ЖЭТФ, 2012, том 142, вып. 3 (9), стр. 472–479

МАГНЕТИЗМ ВЫРОЖДЕННОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. В. Скобелев *

Московский государственный индустриальный университет
115280, Москва, Россия

Поступила в редакцию 20 февраля 2012 г.

Вычислены намагниченность и магнитная восприимчивость вырожденного электронного газа в сильном магнитном поле, в котором электроны находятся на основном уровне Ландау, причем электронный газ обладает свойствами нелинейного парамагнетика. Отмечены парадоксальные свойства электронного газа в этой ситуации — уменьшение намагниченности с ростом поля и ее увеличение с ростом температуры. Показано, что в соответствующих условиях нейтронных звезд вещество является парамагнетиком со значением магнитной восприимчивости $\chi \sim 10^{-3}$.

1. ВВЕДЕНИЕ

На ранних стадиях изучения вопроса актуальным являлось исследование нерелятивистского электронного газа в металлах (на элементарном уровне — см., например, книгу [1]), в которых электроны приблизительно можно считать свободными, а электронный газ является парамагнетиком. Исчерпывающее рассмотрение проблемы методами квантовой статистики проведено в классической книге [2]. Однако в некоторых астрофизических объектах (белые карлики, нейтронные звезды) из-за паулиевского вырождения электронный газ является существенно релятивистским, причем это определяет его вклад в суммарное давление [3, 4] в белых карликах или в эффект подавления β-распада нейтрона в нейтронных звездах [5]. Таким образом, в связи с возможными астрофизическими приложениями актуальным является исследование свойств релятивистского электронного газа, и одной из первых попыток в этом плане является работа [6], в которой применялся соответствующий математический аппарат. Упомянутые астрофизические объекты обладают сильными магнитными полями (в белых карликах — до 10^9 Гс [7], в нейтронных звездах — до 10^{17} Гс [8]), поэтому представляет интерес исследование магнитных свойств вещества белых карликов и нейтронных звезд, т. е. вычисление намагниченности J и магнитной восприимчивости χ. Магнитное поле белых карликов подходит под понятие слабого поля $B \ll B_0 = m^2/e = 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс, и в этом аспекте магнитные свойства релятивистского электронного газа достаточно подробно изучены в работе [9], в которой замкнутые выражения получены именно для этого случая.

Что касается нейтронных звезд, то вклад вырожденного нерелятивистского нейтронного газа, обусловленный взаимодействием аномального магнитного момента (АММ) нейтронов с магнитным полем, ведет к паулиевскому парамагнетизму [2], причем для нейтронов понятие слабого поля выражается неравенством $B \ll B_{max} \approx 5.6 \cdot 10^{18}$ Гс [10], это соотношение, по-видимому, имеет место в нейтронных звездах. Представляет интерес найти вклад электронов (и протонов) в величины J, χ, характеризующие вещество нейтронной звезды, при максимально возможных значениях поля — порядка 10^{17} Гс. В таких полях могут реализоваться макроскопические эффекты существенного влияния электронного газа, например, на размеры нейтронной звезды-магнитара [5].

Заметим в этой связи, что при значении поля [5]

$$B > B_{cr} = \frac{B_0}{2}(4\pi^2 n_e \lambda_C^3)^{2/3}, \quad \lambda_C = \frac{1}{m}, \qquad (1)$$

вырожденный электронный газ находится на основном уровне Ландау, т. е. становится эффективно одномерным, причем при типичной электронной концентрации в нейтронной звезде $n_e \sim 10^{35}$ см$^{-3}$ по-

*E-mail: v.skobelev@inbox.ru

ле $B_{cr} \approx 8 \cdot 10^{16}$ Гс, поэтому применительно к магнитарам это необходимо учитывать. В работе [9] данный случай вообще не рассматривался, поскольку используемые в ней интерполяционные формулы справедливы для вклада всех уровней Ландау. В нашей работе вычислены значения J, χ в сильном магнитном поле (1), результаты обсуждаются применительно к звездам-магнитарам.

Предварительно приведем общие соотношения, на которых основаны аналогичные вычисления.

Значение $J = M/V$, где M — полный магнитный момент электронного газа, может быть вычислено на основании обобщенного дифференциального соотношения для Ω-потенциала [2]

$$d\Omega = -S\,dT - P\,dV - N\,d\mu - M\,dB, \qquad (2)$$

и следующего из этой формулы равенства

$$J = -\left(\frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial B}\right)_{T,V,\mu}, \qquad (3)$$

где $\tilde{\Omega} = \Omega/V$ — потенциал единицы объема. Далее имеем [2]

$$\Omega = -T\sum_k \ln\left(1 + \exp\frac{\mu - E_k}{T}\right), \qquad (4)$$

причем сумма берется по всем квантовым состояниям с набором квантовых чисел k. В рассматриваемом в работе случае постоянного и однородного магнитного поля энергия E_k равна

$$E_k \to E_n = \sqrt{m^2 + p_3^2 + 2\gamma n}\,, \qquad (5)$$

где $\gamma = eB$, e — элементарный заряд, p_3 — импульс вдоль поля, $n = 0, 1, 2\ldots$ — номера уровней Ландау.

Как известно [2] (см. также [5]), в магнитном поле сумма по квантовым состояниям имеет вид

$$\sum_k \to \frac{\gamma V}{(2\pi)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma_n\int_{-\infty}^{\infty} dp_3, \qquad (6)$$

где Γ_n — спиновый статистический вес, равный 2 при $n \neq 0$ и 1 при $n = 0$. Запишем выражение удельного потенциала $\tilde{\Omega}$ в виде

$$\tilde{\Omega} = -\frac{1}{\pi^2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} F(n) + \frac{1}{2}F(0)\right\}, \qquad (7)$$

$$F(n) = \gamma T\int_0^{\infty} dp_3 \ln\left(1 + \exp\frac{\mu - E_n}{T}\right). \qquad (7a)$$

В случае полностью вырожденного ($T = 0$) электронного газа выражение (7а) отлично от нуля лишь при $E_n < E_F \equiv \mu|_{T=0}$ и при этом

$$\ln\left(1 + \exp\frac{\mu - E_n}{T}\right) = \frac{E_F - E_n}{T},$$

$$\int_0^{\infty} dp_3 \to \int_0^{p_{max}} dp_3,$$

$$p_{max} = \sqrt{E_F^2 - m_n^2}, \quad m_n = \sqrt{m^2 + 2\gamma n}.$$

После элементарного интегрирования по p_3 и перехода к безразмерным переменным получим

$$\tilde{\Omega}_{dim} \equiv \frac{\tilde{\Omega}}{m^4/2\pi^2} = -2\varepsilon\left\{\sum_{n=1}^{E(y)}\tilde{F}(n) + \frac{1}{2}\,\tilde{F}(0)\right\}, \quad (8)$$

где $\varepsilon = B/B_0$, а безразмерная функция $\tilde{F}$ от целого числа n равна

$$\tilde{F}(n) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2\varepsilon}\,\sqrt{(1 + 2\varepsilon y)(y - n)} - (1 + 2\varepsilon n)\,\times\right.$$
$$\left.\times\,\ln\frac{\sqrt{1 + 2\varepsilon y} + \sqrt{2\varepsilon}\sqrt{y - n}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon n}}\right]. \quad (8a)$$

Мы используем обозначение $E(y)$, $y = (E_F^2 - m^2)/2\gamma$, где E — наибольшая целая часть, которое совпадает с аналогичным обозначением в работе [4]. Заметим, что формулы (8), (8а) согласуются с обычным выражением $\Omega = -PV$ и приведенной в работе [4] формулой для давления вырожденного электронного газа (при этом в соответствующей формуле (12а) работы [4] коэффициент $1/2$ из формулы (8) из соображений удобства вычислений был опущен; это никак не повлияло на расчет давления электронного газа в белых карликах в силу малости второго слагаемого в фигурных скобках (8) при характерных значениях магнитного поля в этих астрофизических объектах).

В принципе, этих соотношений достаточно для повторения расчетов, проведенных в работе [9]. Но нам кажется, что определение J через Ω-потенциал более удобно, чем через свободную энергию F, как это сделано в [9], поскольку производная в (3) берется при постоянном μ, что упрощает вычисления по сравнению с работой [9], в которой следовало при дифференцировании по полю учитывать зависимость $\mu(B)$ (так как μ не относится к числу переменных, в которых dF является полным дифференциалом). Впрочем, для полноты картины мы все же вычисляем в Приложении А полевую поправку к энергии Ферми при $(3\pi^2 n_e \lambda_C^3)^{2/3} \gg \varepsilon$ (n_e, λ_C — концентрация и комптоновская длина волны), а в Приложении В — квадратичную по температуре поправку к химическому потенциалу.

2. НАМАГНИЧЕННОСТЬ И МАГНИТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ ПОЛНОСТЬЮ ВЫРОЖДЕННОГО ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Из выражения y, переписанного в виде

$$y = \frac{(E_F/m)^2 - 1}{2\varepsilon}, \tag{9}$$

следует, что на основном уровне Ландау ($n = 0$)

$$2\varepsilon y = \tilde{p}_F^2, \quad \tilde{p}_F \equiv p_F/m, \tag{9a}$$

причем [4]

$$\tilde{p}_F = \frac{2\pi^2 (n_e \lambda_C^3)}{\varepsilon} \quad \left(p_F = \frac{2\pi^2 n_e}{\gamma}\right). \tag{10}$$

Учитывая, что вклад дает лишь второе слагаемое в скобках формулы (8), имеем с учетом (8а):

$$\tilde{\Omega}_{dim} = -\frac{\varepsilon}{2}\left[\tilde{p}_F\sqrt{1+\tilde{p}_F^2} - \ln\left(\tilde{p}_F + \sqrt{1+\tilde{p}_F^2}\right)\right], \tag{11}$$

причем уравнение (3) принимает вид

$$J = -\frac{m^2 e}{2\pi^2}\left(\frac{\partial \tilde{\Omega}_{dim}}{\partial \varepsilon}\right)_{\tilde{p}_F}, \tag{12}$$

т. е.

$$J = \frac{em^2}{4\pi^2}\left[\tilde{p}_F\sqrt{1+\tilde{p}_F^2} - \ln\left(\tilde{p}_F + \sqrt{1+\tilde{p}_F^2}\right)\right] \tag{13}$$

или в эквивалентной форме —

$$J = \frac{\alpha}{4\pi^2} \times \left[\tilde{p}_F\sqrt{1+\tilde{p}_F^2} - \ln\left(\tilde{p}_F + \sqrt{1+\tilde{p}_F^2}\right)\right] B_0, \quad \alpha = e^2 = 1/137. \tag{13a}$$

Если переписать условие приведения к одномерному виду (1) как

$$\sqrt{2}\,\pi^2 (n_e \lambda_C^3) < \varepsilon^{3/2}, \tag{14}$$

то с учетом (10) представляется естественным рассмотреть нерелятивистский случай $\tilde{p}_F \ll 1$, и выражение (13) принимает вид

$$J = \frac{em^2}{12\pi^2}\,\tilde{p}_F^3. \tag{15}$$

С учетом (10) это выражение можно переписать в форме:

$$J = \frac{2\pi^4 e^2}{3}\,\frac{(n_e \lambda_C^3)^3}{\varepsilon^4}\,B. \tag{15a}$$

Определяя магнитную восприимчивость χ соотношением

$$J = \chi B, \tag{16}$$

получаем в нерелятивистском случае:

$$\chi = \frac{2\pi^4 e^2}{3}\,\frac{(n_e \lambda_C^3)^3}{\varepsilon^4}. \tag{17}$$

Как будет видно, в нейтронных звездах возможен и ультрарелятивистский случай $\tilde{p}_F \gg 1$, тогда из (13) и определения (16) имеем

$$J = \frac{em^2}{4\pi^2}\,\tilde{p}_F^2 = \pi^2 e^2 \frac{(n_e \lambda_C^3)^2}{\varepsilon^3}\,B, \tag{18}$$

$$\chi = \pi^2 e^2 \frac{(n_e \lambda_C^3)^2}{\varepsilon^3}. \tag{18a}$$

Как видно из соотношений (13)–(17), зависимости J, χ от поля являются существенно нелинейными, причем намагниченность и магнитная восприимчивость убывают с ростом поля. Этот не совсем обычный результат можно объяснить следующим образом. Волновая функция электрона на основном уровне Ландау содержит экспоненциальный фактор (см., например, [4])

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\left(x\sqrt{\gamma} - \frac{p_2}{\sqrt{\gamma}}\right)^2\right],$$

где квазиимпульс p_2 определяет положение центра волнового пакета на оси x. Выбирая для простоты $p_2 = 0$, запишем этот фактор в виде

$$\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\gamma\right).$$

Это означает, что электрон локализован в области шириной $\Delta x \sim 1/\sqrt{\gamma}$, т. е. с ростом поля область локализации уменьшается. Далее, рассматриваемое приближение идеального ферми-газа может реализоваться, как и для классического газа, а) либо в случае малых концентраций, б) либо в случае исчезающе малых «размеров» частиц (областей их локализации). В обоих случаях получается разреженный идеальный газ. Отсюда следует фактическая эквивалентность этих вариантов «получения» идеального электронного газа в сильном магнитном поле (1), (14). Этому требованию и удовлетворяют формулы (10), (15), (18). В частности, согласно (15), (18), намагниченность убывает либо с уменьшением концентрации, что вполне понятно, либо, как это следует из упомянутой эквивалентности вариантов, с ростом поля.

3. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОПРАВКИ К НАМАГНИЧЕННОСТИ И МАГНИТНОЙ ВОСПРИИМЧИВОСТИ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Как известно [11], даже в «старых» нейтронных звездах температура $T \sim 1$ МэВ, так что в реальной ситуации в сколлапсированных астрофизических объектах (белые карлики, нейтронные звезды) электронный газ вырожден лишь частично, и представляет интерес найти температурные поправки к J, χ и, следовательно, к значению Ω-потенциала (7). Для этого в общем случае выражение (7а) преобразуем следующим образом.

а) Используя ранее введенное обозначение $m_n = \sqrt{m^2 + 2\gamma n}$, запишем полную энергию в виде

$$E_n = \sqrt{p_3^2 + m_n^2}\,. \qquad (19)$$

б) В выражении (7а) сделаем замену переменной интегрирования:

$$p_3 \to K_n = E_n - m_n \qquad (20)$$

(«кинетическая энергия»). После этого выражение (7а) приобретает вид

$$F(n) = \gamma T \int\limits_0^\infty dK_n \frac{K_n + m_n}{\sqrt{K_n^2 + 2m_n K_n}} \times \\ \times \ln\left(1 + \exp\frac{(\mu - m_n) - K_n}{T}\right). \qquad (21)$$

Интегрируя по частям, получаем

$$F(n) = \gamma \int\limits_0^\infty \frac{dK_n \sqrt{K_n^2 + 2m_n K_n}}{\exp\dfrac{K_n - (\mu - m_n)}{T} + 1}\,. \qquad (22)$$

Далее воспользуемся асимптотическим разложением по температуре, приведенным в книге [2]:

$$\int\limits_0^\infty \frac{d\varepsilon\, f(\varepsilon)}{\exp\dfrac{\varepsilon - \mu}{T} + 1} = \int\limits_0^\mu f(\varepsilon)\, d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6}\, T^2 f'(\mu) + \ldots \qquad (23)$$

В нашем случае

$$\varepsilon \to K_n, \quad f \to \sqrt{K_n^2 + 2m_n K_n}, \quad \mu \to \mu - m_n.$$

Следовательно, выражение (22) с учетом разложения самого химического потенциала по степеням температуры $\mu = \mu_0 + \mu_2 + \ldots$ приобретает вид

$$F(n) = F_0(n) + F_T(n) + \ldots \qquad (24)$$

Здесь $F_0(n)$ соответствует значению $F(n)$ при нулевой температуре и дает вклад в J, представленный при $n = 0$ формулой (13), а температурный вклад $F_T(n)$ имеет вид

$$F_T(n) = \frac{\pi^2}{6}\,\gamma T^2 \frac{E_F}{\sqrt{E_F^2 - m_n^2}} + \mu_2 \sqrt{E_F^2 - m_n^2}\,\gamma, \qquad (25)$$

причем с той же квадратичной точностью по T в (25) мы положили $\mu \to \mu_0 \equiv E_F$. При переходе к безразмерным переменным выражение (25) приобретает вид

$$\tilde{F}_T(n) = \varepsilon \left[\frac{\pi^2}{6}\,\tilde{T}^2 \frac{\tilde{E}_F}{\sqrt{\tilde{E}_F^2 - \tilde{m}_n^2}} + \tilde{\mu}_2 \sqrt{\tilde{E}_F^2 - \tilde{m}_n^2}\right], \\ \tilde{T} = \frac{T}{m}, \quad \tilde{E}_F = \frac{E_F}{m}, \\ \tilde{m}_n = \frac{m_n}{m} = \sqrt{1 + 2\varepsilon n}\,. \qquad (26)$$

Используя эти общие соотношения, в принципе можно получить температурную поправку к χ, найденную в работе [9], причем в нашем случае выражение в квадратных скобках при вычислении производной в (3) вклада не дает. Однако нас интересует лишь вклад основного уровня Ландау, для чего в формуле (8) следует учесть лишь второе слагаемое в фигурных скобках. Для соответствующего вклада в безразмерный удельный Ω-потенциал получаем

$$\tilde{\Omega}_{dim}^{(T)} = \frac{\tilde{\Omega}_T}{m^4/2\pi^2} = -\tilde{F}_T(0) = \\ = -\varepsilon \left[\frac{\pi^2}{6}\,\tilde{T}^2 \frac{\tilde{E}_F^{(0)}}{\sqrt{\tilde{E}_F^{(0)^2} - 1}} + \tilde{\mu}_2^{(0)} \sqrt{\tilde{E}_F^{(0)^2} - 1}\right], \qquad (27)$$

где

$$\tilde{E}_F^{(0)} = \frac{E_F^{(0)}}{m} = \sqrt{1 + \tilde{p}_F^2}$$

— безразмерная энергия Ферми со значением безразмерного импульса Ферми (10), а $\tilde{\mu}_2^{(0)}$ — безразмерная квадратичная по температуре поправка к химическому потенциалу на основном уровне Ландау $n = 0$, значение которой вычислено в Приложении B. С использованием этого результата получаем для $\tilde{\Omega}_{dim}^{(T)}$:

$$\tilde{\Omega}_{dim}^{(T)} = -\varepsilon \frac{\pi^2}{6\tilde{p}_F}\,\tilde{T}^2 \left[\tilde{E}_F^{(0)} + \frac{1}{\tilde{E}_F^{(0)}}\right], \qquad (28)$$

или через безразмерный импульс на уровне Ферми (10):

$$\tilde{\Omega}_{dim}^{(T)} = -\varepsilon \frac{\pi^2}{6\tilde{p}_F}\,\tilde{T}^2 \left[\sqrt{1 + \tilde{p}_F^2} + \frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{p}_F^2}}\right]. \qquad (28а)$$

Учитывая формулы (11), (28a), а также соотношение $\Omega = -PV$, попутно получаем для давления электронного газа выражение

$$P = \varepsilon \frac{m^4}{2\pi^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\tilde{p}_F \sqrt{1+\tilde{p}_F^2} - \ln\left(\tilde{p}_F + \sqrt{1+\tilde{p}_F^2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\pi^2}{6\tilde{p}_F} \tilde{T}^2 \left[\sqrt{1+\tilde{p}_F^2} + \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{p}_F^2}} \right] \right\}$$

с ограничением вида (B.6) для температуры и импульса Ферми. При $\tilde{T} = 0$ это выражение как и следует, совпадает с формулой (25) работы [4].

В рассматриваемых ниже экстремальных условиях нейтронных звезд (см. разд. 4) $\tilde{p}_F \gg 1$, так что приблизительно имеем

$$\tilde{\Omega}_{dim}^{(T)} \approx -\varepsilon \frac{\pi^2}{6} \tilde{T}^2, \tag{28b}$$

что в совокупности с (11) дает для этого случая выражение

$$\tilde{\Omega}_{dim} = -\frac{\varepsilon \tilde{p}_F^2}{2} \left[1 + \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{\tilde{T}}{\tilde{p}_F} \right)^2 \right]. \tag{29}$$

С использованием (12) получаем

$$J = \pi^2 e^2 \frac{(n_e \lambda_C^3)^2}{\varepsilon^3} \left[1 + \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{\tilde{T}}{\tilde{p}_F} \right)^2 \right] B, \tag{30a}$$

а для магнитной восприимчивости —

$$\chi = \pi^2 e^2 \frac{(n_e \lambda_C^3)^2}{\varepsilon^3} \left[1 + \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{\tilde{T}}{\tilde{p}_F} \right)^2 \right]. \tag{30b}$$

Очевидно, что знак μ_2 ($\mu_2 > 0$) и, как следствие, рост J, χ с увеличением температуры, в отличие от случая слабых полей [9], есть явление того же порядка, что и отмеченное выше уменьшение J, χ с ростом поля в рассматриваемом случае сильного магнитного поля (1), (14). Заметим, что с учетом выражения для Ω-потенциала при нулевой температуре (11) $\tilde{\Omega}_{dim} \equiv \tilde{\Omega}_{dim}^{(0)}$ это следует из совпадения знаков $\tilde{\Omega}_{dim}^{(T)}$ (28a), (28b) и $\tilde{\Omega}_{dim}^{(0)}$. Однако знак $\tilde{\Omega}_{dim}^{(0)}$ фиксирован явлением спинового парамагнетизма, так как при подавлении поперечных возбуждений диамагнетизм Ландау вообще отсутствует, а знак $\tilde{\Omega}_{dim}^{(T)}$ — знаком μ_2, объяснение которого из общих соображений дано в Приложении В, (второе слагаемое в (27)) и таким же знаком первого слагаемого в (27), который, в свою очередь, фиксирован положительным знаком энтропии (при взятии производной вклад дает только оно, так как производная берется при постоянном μ, а второе слагаемое содержит μ_2):

$$\tilde{S} = -\left(\frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial T} \right)_{\mu, B} = -\frac{m^3}{2\pi^2} \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}_{dim}}{\partial \tilde{T}} \right)_{\mu(\tilde{p}_F), \varepsilon} = \\ = \frac{\varepsilon}{6\lambda_C^3} \frac{\tilde{T}}{\tilde{p}_F} \sqrt{1+\tilde{p}_F^2} > 0.$$

Более убедительного объяснения этому феномену мы не нашли. Другие особенности поведения частицы с половинным спином в двумерном пространстве-времени и изменение математического аппарата отмечены, например, в работах [11, 12]. Впрочем, в рассмотренных в разд. 4 условиях магнитных нейтронных звезд ($\tilde{p}_F \approx 50$, $\tilde{T} \approx 2$), как видно из (30a), (30b), температурные поправки все равно пренебрежимо малы.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Оценим сначала вклад электронного газа в намагниченность «старых» нейтронных звезд со значением температуры $T \sim 1$ МэВ [13], когда, как уже отмечалось, температурными поправками можно пренебречь. При вероятном значении концентрации $n_e \sim 10^{35}$ см$^{-3}$ условия (1), (14) для приведения к одномерному виду «на пределе» выполняются при максимально возможном [8] значении поля $B \sim 10^{17}$ Гс со значением $\tilde{p}_F \approx 50$. Используя (18a), тогда получаем

$$\chi \equiv \chi_e \approx 2 \cdot 10^{-4}. \tag{31}$$

С другой стороны, согласно результату работы [14], при соответствующем значении концентрации нейтронов $n_n \sim 10^{38}$ см$^{-3}$ и таком же значении поля величина парамагнитной восприимчивости нейтронного газа, обусловленная наличием АММ у нейтрона, равна[1)]

$$\chi \equiv \chi_n \approx 2.3 \cdot 10^{-4}, \tag{32}$$

так что вклады электронного газа и нейтронного газа — величины одного порядка несмотря на значительно меньшую концентрацию электронов. Это, разумеется, относится лишь к значению поля порядка

[1)] При этом в соответствующей формуле следует взять уточненное значение $E_F^{(0)} \approx 40$ МэВ [14], в этой же формуле в русском варианте статьи из-за невнимательности автора при просмотре корректуры магнитная восприимчивость обозначена символом λ вместо χ, в переводном варианте это упущение исправлено; в нашей работе [14] сделаны замечания и по поводу других неточностей, допущенных в [10].

10^{17} Гс, когда мы считаем, что большинство электронов находятся на основном уровне, и игнорируем температурные поправки к χ_n [12] и χ_e (разд. 3), что вполне оправдано.

Оценим также вклад протонной компоненты в магнитную восприимчивость χ_p в сильном поле. Для этого заметим сначала, что условие «одномерного случая» (1) с учетом (10) вообще не содержит зависимости от массы и, следовательно, при условии равенства концентраций $n_p = n_e$ соответствующие формулы и оценки для χ_p в пренебрежении АММ протона получаются из формул и оценок для χ_e заменой $m_e \to m_p$. Учтем при этом, что

$$\tilde{p}_F^{(p)} = \tilde{p}_F^{(e)} \frac{m_e}{m_p} \approx 2.7 \cdot 10^{-2}, \tag{33}$$

так что протон при принятых значениях концентрации и поля является существенно нерелятивистским, и для оценки величины χ_p следует использовать выражение (17). Как видно,

$$\chi_p \equiv \chi_p^{(nr)} = \chi_e^{(nr)} \frac{m_e}{m_p}, \tag{34}$$

где $\chi_e^{(nr)}$ определяется выражением (17). Элементарное вычисление дает $\chi_p \sim 10^{-6}$, так что вкладом протонной компоненты в суммарную магнитную восприимчивость в сильном поле $\chi_{tot}^{(st)}$ в типичных условиях нейтронных звезд можно пренебречь (очевидно, учет АММ протона при спиновом парамагнетизме не меняет этого вывода). Таким образом, вещество нейтронной звезды в сильном поле порядка 10^{17} Гс является нелинейным ($d\chi/dB \neq 0$) парамагнетиком ($J > 0$) со значением магнитной восприимчивости

$$\chi_{tot}^{(st)} \approx \chi_e + \chi_n \sim 10^{-3}. \tag{35}$$

Очевидно также, что столь малое значение $\chi_{tot}^{(st)}$ не может иметь каких-либо существенных последствий для эволюции таких звезд.

Заметим, что условие (1) «одномерного случая» в принципе могло бы выполняться не только в экстремальных условиях нейтронных звезд, а также и в «обычной» ситуации. Например, для одновалентных металлов $n_e \sim 10^{23}$ см$^{-3}$ [1], а соответствующее значение критического поля $B_{cr} \sim 10^9$ Гс. К сожалению, насколько нам известно, такие поля в лабораторных условиях пока недостижимы и проверка аномальных свойств электронного газа на текущий момент представляется нереальной.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Общее число электронов можно найти, вычисляя сумму по всем квантовым состояниям от функции распределения:

$$N = \sum_k \frac{1}{\exp\dfrac{E_k - \mu}{T} + 1}. \tag{A.1}$$

Выполняя преобразование (6), получаем:

$$n_e \equiv \frac{N}{V} = \frac{1}{\pi^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \overline{F}(n) + \frac{1}{2}\overline{F}(0) \right\}, \tag{A.2}$$

$$\overline{F}(n) = \gamma \int_0^{\infty} \frac{dp_3}{\exp\dfrac{E_n - \mu}{T} + 1}. \tag{A.3}$$

Отсюда в нулевом приближении по температуре находим:

$$n_e = \frac{1}{2\pi^2 \lambda_C^3} \cdot 2\varepsilon \left\{ \sum_{n=1}^{E(y)} \tilde{F}(n) + \frac{1}{2}\tilde{F}(0) \right\}, \tag{A.4}$$

$$\tilde{F}(n) = \sqrt{2\varepsilon y - 2\varepsilon n}.$$

Здесь $E(y)$ — наибольшая целая часть y [4].

Далее следует воспользоваться приведенной в книге [2] модификацией формулы Эйлера–Маклорена:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{F}(n) + \frac{1}{2}\tilde{F}(0) = \int_0^{\infty} \tilde{F}(x)\, dx - \frac{1}{12}\tilde{F}'(0). \tag{A.5}$$

Условием применимости этого приближения, т. е. пренебрежением дискретностью, будет являться малость величины $|\tilde{F}(n+1) - \tilde{F}(n)|/\tilde{F}(n)$ для всех n в интервале суммирования в выражении для n_e. Как видно из структуры этого выражения, должно выполняться условие $2\varepsilon y \gg 2\varepsilon$, т. е. $z_{max}^{(0)} \gg \varepsilon$ (см. ниже (A.7). Кроме того, в предыдущей формуле подразумевается, что сумма и интеграл сходятся на верхнем пределе, при отсутствии же сходимости он должен быть достаточно большим, чтобы можно было пренебречь дискретностью при переходе от суммирования к интегрированию; мы имеем дело именно с этим последним случаем. Используя далее выражение (9) для y, заметим, что дискретная переменная n (в интеграле справа это x) входит в выражение для $\tilde{F}$ только в комбинации $2\varepsilon n (2\varepsilon x)$, так что в интеграле по x удобно сделать замену переменной $z = 2\varepsilon x$, при этом верхний предел будет равен $z_{max} = \tilde{E}_F^2 - 1$,

$\tilde{E}_F = E_F/m$. С учетом этого выражение для n_e принимает вид

$$n_e = \frac{1}{\pi^2 \lambda_C^3} \left\{ \frac{1}{2} \int\limits_0^{z_{max}} dz \sqrt{z_{max} - z} - \right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon^2}{6} \frac{d}{dz} \sqrt{z_{max} - z} \right|_{z=0} \Bigg\}, \quad \text{(A.6)}$$

или

$$\lambda_C^3 n_e = \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{3} z_{max}^{3/2} + \frac{\varepsilon^2}{12\sqrt{z_{max}}} \right\} =$$

$$= \frac{z_{max}^{3/2}}{3\pi^2} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{4 z_{max}^2} \right). \quad \text{(A.6a)}$$

Это выражение с точностью до ε^2 определяет значение z_{max}, равное

$$z_{max} = z_{max}^{(0)} \left[1 - \frac{1}{6} \left(\frac{\varepsilon}{z_{max}^{(0)}} \right)^2 \right], \quad \text{(A.7)}$$

$$z_{max}^{(0)} = (3\pi^2 n_e \lambda_C^3)^{2/3} \gg \varepsilon.$$

Отсюда находим с той же точностью для безразмерной релятивистской энергии Ферми:

$$\tilde{E}_F \approx \tilde{E}_F^{(0)} \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{12 \tilde{E}_F^{(0)} \left(\tilde{E}_F^{(0)^2} - 1 \right)} \right], \quad \text{(A.8)}$$

где

$$\tilde{E}_F^{(0)} \equiv \frac{E_F^{(0)}}{m} = \sqrt{1 + (3\pi^2 n_e \lambda_C^3)^{2/3}}$$

— обычное значение безразмерной релятивистской энергии Ферми в отсутствие поля. Отметим, кстати, что это выражение подтверждает вывод работ [4, 5] об уменьшении энергии Ферми с ростом поля, который был сделан на основании численных расчетов.

ПРИЛОЖЕНИЕ B

Найдем далее квадратичную по полю поправку к химическому потенциалу в сильном магнитном поле (1) $\mu_2 \sim T^2$. Для этого в выражении (A.3) сделаем замену переменной $p_3 \to K_n = E_n - m_n$, после чего оно приобретает вид

$$\overline{F}(n) = \gamma \int\limits_0^\infty \frac{dK_n (K_n + m_n)/\sqrt{K_n^2 + 2m_n K_n}}{\exp \dfrac{K_n - (\mu - m_n)}{T} + 1}. \quad \text{(B.1)}$$

Далее снова воспользуемся асимптотическим разложением по температуре (23). В нашем случае

$$\varepsilon \to K_n, \quad f \to \frac{K_n + m_n}{\sqrt{K_n^2 + 2m_n K_n}}, \quad \mu \to \mu - m_n.$$

При этом для нахождения точного по полю значению μ_2 следовало бы подставить выражение для $\overline{F}(n)$ в (A.2) и после выполнения суммирования найти μ_2 из условия независимости n_e от температуры. В наших же целях мы учитываем лишь вклад второго слагаемого в (A.2), т. е. полагаем $n = 0$. Тогда выражение (B.1) с учетом разложения самого химического потенциала по степеням температуры $\mu = \mu_0 + \mu_2 + \ldots$ приобретает вид

$$\overline{F}(0) = \overline{F}_0(0) + \overline{F}_T(0), \quad \text{(B.2)}$$

причем температурный вклад записывается как

$$\overline{F}_T(0) =$$

$$= \gamma \left\{ \frac{E_F \mu_2}{\sqrt{E_F^2 - m^2}} - \frac{\pi^2}{6} T^2 \frac{m^2}{(E_F^2 - m^2)^{3/2}} \right\}. \quad \text{(B.3)}$$

Концентрация не должна зависеть от температуры, поэтому $\overline{F}_T(0) = 0$, что определяет значение $\tilde{\mu}_2 \equiv \equiv \mu_2/m$:

$$\tilde{\mu}_2 = \frac{\pi^2}{6} \tilde{T}^2 \frac{1}{\tilde{E}_F \left(\tilde{E}_F^2 - 1 \right)},$$

$$\tilde{E}_F \equiv \frac{E_F}{m} = \sqrt{1 + \tilde{p}_F^2}, \quad \text{(B.4)}$$

где величина $\tilde{p}_F$ определяется выражением (10). Таким образом,

$$\tilde{\mu} \equiv \frac{\mu}{m} = E_F \left[1 + \frac{\pi^2}{6\tilde{p}_F^2} \left(\frac{\tilde{T}^2}{\tilde{E}_F} \right)^2 \right], \quad \text{(B.5)}$$

$$\tilde{p}_F = (3\pi^2 n_e \lambda_C^3)^{1/3}.$$

Как указано в книге [2], выражение (23) представляет собой асимптотический, а не сходящийся ряд. Таким образом, квадратичная поправка по температуре корректна только при условии сходимости ряда по $\tilde{T}$, что, по крайней мере, в квадратичном приближении накладывает ограничения на значения параметров в (B.5):

$$\frac{\pi^2}{6} \left(\frac{\tilde{T}}{\tilde{E}_F \tilde{p}_F} \right)^2 < 1. \quad \text{(B.6)}$$

Попытаемся дать объяснение положительного знака μ_2 из общих соображений. Сильное магнитное поле (1) ведет к фактически одномерному движению. В связи с этим найдем значение μ_2 в пространстве n измерений, для простоты обозначая число измерений пространства тем же символом, что и номер уровня Ландау. Очевидно, что полное число «электронов» в n-мерном пространстве равно

$$N = \Omega_n \Gamma_n \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{L_i}{2\pi}\right) \int_0^\infty \frac{p^{n-1}dp}{\exp\dfrac{E-\mu}{T}+1}, \qquad \text{(B.7)}$$

где Γ_n — спиновый статистический вес, Ω_n — полный угол в пространстве $n \geq 2$ измерений (см., например, [15]), причем по определению $\Omega_1 = 1$, L_i — нормировочные длины по осям, $E = \sqrt{m^2+p^2}$. Определяя «объем» пространства как

$$V = \prod_{i=1}^{n} L_i,$$

получаем для концентрации

$$n_e = \frac{\Omega_n \Gamma_n}{(2\pi)^n} I_n, \qquad I_n = \int_0^\infty \frac{p^{n-1}dp}{\exp\dfrac{E-\mu}{T}+1}. \qquad \text{(B.8)}$$

Делая опять замену переменной $p \to K = E - m$, получаем

$$I_n = \int_0^\infty \frac{dK(K+m)(K^2+2mK)^{(n-2)/2}}{\exp\dfrac{K-(\mu-m)}{T}+1}. \qquad \text{(B.9)}$$

Используя снова разложение по температуре (23), имеем с квадратичной точностью:

$$I_n = I_n^{(0)} + I_n^{(T)}, \qquad \text{(B.10)}$$

где

$$I_n^{(0)} = \frac{p_F^n}{n}. \qquad \text{(B.10a)}$$

С учетом (B.8) определяем значение импульса Ферми в n-мерном пространстве, который, таким образом, равен

$$p_F = 2\pi \left[\frac{n(n_e \lambda_C^n)}{\Omega_n \Gamma_n}\right]^{1/n} m, \qquad \text{(B.10b)}$$

а квадратичная по температуре часть имеет вид

$$I_n^{(T)} = E_F p_F^{n-2} \mu_2 + \frac{\pi^2}{6} T^2 \times p_F^{n-4} \left[(n-1)p_F^2 + (n-2)m^2\right]. \qquad \text{(B.10c)}$$

Из условия $I_n^{(T)} = 0$ находим

$$\mu_2 = -\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{T}{p_F}\right)^2 \left[(n-1)E_F - \frac{m^2}{E_F}\right]. \qquad \text{(B.11)}$$

Отсюда видно, что при $n = 1$ величина $\mu_2 > 0$ и совпадает с (B.4), а в пространстве с большим числом измерений $\mu_2 < 0$. В другом частном случае $n = 3$ результат совпадает с приведенной в работе [5] формулой, получающейся, в свою очередь, из релятивистских соотношений книги [3] при использовании упомянутого условия независимости концентрации от температуры (см. также [9]).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. В. Вонсовский, *Магнетизм*, Наука, Москва (1984).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика, т. V, Статистическая физика*, ч. 1, Физматлит, Москва (2005).
3. Г. С. Бисноватый-Коган, *Физические вопросы теории звездной эволюции*, Наука, Москва (1989).
4. В. В. Скобелев, ЖЭТФ **140**, 911 (2011).
5. В. В. Скобелев, ЖЭТФ **142**, 85 (2012).
6. Д. К. Надежин, Научная информация Астрон. совета АН СССР, вып. 32, 3 (1974).
7. A. T. Potter and C. A. Tout, arXiv:0911.3657 [astro-ph.SR].
8. R. C. Duncan and C. Tompson, Astron. J. **392**, L9 (1992).
9. L. Homorodean, Int. J. Mod. Phys. B **13**, 3133 (1999).
10. В. В. Скобелев, ЖЭТФ **138**, 1088 (2010).
11. В. В. Скобелев, ЖЭТФ **120**, 786 (2001).
12. S. Hamieh and H. Abbas, J. Mod. Phys. **3**, 184 (2012).
13. Debades Bandyopadhyay et al., Phys. Rev. D **58**, 121301 (1998).
14. В. В. Скобелев, ЖЭТФ **139**, 1039 (2011).
15. Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп*, Наука, Москва (1965).