

САМОИНДУЦИРОВАННАЯ ПРОЗРАЧНОСТЬ В ДИСПЕРСИОННОЙ СРЕДЕ

А. А. Заболотский*

*Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук
690090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 13 декабря 2011 г.

Изучается эволюция электромагнитного поля в двухуровневой среде, находящейся в матрице с конечным временем реакции. Приведен вывод интегрируемой версии уравнений Максвелла–Блоха с учетом нелинейной дисперсии. Для решения модели применяется аппарат метода обратной задачи рассеяния. Продемонстрировано, что нелинейная дисперсия, вызванная конечным временем реакции матрицы, дает новые возможности для контроля параметров солитона. Показано, что частный случай построенной модели может быть использован для описания импульсов в области параметров, находящейся между областью применимости квазимонохроматического приближения и областью применимости приближения однонаправленного распространения импульсов длительностью порядка периода осцилляций.

1. ВВЕДЕНИЕ

Самоиндуцированная прозрачность в двух-, трехуровневых атомных системах является одним из самых известных явлений, ассоциируемых с распространением когерентных импульсов, оптических солитонов [1–6]. В простейшем случае взаимодействие квазимонохроматического оптического поля с двухуровневой средой (ДУС) приводит к формированию импульса площадью 2π , который может распространяться с неизменной формой [1]. Такие импульсы, в особенности сверхкороткие, представляют интерес для многих приложений [6]. Современная техника генерации оптических импульсов позволяет генерировать фемтосекундные и субфемтосекундные импульсы [7–9]. Теоретические модели, используемые для описания эволюции таких импульсов света, должны учитывать нелинейные эффекты, связанные с уширением спектра, а также ограниченность применимости приближения медленных огибающих для таких импульсов [8]. В ряде работ приводятся модификации моделей динамики квазимонохроматического поля, в которых для выхода за рамки приближения медленных огибающих в обобщенные уравнения Максвелла

добавлены члены, описывающие вклад дополнительной линейной и нелинейной дисперсии [8, 10].

При укорочении импульса изменяются дисперсионные характеристики резонансной ДУС. Помимо этого, при уширении спектра импульса в общем случае необходимо учитывать эффекты, связанные с взаимодействием поля с матрицей, в которой находится ДУС. Эти эффекты могут проявляться в линейной и нелинейной дисперсиях системы.

Важнейшей характеристикой явления самоиндуцированной прозрачности является полная интегрируемость описывающих ее моделей, как простейших уравнений Максвелла–Блоха [2], так и их обобщений [4–6]. Применение метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) [11] к этим моделям позволяет получить наиболее детальную информацию об эволюции и параметрах импульсов электромагнитного поля, в том числе в сильно нелинейной стадии взаимодействия.

Целью настоящей работы является построение полностью интегрируемого обобщения уравнений Максвелла–Блоха, учитывающего дисперсию матрицы, в которой находится ДУС. В следующем разд. 2 приводится вывод уравнений основной модели. В разд. 3 дано представление нулевой кривизны модели и приведен ряд ее частных случаев. Аппарат МОЗР представлен в разд. 4 настоящей работы. В последнем разделе обсуждаются результаты и их возможное применение.

*E-mail: zabolotskii@iae.nsk.su

2. ВЫВОД ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА – БЛОХА

Стандартная модель, описывающая эволюцию электромагнитного поля в ДУС, представляет собой уравнения Максвелла – Блоха для медленных огибающих [1]. При выводе этих уравнений не учитывалась реакция матрицы, в которой находится ДУС. При уширении спектра импульса поля возможны резонансы с собственными частотами матрицы, запаздывание и другие эффекты, которые оказывают влияние на эволюцию импульсов поля. В этом разделе эффекты учтены в рамках простой общей модели, в которой влияние матрицы сводится к учету нелинейной дисперсии.

Так же как и в работах [1, 2], рассматриваем протяженную одномерную двухуровневую среду с невырожденным дипольным переходом. Однородное и неоднородное уширения не учитываем.

В рамках этих приближений уравнения Максвелла стандартным образом сводятся к уравнению

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi N}{c^2} \frac{\partial^2 P_{nl}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где N — плотность ДУС. Нелинейную поляризацию среды представим в виде

$$P_{nl}(x, t) = \int_0^t \epsilon(t') P_{TLS}(x, t - t') dt'. \quad (2)$$

Функция $\epsilon(t)$ описывает реакцию среды, эффект запаздывания. Для одиночной ДУС $P_{TLS} = d_{21}\rho_{12} + d_{12}\rho_{21}$, где $d_{12} = d_{21}^*$ — недиагональные элементы матрицы диполя d_{ij} . Постоянный дипольный момент ДУС не учитывается. Поскольку фаза d_{12} устраняется сдвигом фазы поля, считаем, что $d_{12} = d_{21}$.

Далее используем приближение медленных огибающих как для амплитуды поля и ДУС, так и для матрицы. Для этого представим поляризацию ДУС в виде

$$P_{TLS}(x, t) = \frac{1}{2} \left[\mathcal{P}(x, t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} + \mathcal{P}^*(x, t) e^{-i(k_0 x - \omega_0 t)} \right], \quad (3)$$

где $\mathcal{P}(x, t) = d_{21} S(x, t)$ — медленная огибающая, k_0 и ω_0 — соответственно несущий волновой вектор и частота. Полагаем, что ω_0 близка к собственной частоте ДУС. Здесь S — медленная огибающая недиагонального элемента матрицы плотности ρ_{ij} ДУС:

$$\rho_{12}(x, t) = \frac{1}{2} \left[S(x, t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} + S^*(x, t) e^{-i(k_0 x - \omega_0 t)} \right]. \quad (4)$$

Считаем, что время реакции τ_m матрицы сравнимо с длительностью импульса электромагнитного поля, но много больше периода осцилляций: $\tau_m \omega_0 \gg 1$. Поэтому пренебрегаем производными $(|\partial_t \epsilon|/\omega_0)^n$, так же как и производными $(|\partial_t \mathcal{P}|/\omega_0)^n$, для $n = 1, 2$. После этого применим преобразование Фурье к уравнению (1), предварительно подставив в это уравнение выражение (3). Затем разложим фурье-образ $\epsilon(\omega)$ вблизи ω_0 :

$$\epsilon(\omega) = \epsilon(\omega_0) + \left. \frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (5)$$

Применяя обратное преобразование Фурье к уравнению (1) с учетом разложения (5), получаем правую часть уравнения в виде

$$-\frac{4\pi N \omega_0^2 d_{12}}{c^2} \left[e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \sum_k i^k \varepsilon_k \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^k S(x, t) + e^{-i(k_0 x - \omega_0 t)} \sum_k i^k \tilde{\varepsilon}_k \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^k S^*(x, t) \right], \quad (6)$$

где

$$\varepsilon_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{\partial^k \epsilon(\omega)}{\partial \omega^k} \right|_{\omega=\omega_0}, \quad \tilde{\varepsilon}_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{\partial^k \epsilon(\omega)}{\partial \omega^k} \right|_{\omega=-\omega_0}. \quad (7)$$

Представим электромагнитное поле в виде двух волновых пакетов:

$$E(x, t) = \frac{1}{2} \times \left[\mathcal{E}(x, t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} + \mathcal{E}^*(x, t) e^{-i(k_0 x - \omega_0 t)} \right]. \quad (8)$$

Подставив выражение (8) в уравнение (1) и предполагая выполнение условия

$$\left| \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} \right| \ll k_0 \left| \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \right|, \quad (9)$$

получаем с учетом равенства $\omega_0 = ck_0$ левую часть уравнения (1) в виде

$$2i \left(\frac{\omega_0}{c^2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + k_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \right) e^{ik_0 x - i\omega_0 t} + \text{с.с.} \quad (10)$$

Далее, пренебрегая в (6) членами суммы с $k > 2$, в рамках приближения вращающейся волны получаем из (6) и (10) для волнового пакета с несущей частотой ω_0 следующее выражение:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = \frac{2\pi\omega_0^2 N d_{21}}{k_0 c^2} \left(i\varepsilon_0 S - \varepsilon_1 \frac{\partial S}{\partial t} - i\varepsilon_2 \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \right). \quad (11)$$

Уравнения Блоха для ДУС с невырожденным дипольным переходом имеют вид [1–3]

$$\partial_t \rho_{12} = -i\omega_{12} \rho_{12} - i(\rho_{11} - \rho_{22}) \frac{d_{12}}{\hbar} E, \quad (12)$$

$$\partial_t \rho_{11} = i \frac{d_{12}}{\hbar} E (\rho_{21} - \rho_{12}), \quad (13)$$

$$\partial_t \rho_{22} = i \frac{d_{12}}{\hbar} E (\rho_{12} - \rho_{21}), \quad (14)$$

где ω_{12} — частота перехода.

Подставив (4) и (8) в уравнения Блоха (12)–(14) и применив приближение вращающейся волны, получаем из уравнений (11)–(14) дисперсионные уравнения Максвелла–Блоха в безразмерном виде:

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = i\nu S - iUS_z, \quad (15)$$

$$\frac{\partial S_z}{\partial \tau} = i(US^* - U^*S), \quad (16)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \chi} = ir_0 S + r_1 \frac{\partial S}{\partial \tau} + ir_2 \frac{\partial^2 S}{\partial \tau^2}, \quad (17)$$

где $\tau = \omega_R t$, $\nu = (\omega_0 - \omega_{12})/\omega_R$, $S_z = \rho_{11} - \rho_{22}$,

$$U = \frac{d_{12} \mathcal{E}}{\hbar \omega_R}, \quad (18)$$

$$r_0 = \varepsilon_0, \quad r_1 = -\varepsilon_1 \omega_R, \quad r_2 = -\varepsilon_2 \omega_R^2, \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial \chi} = \frac{\hbar \omega_R^2}{2\pi d_{12}^2 \omega_0 N} \left(\frac{c}{\omega_R} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right). \quad (20)$$

Здесь ω_R — некоторая характерная частота, например, частота Раби $\omega_R = d_{12} \mathcal{E}_0 \hbar^{-1}$. Выбор \mathcal{E}_0 приведен в разд. 4.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ И ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА–БЛОХА

Система уравнений (15)–(17) интегрируема для любых действительных констант ν , r_0 , r_1 , r_2 , за исключением случаев обращения в нуль алгебраических выражений вида $f(\nu, r_0, r_1, r_2) = 0$,

см. ниже. Представление нулевой кривизны для ДУМБ (15)–(17) имеет вид

$$\partial_\tau \Phi = \begin{pmatrix} -i\lambda & \mu U \\ \tilde{\mu} U^* & i\lambda \end{pmatrix} \Phi, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \partial_\chi \Phi &= \hat{A}(\tau, \chi) \Phi = \\ &= \begin{pmatrix} ia_0 S_z & \mu(a_1 S + ir_2 \partial_\tau S) \\ \tilde{\mu}(a_1 S^* - ir_2 \partial_\tau S^*) & -ia_0 S_z \end{pmatrix} \Phi. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь

$$a_0 = \frac{r_0 - 2r_1 \lambda - 4r_2 \lambda^2}{2(\nu + 2\lambda)},$$

$$a_1 = \frac{r_0 + \nu r_1 + 2\nu r_2 \lambda}{\nu + 2\lambda},$$

$\Phi(\tau, \chi, \lambda)$ — 2×2 матрично-значная функция. Для случая $r_0 - \nu r_1 - \nu^2 r_2 \neq 0$ функции $\mu(\lambda)$ и $\tilde{\mu}(\lambda)$ — произвольные функции спектрального параметра λ , связанные условием

$$\mu(\lambda) \tilde{\mu}(\lambda) = -\frac{r_0 - 2\lambda r_1 - 4\lambda^2 r_2}{2(r_0 - \nu r_1 - \nu^2 r_2)}. \quad (23)$$

Рассмотрим частные интегрируемые случаи системы дисперсионных уравнений Максвелла–Блоха (15)–(17).

I. $r_1 = r_2 = 0$. Это классический вариант уравнений Максвелла–Блоха, интегрируемость которого показана Лэмом в 1971 г. [2]. Из условия (23) имеем

$$\mu = -\tilde{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (24)$$

Применение аппарата МОЗР для случая I ассоциируется со спектральной задачей Захарова–Шабата [11].

II. $r_2 = 0$. Этот интегрируемый вариант уравнений Максвелла–Блоха [12] ассоциирован с расширенной версией спектральной задачи Каупа–Ньюелла [13]. Для него находим из (23)

$$\mu = m_2(\eta - b_2), \quad \tilde{\mu} = m_2(\eta + b_2), \quad (25)$$

где $\lambda = \eta^2$, $m_2 = \sqrt{r_1/(r_0 + \nu r_1)}$, $b_2 = \sqrt{r_0}/\sqrt{2r_1}$.

III. $r_1 = 0$. Для этого случая получаем из (23)

$$\mu = m_3(\lambda - b_3), \quad \tilde{\mu} = m_3(\lambda + b_3), \quad (26)$$

где $m_3 = \sqrt{2r_2/(r_0 - \nu^2 r_2)}$, $b_3 = \sqrt{r_0}/\sqrt{4r_2}$. Спектральная задача, отвечающая (26), является обобщением спектральной задачи Вадати–Конно–Ишикавы (ВКИ) [14, 15].

Если положить $\nu = 0$, $r_1 = 0$ и дополнительно считать, что амплитуды \mathcal{E} и S являются действительными величинами, то случай III сводится к обобщенному уравнению синус-Гордона

$$\frac{\partial^2 \theta_F}{\partial \tau \partial \chi} = \sin \theta_F + r_2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \sin \theta_F, \quad (27)$$

где $U = \partial_\tau \theta_F$. Интегрируемость уравнения (27) была показана Фокасом в 1995 г. [16].

IV. Произвольные действительные r_0 , r_1 , r_2 , ν , такие что $r_2 \neq 0$, $r_0 - \nu r_1 - \nu^2 r_2 \neq 0$. В этом случае находим

$$\mu = m_4 (\lambda + b_-), \quad \tilde{\mu} = m_4 (\lambda + b_+), \quad (28)$$

где

$$b_{\mp} = \frac{r_1}{4r_2} \mp \frac{\sqrt{r_1^2 + 4r_0 r_2}}{4r_2}, \quad (29)$$

$$m_4^2 = \frac{2r_2}{r_0 - \nu r_1 - \nu^2 r_2}. \quad (30)$$

Аппарат МОЗР непосредственно для спектральной задачи ВКИ был развит Конно с соавторами [15]. В работе [17], в которой решалось уравнение (27), применялось калибровочное преобразование, позволившее свести задачу к решению спектральной задачи Захарова–Шабата. В настоящей работе используется подход к решению задачи с помощью МОЗР, отличающийся от использованных в работах [15] и [17]. Здесь применяется другая форма спектральной задачи. Однако, как и в работах [15, 17], решения, ассоциированные со спектральной задачей типа ВКИ получаются в общем случае в неявном параметрическом виде.

4. ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА МЕТОДА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

Симметрия функций Йоста определяется значениями физических параметров, входящих в выражения (29) и (30). Для разных свойств симметрии версии аппарата МОЗР различны. В этой работе рассмотрим один из вариантов, отвечающий следующему набору констант:

$$r_1 = 0, \quad r_2 < 0, \quad b_{\mp} = \pm i\beta = \mp i \frac{\sqrt{r_0}}{2\sqrt{|r_2|}}, \quad (31)$$

$$m_4^2 = -\frac{2|r_2|}{r_0 + \nu^2|r_2|} < 0.$$

Введем новую переменную T и новые функции $F(\chi, \tau)$ и $G(\chi, \tau) = \sqrt{1 - |F(\chi, \tau)|^2}$:

$$T = \int_0^\tau G(\chi, \tau') d\tau', \quad (32)$$

$$F = \frac{iU|m_4|}{\sqrt{1 + |Um_4|^2}}, \quad G = \frac{1}{\sqrt{1 + |Um_4|^2}}. \quad (33)$$

С учетом замен (32), (33) и значений параметров (31) перепишем спектральную задачу (21) в виде

$$\partial_T \Phi = \begin{pmatrix} -i\lambda G & (\lambda + i\beta)F \\ -(\lambda - i\beta)F^* & i\lambda G \end{pmatrix} \Phi = \hat{L}_0 \Phi. \quad (34)$$

Спектральную задачу (34) решаем на всей оси T для достаточно быстро затухающего на бесконечности потенциала F :

$$F(T, \chi) \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \pm\infty. \quad (35)$$

Полагаем, что блоховский вектор находится в основном устойчивом состоянии на бесконечности:

$$S(T, \chi) = 0, \quad S_z(T, \chi) = -1, \quad T \rightarrow \pm\infty. \quad (36)$$

Для действительной величины β решение спектральной задачи (34) обладает свойством инволюции:

$$\Phi = \widehat{M} \Phi(\lambda^*)^* \widehat{M}^{-1}, \quad (37)$$

где

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Функции Йоста имеют асимптотики

$$\Phi = \exp(-i\lambda\sigma_3 T), \quad \tau \rightarrow \pm\infty, \quad (39)$$

и с учетом (38) выражаются в виде

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & -\phi_2^{\pm*} \\ \phi_2 & \phi_1^{\pm*} \end{pmatrix}.$$

Эти решения связаны матрицей рассеяния $\hat{\mathcal{T}}$,

$$\Phi^- = \Phi^+ \hat{\mathcal{T}}, \quad (40)$$

которая имеет вид

$$\hat{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^* & \mathcal{B} \\ -\mathcal{B}^* & \mathcal{A} \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Используя представление функций Йоста в интегральном виде,

$$\begin{aligned} \Phi^+(T) &= e^{-i\lambda\sigma_3 T} + \\ &+ \int_T^\infty \begin{pmatrix} \lambda \mathcal{K}_1(T, s) & (\lambda + i\beta) \mathcal{K}_2(T, s) \\ -(\lambda - i\beta) \mathcal{K}_2^*(T, s) & \lambda \mathcal{K}_1^*(T, s) \end{pmatrix} \times \\ &\times e^{-i\lambda\sigma_3 s} ds, \quad (42) \end{aligned}$$

и подставив (42) в (34), получаем

$$\mathcal{K}_2(T, T) [1 + G] = F [1 - i\mathcal{K}_1(T, T)], \quad (43)$$

где $G = G(T, \chi)$, $F = F(T, \chi)$.

Из уравнения (43) и условия $G^2 + |F|^2 = 1$ находим, что

$$F(T) = \frac{2 [1 - i\mathcal{K}_1(T, T)] \mathcal{K}_2^*(T, T)}{[1 + i\mathcal{K}_1^*(T, T)] [1 - i\mathcal{K}_1(T, T)] + |\mathcal{K}_2(T, T)|^2}. \quad (44)$$

Подставляя компоненты функции (42) в (40) и интегрируя со следующими весами:

$$e^{-i\lambda y} [2\pi(\lambda - i\beta)]^{-1}, \quad e^{-i\lambda y} (2\pi\lambda)^{-1},$$

получаем уравнения Марченко для правого конца интервала:

$$\mathcal{K}_2^*(T, y) = \mathcal{F}_\beta(T + y) + i \int_T^\infty \mathcal{K}_1(T, s) \partial_y \mathcal{F}_\beta(s + y) ds, \quad (45)$$

$$\mathcal{K}_1^*(T, y) = i \int_T^\infty \mathcal{K}_2(T, s) (\beta - \partial_y) \mathcal{F}_0(s + y) ds. \quad (46)$$

Здесь

$$\mathcal{F}_\beta(y) = \int_{\mathcal{C}_1} \frac{\mathcal{B}(\chi)}{\mathcal{A}(\chi)} \frac{e^{-i\lambda y}}{2\pi(\lambda - i\beta)} d\lambda, \quad (47)$$

$\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_\beta(\beta = 0)$, \mathcal{C}_1 — контур, проходящий выше полюсов в верхней полуплоскости и вдоль действительной оси.

Найдем решение, отвечающее одному полюсу $\lambda_1 = i\eta$, $\eta > 0$, лежащему на мнимой оси. Перепишем ядро \mathcal{F} в виде

$$\mathcal{F}_\beta(y) = \frac{C_1(\chi) \exp(\eta y)}{\eta - \beta}, \quad (48)$$

где $C_1 = \mathcal{B}(\chi; \lambda_1) / \partial_\lambda \mathcal{A}(\chi; \lambda)|_{\lambda=\lambda_1}$.

Зависимость данных рассеяния от χ найдем, используя следующую формулу:

$$\partial_\chi \widehat{T} = -\widehat{T} e^{-i\sigma_3 \lambda T} \widehat{A}(T = -\infty, \chi) e^{i\sigma_3 \lambda T} + e^{-i\sigma_3 \lambda T} \widehat{A}(T = \infty, \chi) e^{i\sigma_3 \lambda T} \widehat{T}. \quad (49)$$

Здесь $\widehat{A}(T = \pm\infty, \chi)$ — асимптотика матрицы $\widehat{A}(T, \chi)$ (22), имеющая вид

$$\widehat{A}(T = \pm\infty, \chi) = \frac{1}{2(\nu + 2\lambda)} \times \begin{pmatrix} -i(r_0 + 4\lambda^2|r_2|) & 0 \\ 0 & i(r_0 + 4\lambda^2|r_2|) \end{pmatrix} \Phi. \quad (50)$$

Для выбранных начальных краевых условий находим

$$\gamma_1(\chi) = \gamma_0 \exp \left[\frac{i(r_0 + 4|r_2|\lambda^2)\chi}{2\lambda + \nu} \right], \quad (51)$$

где $\gamma_1 = C_1(\chi)/2\eta$, γ_0 — константа.

Решая уравнения Марченко (45), (46), находим однополюсное решение

$$F(\tau, \chi) = \frac{2\zeta_0 e^{ig_1 + i\psi_1} \operatorname{ch} \psi}{\operatorname{ch}^2 \psi + \zeta_0^2}, \quad (52)$$

$$G(\tau, \chi) = \frac{\operatorname{ch}^2 \psi - \zeta_0^2}{\operatorname{ch}^2 \psi + \zeta_0^2}, \quad (53)$$

где $\gamma_0 = e^{g_0 + ig_1}$, $g_0, g_1 \in \mathbb{R}$,

$$\psi = 2\eta \left(\int_0^\tau G(\tau', \chi) d\tau' + \frac{r_0 - 4|r_2|\eta^2}{\nu^2 + 4\eta^2} \chi \right) + g_0, \quad (54)$$

$$\psi_1 = \nu \frac{r_0 - 4|r_2|\eta^2}{\nu^2 + 4\eta^2} \chi, \quad (55)$$

$$\zeta_0 = \frac{\eta}{\eta - \beta}. \quad (56)$$

Это решение имеет параметрический вид, поскольку ψ — функция от

$$\int_0^\tau G(\tau', \chi) d\tau'.$$

Интегрируя (53), находим

$$\psi - \frac{2\zeta_0}{\sqrt{\zeta_0^2 - 1}} \operatorname{arcth} \left[\frac{\zeta_0}{\sqrt{\zeta_0^2 - 1}} \operatorname{th} \psi \right] = 2\eta [\tau - \tau_0(\chi)], \quad (57)$$

где τ_0 — константа интегрирования, зависящая от χ .

Численное решение (57) показало, что для $\zeta_{th}^2 < \zeta_0^2$, зависимость ψ от τ становится неоднозначной, см. рис. 1. Анализ уравнения (57) дает пороговое значение $\zeta_{th} = 1/3$.

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение дисперсионных уравнений Максвелла–Блоха, описывающее амплитуду солитона, имеет вид

$$U(\tau, \chi) = \frac{-2i\zeta_0 e^{ig_1 + i\psi_1} \operatorname{ch}(\psi(\tau, \chi))}{|m_4| [\operatorname{ch}^2(\psi(\tau, \chi)) - \zeta_0^2]}. \quad (58)$$

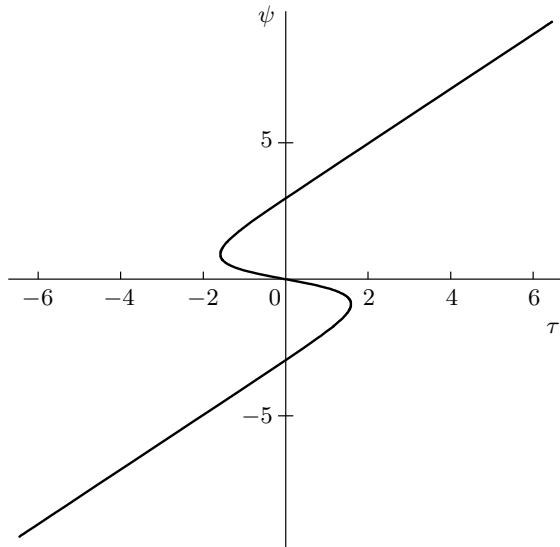


Рис. 1. График зависимости ψ от τ для $\zeta_0 = 0.7$

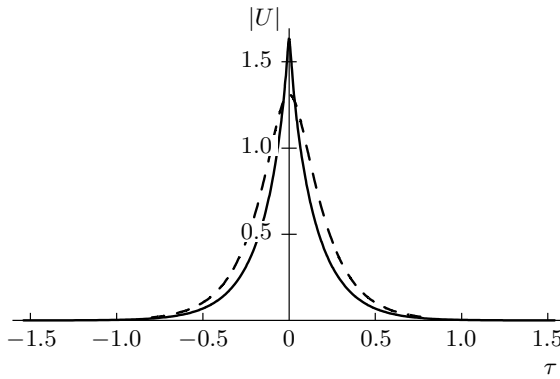


Рис. 2. График зависимости $|U|$ от τ для $\eta = 3$. Сплошная линия соответствует $\zeta_0 = 0.3$ ($|r_2| \approx 0.04r_0$), штриховой показана форма солитона для $\zeta_0 = 0.1$ ($|r_2| \approx 0.006r_0$)

Исследуем зависимость формы солитона от отношения $\delta = \sqrt{r_0}/\sqrt{4|r_2|}$. Пусть $\nu = 0$. Тогда для модуля амплитуды солитона получаем

$$|U(\tau, \chi)| = \frac{2\sqrt{2}\delta\eta(\eta + \delta) \operatorname{ch}(\psi(\tau, \chi))}{(\eta + \delta)^2 \operatorname{ch}^2(\psi(\tau, \chi)) - \eta^2}. \quad (59)$$

Это решение изображено на рис. 2 для разных значений параметра r_2 . Из рисунка видно, что с увеличением параметра r_2 вершина импульса заостряется и растет его амплитуда. При этом для больших η заострение вершины наблюдается при меньших r_2 .

С ростом δ , т. е. с уменьшением вклада дисперсии, амплитуда солитона принимает постоянное зна-

чение и его форма стремится к стандартному 2π -импульсу Маккола и Хана [1]. Это позволяет выбрать нормировку амплитуды поля \mathcal{E}_0 в (18).

Из этих результатов следует, что рост квадратичной нелинейной дисперсии ($|r_2| > r_0$) приводит к уменьшению размеров солитона при $\nu = 0$. С другой стороны, с увеличением ν амплитуда солитона растет по закону

$$\max |U(\tau, \chi)| \propto \sqrt{r_0 + \nu^2|r_2|}. \quad (60)$$

Такой рост возможен только в среде с нелинейной дисперсией, т. е. в рассмотренном примере для $r_2 \neq 0$. В рамках системы ДУМБ этот рост ограничен использованным при ее выводе приближением медленных огибающих, которое подразумевает выполнение условия $\omega_0 \gg \nu\omega_R$. Увеличение амплитуды солитона сопровождается уменьшением групповой скорости солитона, см. выражение для фазы (54).

Из полученных выше результатов следует, что учет дисперсии матрицы, в которую помещена ДУС, в некоторых случаях не только не вызывает диссипацию солитона, но приводит к формированию солитонов с большей энергией. Эти свойства матрицы могут быть использованы для контроля параметров солитона. В рассмотренном примере этот контроль может осуществляться изменением величины расстройки.

В дисперсионных уравнениях Максвелла–Блоха (15)–(17) учитывается дисперсия поляризации ДУС, но не учитывается линейная квадратичная дисперсия электромагнитного поля (ЛКДЭП), пропорциональная величине

$$\frac{1}{k_0} \frac{\partial^2 k_0(\omega)}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega=\omega_0} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \quad (61)$$

В линейном пределе для $\nu = 0$ дисперсия поляризации ДУС пропорциональна

$$\frac{Nd^2k_0}{\hbar} \frac{\partial^2 \epsilon(\omega)}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega=\omega_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t E dt. \quad (62)$$

Пусть $N = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $d = 10^{-18} \text{ СГСЕ}$, а временной масштаб изменения E — порядка $(\eta\omega_R)^{-1} \sim 10^{-13} \text{ с}$, т. е.

$$\int_0^t E dt \sim E(\eta\omega_R)^{-1}.$$

Пусть также

$$\frac{\partial^2 k_0(\omega)}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega=\omega_0} \sim \frac{\partial^2 \epsilon(\omega)}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega=\omega_0}. \quad (63)$$

Из формул (61)–(63) следует, что квадратичная дисперсия поляризации ДУС дает вклад, приблизительно в 10^2 раз больший, чем ЛКДЭП. С ростом плотности ДУС N это соотношение растет. Таким образом, для достаточно плотной ДУС ЛКДЭП можно пренебречь.

Отметим еще одну область применения системы ДУМБ. В уравнении (1) положим $\epsilon(t) = \delta(t)$, здесь $\delta(t)$ — дельта-функция, т. е. влияние матрицы не учитываем. Используем приближение (9) и приближение вращающейся волны в уравнениях (1) и уравнениях Блоха (12)–(14). Но при этом не применяем к этим уравнениям, в отличие от стандартного подхода, приближение медленных огибающих. Сдвинув спектральный параметр на константу, после простого калибровочного преобразования получаем систему уравнений, эквивалентную ДУМБ (15)–(17), в которой формально можно положить $r_0 = r_1 = 0$. Для этого случая выполняется условие совместности линейных систем (21) и (22) для

$$\mu = \lambda, \quad \tilde{\mu} = -\lambda. \quad (64)$$

Спектральная задача (21) в этом случае имеет вид

$$\partial_\tau \Phi = \lambda \begin{pmatrix} -i & W \\ -W^* & i \end{pmatrix} \Phi, \quad (65)$$

где $W = \sqrt{2}U/|\nu|$. Задача (65) совпадает со спектральной задачей ВКИ [14].

Как и выше, можно ввести переменную

$$T_H = \int_0^\tau S_3(\tau') d\tau'$$

и функции

$$S_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + |W|^2}}, \quad S = \frac{W}{\sqrt{1 + |W|^2}}.$$

В этом случае задача (65) принимает вид следующей спектральной задачи, применяемой при решении уравнений магнетика Гайзенберга (МГ) [11]:

$$\partial_T \Phi = \lambda \begin{pmatrix} -iS_3 & S \\ -S^* & iS_3 \end{pmatrix} \Phi. \quad (66)$$

Солитонные решения уравнений магнетика Гайзенберга, отвечающие дискретному спектру, хорошо известны [11]. Используя эти решения, с учетом замены фазы получаем солитонные решения нашей модели. В частности, решение, отвечающее одному полюсу $\lambda_1 = \xi_1 + i\eta_1$, $\eta_1, \xi_1 \in \mathbb{R}$, имеет вид

$$U = \frac{\sqrt{2}|\nu|S}{S_3}, \quad (67)$$

где

$$S(T, \chi) = -2\eta_1 \exp(ig_H) \frac{\eta_1 \operatorname{sh} \phi_H - i\xi_1 \operatorname{ch} \phi_H}{(\eta_1^2 + \xi_1^2) \operatorname{ch}^2 \phi_H}, \quad (68)$$

$$S_3(T, \chi) = 1 - \frac{2\eta_1^2}{(\eta_1^2 + \xi_1^2) \operatorname{ch}^2 \phi_H}, \quad (69)$$

$$\phi_H = 2\eta_1 \left[\int_0^\tau S_3(\tau') d\tau' - 4|r_2| \operatorname{Im} \Omega(\chi - \chi_0) \right], \quad (70)$$

$$g_H = \xi\tau - 4|r_2| \operatorname{Re} \Omega(\chi - \chi_1), \quad (71)$$

$\Omega = \lambda_1^2/(\nu + 2\lambda_1)$ и χ_0, χ_1 — действительные константы.

Построенное решение U не удается представить в явном виде. Отметим, что для $\eta < \xi$ решение не сингулярно. Решения, имеющие вид колоколообразных импульсов, как и решения в виде петель, возникают для определенных начальных условий, см. детальнее в работе [15].

Уравнения магнетика Гайзенберга имеют также простейшее солитонное решение в виде

$$S(T, \chi) = \operatorname{sch} \phi_H, \quad (72)$$

$$S_3(T, \chi) = -\operatorname{th} \phi_H. \quad (73)$$

Используя это решение, находим явное выражение для модуля U , имеющего вид кинка:

$$|U(\tau, \chi)| = \frac{|\nu|}{\sqrt{2(1 + \exp(2\phi_H))}}, \quad (74)$$

где

$$\phi_H = 2\eta_H \left[\tau - \frac{4|r_2|\eta_H^2}{\nu + 4\eta^2}(\chi - \chi_0) \right]. \quad (75)$$

Сравним вывод этого варианта ДУМБ со стандартным (см., например, в [3]), использующим приближение медленных огибающих. Приближение медленных амплитуд для электромагнитного поля отвечает условиям

$$\left| \frac{\partial E}{\partial t} \right| \ll \omega_0 |E|, \quad (76)$$

$$\left| \frac{\partial E}{\partial x} \right| \ll k_0 |E|. \quad (77)$$

Условие (9) всегда выполняется, если справедливы неравенства (76) и (77). В то же время обратное не справедливо в общем случае. Из условия (9) не

следуют неравенства (76) и (77). В этом смысле условие (9) слабее, чем условия (76) и (77). Приближение вращающейся волны подразумевает, что перекрытием волновых пакетов, локализованных вблизи $n\omega_0$ и $m\omega_0$, для целых $m \neq n$ можно пренебречь, т.е. спектральная полуширина пакета меньше ω_0 . Форма спектральной зависимости может быть такой, что перекрытие волновых пакетов пренебрежимо мало, но параметр $1/\tau_0$, где τ_0 — длительность импульса, порядка ω_0 . Таким образом, уравнения (15)–(17), в которых положено $r_0 = r_1 = 0$, могут быть использованы для описания генерации импульсов электромагнитного поля, как промежуточная модель, между моделью Максвелла–Блоха для квазимонохроматической волны и моделью эволюции импульсов поля без огибающей. Как известно, для вывода последней модели не используются ни приближение медленных огибающих, ни приближение вращающейся волны, но применяется приближение однонаправленного распространения импульсов (см., например, в обзорах [5, 6]). Решения, описывающие форму импульса электромагнитного поля в виде петель, очевидно, не имеют физического смысла. Подобные решения были найдены в модели Шафера–Вейна [18], которая применяется для описания слабых импульсов электромагнитного поля вне рамок приближения медленных огибающих. Применение аппарата МОЗР к этому уравнению также основывается на решении спектральной задачи ВКИ (65) [19]. С другой стороны, наличие петлевых решений может указывать на укрупнение фронта солитона и другие свойства волновых пакетов, например, на обрушение вершины импульса, аналогичное волнам на воде.

Автор благодарен А. И. Маймистову, обратившему его внимание на уравнение Шафера–Вейна.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. L. McCall and E. L. Hahn, Phys. Rev. Lett. **18**, 908 (1967).
2. G. L. Lamb, Rev. Mod. Phys. **43**, 99 (1971).
3. L. Allen and J. H. Eberly, *Optical Resonance and Two-level Atoms*, Dover Verlag (1987).
4. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1999).
5. A. A. Zabolotskii, Europ. Phys. J. Special Topics **173**, 193 (2009).
6. А. И. Маймистов, КЭ **40**, 745 (2010).
7. F. Krausz and M. Ivanov, Rev. Mod. Phys. **81**, 163 (2009).
8. T. Brabec and F. Krausz, Rev. Mod. Phys. **72**, 545 (2000).
9. O. D. Mücke, T. Tritschler, M. Wegener, U. Morgner, and F. X. Kartner, Phys. Rev. Lett. **87**, 057401 (2001).
10. P. Kinsler and G. H. C. New, Phys. Rev. A **69**, 013805 (2004).
11. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, Москва (1986).
12. A. A. Zabolotskii, Phys. Lett. A **124**, 500 (1987).
13. D. J. Kaup and A. C. Newell, J. Math. Phys. **19**, 798 (1978).
14. M. Wadati, K. Konno, and Y. H. Ichikawa, J. Phys. Soc. Jpn. **47**, 1698 (1979).
15. K. Konno, Y. W. Ichikawa, and M. Wadati, J. Phys. Soc. Jpn. **50**, 1025 (1981).
16. A. S. Fokas, Physica D **87**, 145 (1995).
17. J. Lenells and A. S. Fokas, J. Math. Phys. **51**, 023519 (2010).
18. T. Schäfer and C. E. Wayne, Physica D **196**, 90 (2004).
19. K. K. Victor, B. B. Thomas, and T. C. Kofane, J. Phys. A: Math. Theor. **40**, 5585 (2007).