$\Phi(x) = -b \left(x - \frac{a}{2b} \right)^2 + \frac{a^2}{4b}. \quad (18)$$

2. Обозначим

$$K_1 = \cos \frac{a^2}{4b}, \quad K_2 = \sin \frac{a^2}{4b}.$$

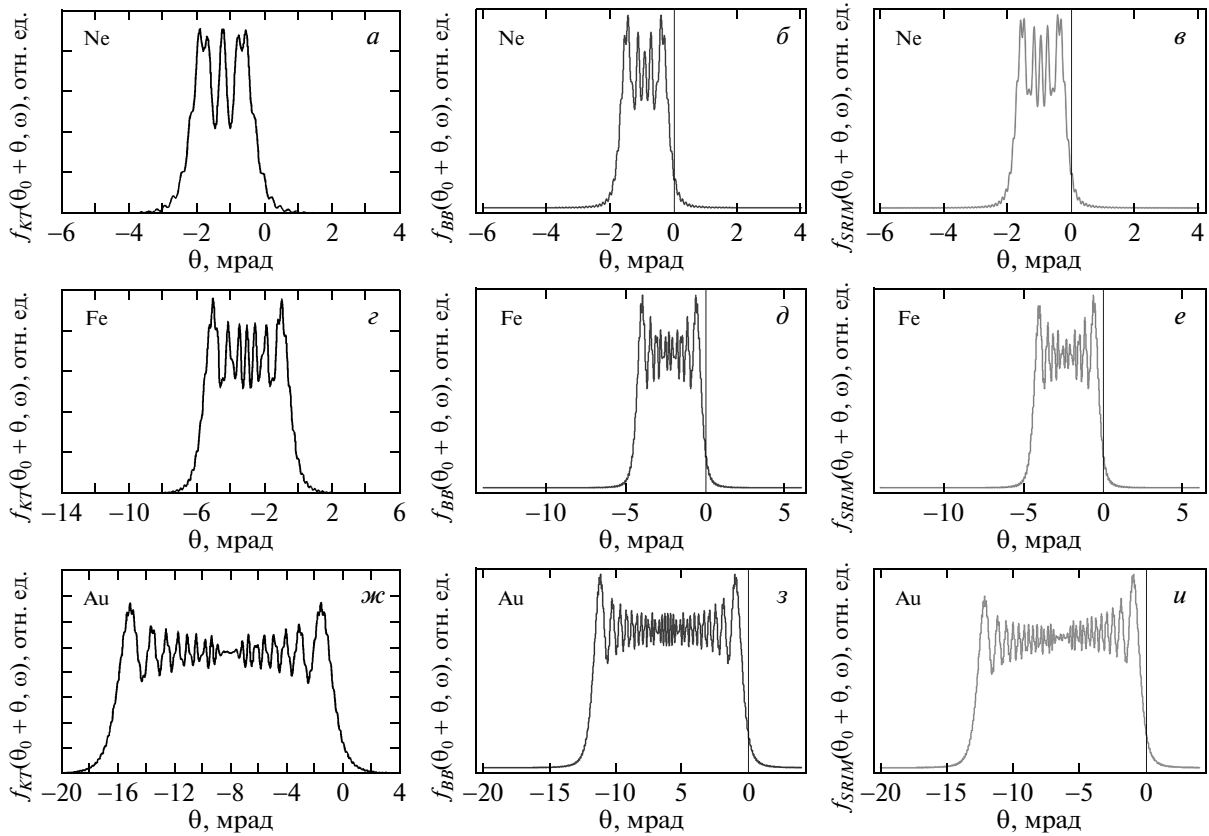


Рис. 4. Функции $f_{KT}(\theta_0 + \theta, \omega)$, $f_{BB}(\theta_0 + \theta, \omega)$ и $f_{SRIM}(\theta_0 + \theta, \omega)$ для Ne (а-в), Fe (г-е), Au (ж-и); радиатор SiO_2 , толщина радиатора $L = 0.5$ см, длина волны излучения $\lambda = 546$ нм, показатель преломления $n = 1.544$, начальная энергия пучка ионов 1000 МэВ/нуклон, $\theta_0 = \arccos(1/n\beta_0)$

Используя формулу (18) и учитывая, что $K_1^2 + K_2^2 = 1$, выполним следующие преобразования:

$$\left\{ \int_0^L e^{i\Phi(x)} dx \right\}^2 = \left\{ \int_0^L \cos \Phi(x) dx + i \int_0^L \sin \Phi(x) dx \right\}^2 = \left(\int_0^L \cos \left[b \left(x - \frac{a}{2b} \right)^2 - \frac{a^2}{4b} \right] dx \right)^2 + \left(\int_0^L \sin \left[b \left(x - \frac{a}{2b} \right)^2 - \frac{a^2}{4b} \right] dx \right)^2 = \left(\int_0^L \cos \left[b \left(x - \frac{a}{2b} \right)^2 \right] K_1 + \sin \left[b \left(x - \frac{a}{2b} \right)^2 \right] K_2 dx \right)^2 + \left(\int_0^L \sin \left[b \left(x - \frac{a}{2b} \right)^2 \right] K_1 - \cos \left[b \left(x - \frac{a}{2b} \right)^2 \right] K_2 dx \right)^2 = \left(\int_0^L \cos \left[b \left(x - \frac{a}{2b} \right)^2 \right] dx \right)^2 + \left(\int_0^L \sin \left[b \left(x - \frac{a}{2b} \right)^2 \right] dx \right)^2.$$

Окончательно получим

$$\left\{ \int_0^L e^{i\Phi(x)} dx \right\}^2 = \left(\int_0^L \cos \left[b \left(x - \frac{a}{2b} \right)^2 \right] dx \right)^2 + \left(\int_0^L \sin \left[b \left(x - \frac{a}{2b} \right)^2 \right] dx \right)^2. \quad (19)$$

3. Интегралы в правой части выражения (19) можно свести к интегралам Френеля вида

$$C(x) = \int_0^x \cos \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) dt,$$

так как такое представление интегралов Френеля используется во встроенных функциях программного пакета Mathematica. Тогда

$$\left\{ \int_0^L e^{i\Phi(x)} dx \right\}^2 = \left(\int_0^L \cos \left[\frac{\pi}{2} b \left(x - \frac{a}{2b} \right)^2 \frac{2}{\pi} \right] dx \right)^2 + \left(\int_0^L \sin \left[\frac{\pi}{2} b \left(x - \frac{a}{2b} \right)^2 \frac{2}{\pi} \right] dx \right)^2. \quad (20)$$

4. Сделаем замену переменных:

$$\sqrt{b} \left(x - \frac{a}{2b} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} = t, \quad dx = dt \sqrt{\frac{\pi}{2b}}. \quad (21)$$

Преобразуем нижний и верхний пределы интегрирования:

$$x = 0 \rightarrow t = -\frac{a}{\sqrt{2b\pi}} = \frac{\omega/v_0 - k \cos \theta}{\sqrt{\pi\omega|v'_0|/v_0^2}},$$

$$x = L \rightarrow t = \sqrt{\frac{2b}{\pi}} \left(L - \frac{a}{2b} \right) \frac{\omega/v_1 - k \cos \theta}{\sqrt{\pi\omega|v'_0|/v_0^2}}.$$

Обозначим

$$p_{0,1} = \frac{\omega/v_{0,1} - k \cos \theta}{\sqrt{\pi\omega|v'_0|/v_0^2}}. \quad (22)$$

5. Подставив (21), (22) в (20), получим интегралы Френеля вида

$$\int_{p_1}^{p_2} \cos \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) dt = C(p_2) - C(p_1),$$

$$\int_{p_1}^{p_2} \sin \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) dt = S(p_2) - S(p_1).$$

Тогда выражение (20) принимает вид

$$\left\{ \int_0^L e^{i\Phi(x)} dx \right\}^2 = \frac{\pi}{2b} \left([C(p_2) - C(p_1)]^2 + [S(p_2) - S(p_1)]^2 \right). \quad (23)$$

Подставив (23) в (13), получим:

$$\frac{dW}{d\omega d(\cos \theta)} = \omega L \left(\frac{ze \sin \theta}{c} \right)^2 f(\theta, \omega),$$

где

$$f(\theta, \omega) = \frac{k}{4bL} \left([C(p_2) - C(p_1)]^2 + [S(p_2) - S(p_1)]^2 \right).$$

С учетом (7) и (17) коэффициент $k/4bL$ можно представить в виде

$$\frac{k}{4bL} = \frac{1}{2\Delta\theta_{KT} \sin \theta_0}.$$

Тогда

$$f(\theta, \omega) = \frac{1}{2\Delta\theta_{KT} \sin \theta_0} \times \left([C(u_2) - C(u_1)]^2 + [S(u_2) - S(u_1)]^2 \right).$$

6. В работе [3] используются интегралы Френеля вида

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos t^2 dt, \quad S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin t^2 dt.$$

Можно свести к ним интегралы в правой части выражения (19). Тогда

$$\left\{ \int_0^L e^{i\Phi(x)} dx \right\}^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^L \cos \left[b \left(x - \frac{a}{2b} \right)^2 \right] dx \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^L \sin \left[b \left(x - \frac{a}{2b} \right)^2 \right] dx \right)^2. \quad (24)$$

7. Сделаем замену переменных:

$$\sqrt{b} \left(x - \frac{a}{2b} \right) = t, \quad dx = dt \frac{1}{\sqrt{b}}. \quad (25)$$

Преобразуем верхний и нижний пределы интегрирования:

$$x = 0 \rightarrow t = -\frac{a}{2\sqrt{b}} = -\frac{k \cos \theta - \omega/v_0}{\sqrt{-2\omega v'_0/v_0^2}},$$

$$x = 0 \rightarrow t = \sqrt{b} \left(L - \frac{a}{2b} \right) = -\frac{k \cos \theta - \omega/v_1}{\sqrt{-2\omega v'_0/v_0^2}}.$$

Обозначим

$$u_{0,1} = -\frac{k \cos \theta - \omega/v_{0,1}}{\sqrt{-2\omega v'_0/v_0^2}}. \quad (26)$$

8. Подставив (25), (26) в (24), получим интегралы Френеля вида

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} \cos t^2 dt = C(u_2) - C(u_1),$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} \sin t^2 dt = S(u_2) - S(u_1).$$

Тогда

$$\left\{ \int_0^L e^{i\Phi(x)} dx \right\}^2 =$$

$$= \frac{\pi}{2b} \left([C(u_2) - C(u_1)]^2 + [S(u_2) - S(u_1)]^2 \right).$$

9. Окончательно получим

$$\frac{dW}{d\omega d(\cos \theta)} = \omega L \left(\frac{ze \sin \theta}{c} \right)^2 f(\theta, \omega),$$

где

$$f(\theta, \omega) = \frac{1}{2\Delta\theta_{KT} \sin \theta_0} \times$$

$$\times \left([C(u_2) - C(u_1)]^2 + [S(u_2) - S(u_1)]^2 \right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Е. Тамм, И. М. Франк, ДАН СССР **14**, 107 (1937).
2. K. G. Dedrick, Phys. Rev. **87**, 891 (1952).
3. E. S. Kuzmin and A. V. Tarasov, Краткие сообщения ОИЯИ [JINR Rapid Comm.] 4[61]-93, 64 (1993).
4. V. R. Altapova, O. V. Bogdanov, and Yu. L. Pivovarov, Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. B **256**, 109 (2009).
5. SRIM: <http://www.srim.org>.
6. *Review of Particle Physics*, Phys. Lett. B **667**(1-5), 267-280 (2008).
7. O. V. Bogdanov and Yu. L. Pivovarov, Nuovo Cimento **34**(4), 1 (2011).
8. J. U. Lindhard and A. H. Sorensen, Phys. Rev. A **53**, 2443 (1996).
9. V. S. Malyshevskii, Phys. Lett. A **372**, 2133 (2008).
10. В. С. Малышевский, Письма в ЖТФ **34**(7), 29 (2008).
11. P. Sigmund, *Particle Penetration and Radiation Effects*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2006).
12. J. Ruzicka et al., Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A **369**, 23 (1996).
13. J. Ruzicka et al., Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A **431**, 148 (1999).
14. J. Ruzicka et al., Vacuum **63**, 591 (2001).