

ФОРМИРОВАНИЕ КОРРЕЛИРОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ И УВЕЛИЧЕНИЕ ПРОЗРАЧНОСТИ БАРЬЕРА ПРИ НИЗКОЙ ЭНЕРГИИ ЧАСТИЦ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМАХ С ДЕМПФИРОВАНИЕМ И ФЛУКТУАЦИЯМИ

В. И. Высоцкий^{a,b}, С. В. Адаменко^b, М. В. Высоцкий^a*

^a *Киевский национальный университет им. Т. Шевченко
01601, Киев, Украина*

^b *Электродинамическая лаборатория «Протон-21»
02230, Киев, Украина*

Поступила в редакцию 12 декабря 2011 г.

Рассмотрены особенности формирования когерентного коррелированного состояния (ККС) частицы, находящейся в периодически модулированном гармоническом осцилляторе при наличии демпфирования и разных типов стохастического возмущения. Показано, что в отсутствие стохастического возмущения существует оптимальное соотношение между параметром демпфирования (коэффициентом затухания) и глубиной частотной модуляции, при котором «внешние» характеристики осциллятора (амплитуды «классического» колебания и импульса частицы) остаются неизменными, а коэффициент корреляции быстро возрастает от $|r| = 0$ до $|r|_{max} \approx 1$, что соответствует полному ККС. При неоптимальных условиях формирование ККС с одновременным возрастанием $|r|$ сопровождается затуханием или раскачкой осциллятора. Показано, что при определенном соотношении между коэффициентом затухания и глубиной модуляции наличие стохастической внешней силы, действующей на нестационарный осциллятор, не препятствует формированию ККС с $|r|_{max} \rightarrow 1$. Принципиально другой эффект имеет место при стохастическом влиянии на нестационарную частоту осциллятора: это влияние всегда ограничивает величину $|r|$ на уровне $|r|_{max} < 1$, а при неограниченном увеличении его интенсивности ККС невозможно и $|r|_{max} \rightarrow 0$. Рассмотрено влияние процесса формирования ККС на усредненную вероятность туннельного эффекта (прозрачность потенциального барьера) $\langle D \rangle$ для частицы, находящейся в осцилляторе с демпфированием как в отсутствие, так и при наличии случайной силы. На конкретном примере показано, что в обоих этих случаях возможно полное просветление потенциального барьера и увеличение прозрачности от начальной величины $\langle D_{r=0} \rangle = 10^{-80}$ до $\langle D \rangle \approx 1$ за сравнительно короткое время. Эти эффекты могут быть использованы для реализации высокоэффективного ядерного синтеза при малой энергии взаимодействующих частиц.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что наличие высокого и широкого кулоновского потенциального барьера является главным препятствием для осуществления эффективного ядерного синтеза при малой и средней энергии частиц. В работах [1–5] рассматривался метод формирования когерентного коррелированного состояния (ККС) частицы, который может быть использован для увеличения прозрачности потенциального барьера (вероятности туннельного эффек-

та) от очень малой величины $D \ll 1$ до $D \approx 1$ [3–5]. Уникальность этого метода состоит в том, что с помощью сравнительно простой процедуры формирования ККС за счет модуляции параметров потенциальной ямы, в которой находится эта частица, можно на много порядков увеличить как прозрачность ограничивающих эту яму барьеров, так и вероятность ядерной реакции с окружающими ядрами при любой малой исходной энергии частицы. Один из методов такой модуляции состоит в монотонном или периодическом изменении ширины ямы при неизменной высоте потенциального барьера. Физи-

*E-mail: vivvotskii@gmail.com

ческий механизм «просветления» барьера для ККС связан с синхронизацией и непрерывной (в случае монотонного изменения ширины ямы) или периодической (для периодического изменения этой ширины) фазировкой флуктуаций $\Delta \mathbf{p}_n(t)$ импульсов разных собственных состояний, образующих суперпозиционное ККС в данной квантовомеханической системе. Наглядной иллюстрацией специфики ККС является модифицированное соотношение неопределенностей Шредингера–Робертсона [1, 2, 6, 7] для произведения дисперсий координаты и импульса:

$$\sigma_q \sigma_{p_q} \geq \hbar^2/4(1 - r^2). \quad (1)$$

Оно соответствует ККС и отличается от «стандартного» соотношения неопределенностей Гейзенберга–Робертсона наличием коэффициента корреляции r :

$$r = \sigma_{qp_q} / \sqrt{\sigma_q \sigma_{p_q}}, \quad (2)$$

$$\sigma_{qp_q} = \frac{\langle \hat{q} \hat{p}_q + \hat{p}_q \hat{q} \rangle}{2} - \langle \hat{q} \rangle \langle \hat{p}_q \rangle, \quad -1 \leq r \leq 1,$$

связанного с антикоммутатором взаимных моментов $\langle \hat{q} \hat{p}_q \rangle$ и $\langle \hat{p}_q \hat{q} \rangle$ соответствующих операторов. С формальной точки зрения коррелированному состоянию соответствует замена постоянной Планка $\hbar \rightarrow \hbar^* \equiv \hbar / \sqrt{1 - r^2}$.

Формирование ККС с $|r| \rightarrow 1$ соответствует неограниченному возрастанию произведения дисперсий $\sigma_q \sigma_{p_q}$ в (1) и возможности монотонного или поочередного (подробности ниже) возрастания каждой из этих дисперсий, что неизбежно ведет к просветлению любого потенциального барьера.

В работах [3, 4] было строго показано, что формирование ККС увеличивает прозрачность барьера на много порядков. В частности, при исходной прозрачности барьера $D_{r=0} \approx 10^{-42}$ для обычного (некоррелированного) состояния частицы коэффициент прозрачности при увеличении коэффициента корреляции от $r = 0$ до $|r| \approx 0.99$ возрастает в 10^{40} и более раз. Подобные оценки также можно проводить на основе приближенной (не вполне строгой) аппроксимации [5] для зависимости вероятности туннельного эффекта от коэффициента корреляции $D_{r \neq 0} \approx (D_{r=0})^{\sqrt{1-r^2}}$, полученной в рамках метода ВКБ.

Корреляционный метод просветления потенциального барьера для частиц малой энергии принципиально отличается, например, от резонансного туннелирования, для реализации которого требуется, чтобы энергия падающей на ядро частицы была ограничена очень узким интервалом ΔE около опти-

мального значения E_{opt} [8, 9], совпадающего с энергией одного из пространственных резонансов E_{res} для этой же частицы в потенциальной яме ядра глубиной U . В частности, для реализации резонансного туннелирования при малой энергии частицы (для которой $D \leq 10^{-30} - 10^{-50}$) необходимо одновременное выполнение двух крайне маловероятных условий: $|\Delta E|/E_{opt} \leq D$ и $E_{opt} = E_{res} - U$.

В работах [1–5] было показано, что наиболее простой метод возбуждения коррелированного состояния частицы связан с нестационарной деформацией гармонического потенциала $V(x, t) = M\omega^2(t)x^2/2$, в поле которого находится эта частица. В симметричной нестационарной параболической потенциальной яме, для которой $\langle x \rangle = 0$, $\langle p_x \rangle = 0$, волновая функция суперпозиционного ККС частицы зависит от коэффициента корреляции и имеет вид [1–3]

$$\Psi_0(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} \times \exp \left[-\frac{x^2}{4\sigma_x} \left(1 - \frac{ir(t)}{\sqrt{1-r(t)^2}} \right) \right]. \quad (3)$$

Явный вид коэффициента корреляции

$$r = \text{Re} \left\{ \varepsilon^* \frac{d\varepsilon}{dt} \right\} \left| \varepsilon^* \frac{d\varepsilon}{dt} \right|^{-1} \quad (4)$$

и коэффициента сжатия k , определяющего отношение дисперсий координаты и импульса частицы,

$$k = \frac{\sigma_q}{\sigma_p} = \left| \frac{\varepsilon}{d\varepsilon/dt} \right|^2, \quad (4a)$$

а также величины дисперсий

$$\sigma_q \geq \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k}{1-r^2}}, \quad \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{1}{k(1-r^2)}} \quad (4b)$$

могут быть найдены на основе комплексного решения уравнения движения классического осциллятора с переменной частотой:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \omega^2(t)\varepsilon = 0, \quad (5)$$

при соответствующих начальных условиях:

$$\varepsilon(0) = 1, \quad \left. \frac{d\varepsilon}{dt} \right|_0 = i. \quad (6)$$

В уравнениях (4)–(6) и последующих соотношениях $\omega(t)$ — безразмерная частота, нормированная на ω_0 , t — безразмерное (нормированное на ω_0^{-1}) время, $\varepsilon = x/x_0$ — безразмерная комплексная координата частицы, $x_0 = \sqrt{\hbar/M\omega_0}$, $\omega_0 \equiv \omega(t=0)$ — частота

гармонического осциллятора в момент включения возмущения $t = 0$, M — приведенная масса частицы.

Возможность использования решения $\varepsilon(t)$ уравнения классического осциллятора (5) для нахождения коэффициента корреляции $r(t)$ [1–3], определяющего квантовые характеристики системы, связаны с теоремой Эренфеста, устанавливающей соотношения между классическими величинами и средними значениями этих же величин, полученных при квантовом рассмотрении. В работе [5] решение этого уравнения и соответствующий коэффициент корреляции находились из системы уравнений

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - \exp(-4\alpha) = -\omega^2(t),$$

$$\beta(t) = \int_0^t \exp\{-2\alpha(t')\} dt', \quad (7)$$

$$|r| = \sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \exp(4\alpha) \left\{1 + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \exp(4\alpha)\right\}^{-1}}, \quad (8)$$

которые можно получить после подстановки комплексной амплитуды

$$\varepsilon(t) = \exp(\varphi(t)), \quad \varphi(t) = \alpha(t) + i\beta(t), \quad (9)$$

в уравнения (4) и (5) и последующего выделения в них действительной и мнимой частей.

Результаты численного анализа [5] показали, что сильнокоррелированное состояние с $|r| \rightarrow 1$ может быть сформировано как при монотонном $\omega(t) = \exp(-t/\tau)$, так и при периодическом $\omega(t) = 1 + g_\Omega \cos \Omega t$ изменении нормированной частоты $\omega(t)$ осциллятора, в параболическом поле которого находится рассматриваемая частица. Здесь Ω и τ — частота модуляции и время убывания переменной частоты гармонического осциллятора, нормированные, соответственно, на ω_0 и ω_0^{-1} . В работе [5] было показано, что для формирования состояния с $|r| \rightarrow 1$ требуется достаточно длительное время. В частности, величина $|r| \geq 0.99$ при $\Omega = 1$ (в размерной форме $\Omega = \omega_0$) и $g_\Omega = 0.3$ достигалась к моменту времени $\tau_c \geq 40$ (в размерной форме при $\tau_c \geq 40/\omega_0$), а при $g_\Omega = 0.1$ то же условие $|r| \geq 0.99$ выполняется только при $\tau_c > 300$. Соответственно, при $\Omega = 2$ и $g_\Omega = 0.1$ значение $|r| \geq 0.99$ обеспечивается уже к моменту $\tau_c \geq 10$, а при $g_\Omega = 0.3$ к моменту времени $\tau_c \geq 3$.

Очевидно, что наличие внешнего (по отношению к осциллятору) случайного возмущения может нарушать фазовые соотношения между разными собственными состояниями и влиять на процесс формирования ККС, определяя как темп возрастания $|r(t)|$, так и величину $|r|_{max}$.

Другим фактором, очень сильно влияющим на процесс формирования ККС, является затухание осциллятора, не учтенное в исходном уравнении (5), но влияющее на $|r(t)|$.

Имеется еще одно очень важное обстоятельство, непосредственно связанное с практической реализацией и использованием ККС в прикладных задачах ядерной физики.

Результаты расчета, проведенные на основе анализа уравнения незатухающего нестационарного гармонического осциллятора (5) показали, что процесс формирования ККС с $|r| \rightarrow 1$ на основе монотонного убывания или периодического изменения частоты $\omega(t)$ этого осциллятора прямо связан с очень значительным возрастанием «классической» амплитуды его колебаний $\varepsilon(t)$. При монотонном убывании $\omega(t)$ возрастание $\varepsilon(t)$ соответствует многократному возрастанию ширины $L(t)$ параболической потенциальной ямы при неизменной высоте ее стенок V_{max} . Соответственно, при периодическом изменении частоты $\omega(t) = 1 + g_\Omega \cos \Omega t$ в небольших пределах ($|g_\Omega| \ll 1$) возрастание $|r|$ при неизменных значениях V_{max} и L связано с возрастанием амплитуды $\varepsilon(t)$, что соответствует переходу на более высокие уровни энергии, при которых могут проявляться эффекты ангармонизма, нарушающие процесс формирования ККС. Очевидно, что оба эти следствия накладывают жесткие ограничения на условия эксперимента и характеристики среды, где могут быть осуществлены такие процессы. Можно ли оптимизировать процесс формирования ККС таким образом, чтобы обеспечить условие $|r| \rightarrow 1$ без изменения итоговых характеристик потенциальной ямы (в частности — при фиксированных значениях V_{max} и L) и без увеличения средней энергии частицы в осцилляторе? Все эти вопросы рассмотрены ниже.

2. ВЛИЯНИЕ ЗАТУХАНИЯ И СЛУЧАЙНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ НА ПРОЦЕСС ФОРМИРОВАНИЯ КОГЕРЕНТНОГО КОРРЕЛИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЧАСТИЦЫ В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЯМЕ

Проблема нестационарной эволюции квантового осциллятора с затуханием детально рассматрива-

лась в обзоре [10]. Задача о параметрическом возбуждении нестационарного осциллятора с затуханием под действием последовательности упорядоченных δ -толчков (нестационарный аналог дельта-гребенки Дирака) рассматривалась в работах [11, 12].

Наиболее обоснованным методом учета затухания квантового осциллятора является введение термостата и применение аппарата матрицы плотности, что приводит к необходимости использования большого количества продольных T_{ij} и поперечных τ_{ij} времен релаксации, величины которых чаще всего находятся полумпирическим путем. Такой метод очень усложняет решение и делает его намного менее наглядным, если оставаться в рамках модели, близкой к классическому гармоническому осциллятору. С другой стороны, хорошо известно, что в классическом гармоническом осцилляторе затухание может быть учтено введением феноменологической силы торможения $\mathbf{F}_d = -2\gamma d\mathbf{q}/dt$ с единственным феноменологическим коэффициентом γ .

Приемлемой альтернативой методу матрицы плотности является моделирование феноменологического нестационарного квантовомеханического гамильтониана, из которого может быть получено уравнение движения, по форме соответствующего классическому осциллятору с затуханием. Такому условию соответствует гамильтониан Кальдиолы–Канаи (Caldirola–Kanai), который учитывает действие внешней силы $F(t)$ и феноменологической силы торможения \mathbf{F}_d на частицу, находящуюся в параболическом потенциале, и имеет вид

$$\hat{H}(\hat{x}, t) = \frac{\hat{p}_x^2}{2M} e^{-2\gamma t} + \frac{M\omega^2(t)\hat{x}^2}{2} e^{2\gamma t} - F(t)\hat{x}e^{2\gamma t}. \quad (10)$$

В (10) канонический (обобщенный) импульс \hat{p}_x связан с «физическим» импульсом $p_{(k)x} = M dx/dt$ соотношением $\hat{p}_x = \hat{p}_{(k)x} \exp(2\gamma t)$.

Этот гамильтониан является эрмитовым, его собственные значения являются действительными, а собственные функции — ограниченными и нормированными. Использование $\hat{H}(\hat{x}, t)$ в форме (10) не нарушает канонов квантовой механики. Этот гамильтониан был независимо предложен в работах [13, 14] для осциллятора с затуханием в случае постоянной частоты. Обоснованность использования такого гамильтониана для анализа систем с диссипацией при переменной частоте обсуждалась во многих работах (в частности, в [1, 2, 15–17]). Некоторые аспекты влияния флуктуаций на эволюцию систем, описываемых гамильтонианом Кальдиолы–Канаи (в

частности, броуновское движение и процессы в гармоническом осцилляторе), анализировались в работах [18–20]. Однако в этих работах не рассматривались процессы формирования ККС и возможность использования ККС для прикладных задач атомной и ядерной физики.

На основе гамильтониана $\hat{H}(t)$ с учетом общего правила построения уравнения движения для произвольного оператора \hat{L} ,

$$\frac{d\hat{L}}{dt} = \frac{\partial \hat{L}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [\hat{L}\hat{H}(t)],$$

можно получить уравнение движения для оператора координаты \hat{x} ,

$$\frac{d^2 \hat{x}}{dt^2} - \frac{1}{i\hbar} \frac{\partial}{\partial t} [\hat{x}\hat{H}(t)] + \frac{1}{\hbar^2} [[\hat{x}\hat{H}(t)]\hat{H}(t)] = 0,$$

которое приводит к безразмерному уравнению классического гармонического осциллятора с затуханием, произвольной внешней силой и необходимыми начальными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + 2\gamma \frac{d\varepsilon}{dt} + \omega^2(t)\varepsilon &= f(t), \quad \varepsilon(0) = 1, \\ \left. \frac{d\varepsilon}{dt} \right|_0 &= i, \quad \omega(0) = 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Это уравнение является очевидным обобщением уравнения (5).

В уравнении (11) и последующих соотношениях

$$f(t) = F(t)/\sqrt{\hbar M \omega_0^3}$$

— безразмерная внешняя (в том числе стохастическая) сила; γ — безразмерный коэффициент затухания, нормированный на ω_0 .

При отсутствии случайной силы и использовании замены (9) уравнение (11) преобразуется в два отдельных уравнения для действительных функций $\alpha(t)$ и $\beta(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + 2\gamma \frac{d\alpha}{dt} - \\ - \exp(-4\alpha - 4\gamma t) &= -\omega^2(t), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\beta(t) = \int_0^t \exp\{-2\alpha(t') - 2\gamma t'\} dt',$$

с начальными условиями

$$\varphi(0) = \alpha(0) = \beta(0) = 0, \quad \left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_0 = i,$$

$$\left. \frac{d\alpha}{dt} \right|_0 = 0, \quad \left. \frac{d\beta}{dt} \right|_0 = 1.$$

Решение системы (12) позволяет вычислить коэффициент корреляции (8) при наличии затухания и детерминированной переменной частоты $\omega(t)$.

При наличии случайной силы $f(t)$ такой метод является неэффективным. Это связано с тем, что в этом случае уравнение (11) преобразуется в систему двух неразделяющихся нелинейных стохастических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + 2\gamma\frac{d\alpha}{dt} &= \\ &= -\omega^2(t) + f(t)e^{-\alpha} \cos \beta, \quad (13) \\ \frac{d^2\beta}{dt^2} + 2\left(\frac{d\alpha}{dt} + \gamma\right)\frac{d\beta}{dt} &= -f(t)e^{-\alpha} \sin \beta, \end{aligned}$$

решения которой $\alpha(t, f(t))$ и $\beta(t, f(t))$ будут действительными случайными функциями, параметрически зависящими от случайной силы $f(t)$. Если удастся найти эти решения в явном виде, то можно найти итоговое значение для коэффициента корреляции, подставляя $\alpha(t, f(t))$ и $\beta(t, f(t))$ в соотношение (8), а затем проводя усреднение $|r(t, f(t))|$ по реализации случайной силы $f(t)$. К сожалению, явного решения (13) найти не удастся и нужно использовать разные приближения. Очевидно, что такой метод из-за сложности системы (13) крайне трудоемок и далек от оптимального.

Один из вариантов анализа эволюции осциллятора с затуханием и произвольным законом изменения частоты при наличии стохастической дельта-коррелированной силы на основе уравнения движения Гейзенберга–Ланжевена для оператора рождения был предложен в работе [21], посвященной эффекту Казимира в нестационарном резонаторе. Такой подход является достаточно универсальным, но требует решения ряда сложных математических проблем.

Для решения конкретной задачи о процессе формирования ККС в данной системе при наличии затухания, переменной частоты и стохастического воздействия мы использовали более простой метод анализа уравнения (11), связанный с преобразованием его в уравнения для соответствующих взаимных и смешанных моментов величин \hat{q} и \hat{p}_q (в безразмерном виде величин ε и $d\varepsilon/dt$), входящих в (2), с учетом корреляционных характеристик функции $f(t)$. Аналогичный метод также будет использован при наличии случайного возмущения переменной частоты осциллятора $\omega(t)$.

2.1. Формирование коррелированного состояния в нестационарном гармоническом осцилляторе с затуханием при наличии случайной внешней силы

Рассмотрим эволюцию нестационарного осциллятора с затуханием под действием случайной стационарной дельта-коррелированной силы $f(t)$ с характеристиками

$$\langle f(t) \rangle_f = 0, \quad \langle f(t_1)f(t_2) \rangle_f = 2S\delta(t_1 - t_2), \quad (14)$$

соответствующими усреднению по реализации случайной силы интенсивностью S .

Введем функции

$$\begin{aligned} \mu_{00} &= \varepsilon^*\varepsilon, \quad \mu_{01} = \varepsilon^*\frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (15) \\ \mu_{10} &= \frac{d\varepsilon^*}{dt}\varepsilon = \mu_{01}^*, \quad \mu_{11} = \frac{d\varepsilon^*}{dt}\frac{d\varepsilon}{dt}, \end{aligned}$$

включающие комбинации безразмерных координат и импульсов частицы. На основе этих функций будут рассчитаны смешанные $m_{ii} = \langle \mu_{ii} \rangle$ и взаимные $m_{i \neq j} = \langle \mu_{i \neq j} \rangle$ моменты величин ε и $d\varepsilon/dt$, соответствующих безразмерным координате и импульсу частицы, а также вычислен коэффициент корреляции (4).

Дифференцируя эти величины и заменяя производные $d^2\varepsilon/dt^2$ и $d^2\varepsilon^*/dt^2$ их значениями

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -2\gamma\frac{d\varepsilon}{dt} - \omega^2(t)\varepsilon + f(t), \quad (16a)$$

$$\frac{d^2\varepsilon^*}{dt^2} = -2\gamma\frac{d\varepsilon^*}{dt} - \omega^2(t)\varepsilon^* + f(t), \quad (16b)$$

следующими из уравнения (11), получаем систему связанных уравнений для величин μ_{ij} :

$$\frac{d\mu_{00}}{dt} = \mu_{01} + \mu_{10} \equiv \mu_{01} + \mu_{01}^*, \quad (17a)$$

$$\frac{d\mu_{01}}{dt} = \mu_{11} - 2\gamma\mu_{01} - \omega^2(t)\mu_{00} + \varepsilon^*f(t), \quad (17b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_{11}}{dt} &= -4\gamma\mu_{11} - \omega^2(t)\{\mu_{01} + \mu_{01}^*\} + \\ &+ \left\{ f(t)\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{d\varepsilon^*}{dt}f(t) \right\}. \quad (17c) \end{aligned}$$

Усредняя все компоненты этих уравнений по реализации случайной силы $f(t)$, приходим к уравнениям для моментов $m_{ij} = \langle \mu_{ij} \rangle_f$:

$$\frac{dm_{00}}{dt} = m_{01} + m_{01}^*, \quad (18a)$$

$$\frac{dm_{01}}{dt} = m_{11} - 2\gamma m_{01} - \omega^2(t)m_{00} + \langle \varepsilon^* f(t) \rangle_f, \quad (18b)$$

$$\begin{aligned} \frac{dm_{11}}{dt} = & -4\gamma m_{11} - \omega^2(t) \{m_{01} + m_{01}^*\} + \\ & + \left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} f(t) \right\rangle_f + \left\langle \frac{d\varepsilon^*}{dt} f(t) \right\rangle_f. \end{aligned} \quad (18c)$$

Для определения величин, находящихся в правой части уравнений (18b) и (18c), учтем, что решение исходного уравнения (11) определяется суммой полного решения однородного уравнения $c_1\varepsilon_1(t) + c_2\varepsilon_2(t)$ и частного решения неоднородного уравнения со случайной силой $f(t)$, которое может быть найдено методом вариации произвольной постоянной. Здесь $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$ — фундаментальные решения однородного уравнения.

В итоге решение $\varepsilon(t)$ уравнения (11) и соответствующее выражение для $\varepsilon^*(t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & c_1\varepsilon_1(t) + c_2\varepsilon_2(t) + \\ & + \int_0^t \{\varepsilon_1(t)\varepsilon_2(\theta) - \varepsilon_1(\theta)\varepsilon_2(t)\} f(\theta) d\theta \times \\ & \times \left\{ \varepsilon_1(\theta) \frac{d\varepsilon_2(\theta)}{d\theta} - \frac{d\varepsilon_1(\theta)}{d\theta} \varepsilon_2(\theta) \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^*(t) = & c_1^*\varepsilon_1^*(t) + c_2^*\varepsilon_2^*(t) + \\ & + \int_0^t \{\varepsilon_1^*(t)\varepsilon_2^*(\theta) - \varepsilon_1^*(\theta)\varepsilon_2^*(t)\} f(\theta) d\theta \times \\ & \times \left\{ \varepsilon_1^*(\theta) \frac{d\varepsilon_2^*(\theta)}{d\theta} - \frac{d\varepsilon_1^*(\theta)}{d\theta} \varepsilon_2^*(\theta) \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (19b)$$

Подставляя решения (19) в выражения

$$\langle \varepsilon^* f(t) \rangle_f, \left\langle f(t) \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle_f, \left\langle \frac{d\varepsilon^*}{dt} f(t) \right\rangle_f$$

и учитывая, что

$$\begin{aligned} \langle f(t) \rangle_f = 0, \quad \langle \varepsilon_{1,2} f(t) \rangle_f = 0, \\ \left\langle \frac{d\varepsilon_{1,2}}{dt} f(t) \right\rangle_f = 0, \\ \langle f(t) f(\theta) \rangle_f = 2S\delta(t - \theta), \end{aligned} \quad (20)$$

находим

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon^* f(t) \rangle_f = 0, \quad \left\langle f(t) \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle_f = S, \\ \left\langle \frac{d\varepsilon^*}{dt} f(t) \right\rangle_f = S. \end{aligned} \quad (21)$$

Окончательный вид системы уравнений для моментов m_{ij} имеет вид

$$\frac{dm_{00}}{dt} = m_{01} + m_{01}^*, \quad (22a)$$

$$\frac{dm_{01}}{dt} = m_{11} - 2\gamma m_{01} - \omega^2(t)m_{00}, \quad (22b)$$

$$\frac{dm_{11}}{dt} = -4\gamma m_{11} - \omega^2(t) \{m_{01} + m_{01}^*\} + 2S. \quad (22c)$$

Решения этой системы удовлетворяют начальным условиям для моментов

$$\begin{aligned} m_{00}(0) = 1, \quad m_{01}(0) = i, \\ m_{01}^*(0) = -i, \quad m_{11}(0) = 1, \end{aligned} \quad (23)$$

непосредственно следующим из начальных условий (5) для ε и $d\varepsilon/dt$.

Для случая действительных моментов $m_{ij}(t)$ система (22) имеет вид, аналогичный стохастическому неоднородному уравнению для осциллятора с действительной амплитудой $\varepsilon(t)$ [22]. В рассматриваемой задаче моменты $m_{i \neq j}(t)$ являются комплексными и уравнение из работы [22] принципиально неприемлемо.

При заданном законе изменения частоты осциллятора $\omega(t)$ может быть найдено решение системы уравнений (22) и определен коэффициент корреляции

$$r(t) = \frac{m_{01} + m_{10}}{2\sqrt{m_{00}m_{11}}} = \frac{m_{01} + m_{01}^*}{2\sqrt{m_{00}m_{11}}}. \quad (24)$$

С помощью (24), используя соотношение неопределенностей Шредингера–Робертсона (1) и волновую функцию ККС (3), можно рассчитать параметры флуктуации квантового осциллятора, а с помощью приближенного соотношения

$$D_{r \neq 0} \approx (D_{r=0})^{\sqrt{1-r^2}}$$

— оценить изменение прозрачности потенциально-го барьера. Исходя из данных предыдущей работы [5], задачу о формировании ККС будем решать с использованием оптимального метода, состоящего в периодической модуляции частоты осциллятора $\omega(t) = 1 + g_\Omega \cos \Omega t$ (в размерных единицах $\omega(t) = \omega_0(1 + g_\Omega \cos \Omega t)$) в узком интервале частот около ω_0 . При этом $|g_\Omega| \ll 1$.

В общем случае анализ системы уравнений (22) очень громоздкий, поскольку в этой системе имеются четыре независимо варьируемых параметра: частота Ω и глубина g_Ω модуляции, коэффициент затухания γ и интенсивность случайной силы S . Проведем этот анализ при разных комбинациях γ и S и

при фиксированных параметрах $g_\Omega = 0.1$ и $\Omega = 2$. Выбор конкретных значений g_Ω и Ω связан с тем, что согласно анализу [5] они обеспечивали быстрое достижение ККС в системе без затухания и флуктуаций.

Результаты вычислений нормированной амплитуды $\sqrt{m_{00}}$, нормированного импульса $\sqrt{m_{11}}$ и коэффициента корреляции $r(t)$ при формировании ККС рассматриваемой частицы при различных значениях коэффициента затухания в отсутствие случайной силы ($S = 0$) и при наличии периодической модуляции частоты осциллятора $\omega(t) = 1 + g_\Omega \cos \Omega t$ представлены на рис. 1.

Из полученных результатов видно, что в отсутствие случайной силы коэффициент корреляции возрастает ($|r| \rightarrow 1$) независимо от коэффициента затухания γ . С другой стороны, затухание очень сильно влияет на амплитуду колебаний и импульса. В частности, при малом затухании ($2\gamma < g_\Omega$) имеет место параметрическая раскачка осциллятора с неограниченным (в рамках справедливости системы уравнений (22)) возрастанием амплитуд координаты и импульса частицы, при $2\gamma = g_\Omega$ процесс формирования ККС соответствует неизменным значениям амплитуд колебаний и импульса, а при $2\gamma > g_\Omega$ имеет место затухание колебаний, которое по-прежнему сопровождается возрастанием коэффициента корреляции $|r| \rightarrow 1$.

Эти результаты были проверены и подтверждены методом численного моделирования в широком интервале значений 2γ и g_Ω . Результаты моделирования показали, что условие стабилизации параметров осциллятора $2\gamma \approx g_\Omega$ с одновременным возрастанием коэффициента корреляции является универсальным. Разница состоит только в том, что при синхронном уменьшении 2γ и g_Ω возрастает длительность τ_c формирования ККС. Расчеты показали, что время достижения состояния с $|r|_{max} \geq 0.98-0.99$ определяется следующими величинами: $\tau_c \approx 15, 30, 60, 300$ (в размерных единицах $\tau_c \approx 15/\omega_0, 30/\omega_0, 60/\omega_0, 300/\omega_0$) и, соответственно, $2\gamma = g_\Omega = 0.2, 0.1, 0.05, 0.01$.

Эти результаты при используемом для расчетов конкретном соотношении $\Omega = 2$ соответствуют линейной аппроксимации

$$\tau_c \approx 3/g_\Omega \approx 3/2\gamma. \quad (25)$$

Такой результат, приводящий к одновременному выполнению условий $m_{00}^{(max)} = \text{const}$, $m_{11}^{(max)} = \text{const}$, $|r| \rightarrow 1$, является близким к оптимальному, если решается задача формирования в данной системе ККС без увеличения средней энергии частицы.

Отметим еще одно обстоятельство. Рассматриваемый в данной работе метод формирования ККС при ограниченном периодическом изменении частоты осциллятора приводит к немонотонному изменению $|r(t)|$ при общей тенденции асимптотического возрастания $|r|_{max} \rightarrow 1$ и наличии периодически расположенных очень узких интерференционных минимумов, в пределах которых $r = 0$. Причина появления таких минимумов $|r(t)|$ связана с характером изменения величины r , которая является знакопеременной функцией времени и при возрастании t поочередно изменяется между значениями $r \approx 1$ и $r \approx -1$ в окрестности каждого из этих минимумов. Длительность этого скачкообразного перехода соответствует ширине конкретного минимума функции $|r|$. На рис. 2(a4) показана точная структура этих минимумов. С увеличением времени формирования ККС ширина этих минимумов и их весовая доля уменьшаются синхронно с увеличением $|r|_{max} \rightarrow 1$. Наличие этих минимумов не ограничивает использование ККС в прикладных задачах для увеличения прозрачности потенциальных барьеров. Соответствующий расчет будет приведен ниже.

Рассмотрим влияние на процесс формирования ККС случайной силы $f(t)$, действующей на частицу в той же системе с периодически изменяемой частотой. Из данных численного анализа, представленных на рис. 2, следует, что наличие случайной силы $f(t)$ очень существенно влияет на процесс формирования ККС (в том числе изменяя эффективность влияния затухания на этот процесс).

На рис. 2 (a1–a4) видно, что при малом коэффициенте затухания (при $2\gamma < g_\Omega$) наличие случайной силы существенно влияет на темп увеличения с течением времени как нормированной амплитуды колебаний $\sqrt{m_{00}}$, так и абсолютного значения коэффициента корреляции $|r(t)|_{max}$, но не влияет на итоговое значение $|r|_{max} \rightarrow 1$. Общая структура зависимости $|r(t)|$ в этом случае остается такой же, как в отсутствие случайной силы (см. рис. 1) — асимптотическое возрастание $|r|_{max}$ с чередованием очень узких интерференционных минимумов, в центре которых $|r|_{min} = 0$. «Тонкая» структура зависимости $|r(t)|$ в интервале между двумя такими минимумами представлена на рис. 2(a5). Ширина этих минимумов и их влияние на ККС (а значит, и влияние на процесс «просветления» потенциальных барьеров) быстро уменьшаются до пренебрежимо малых значений при увеличении длительности параметрической накачки осциллятора и сопутствующем возрастании $|r|_{max} \rightarrow 1$ за счет модуляции частоты.

При возрастании коэффициента затухания (при

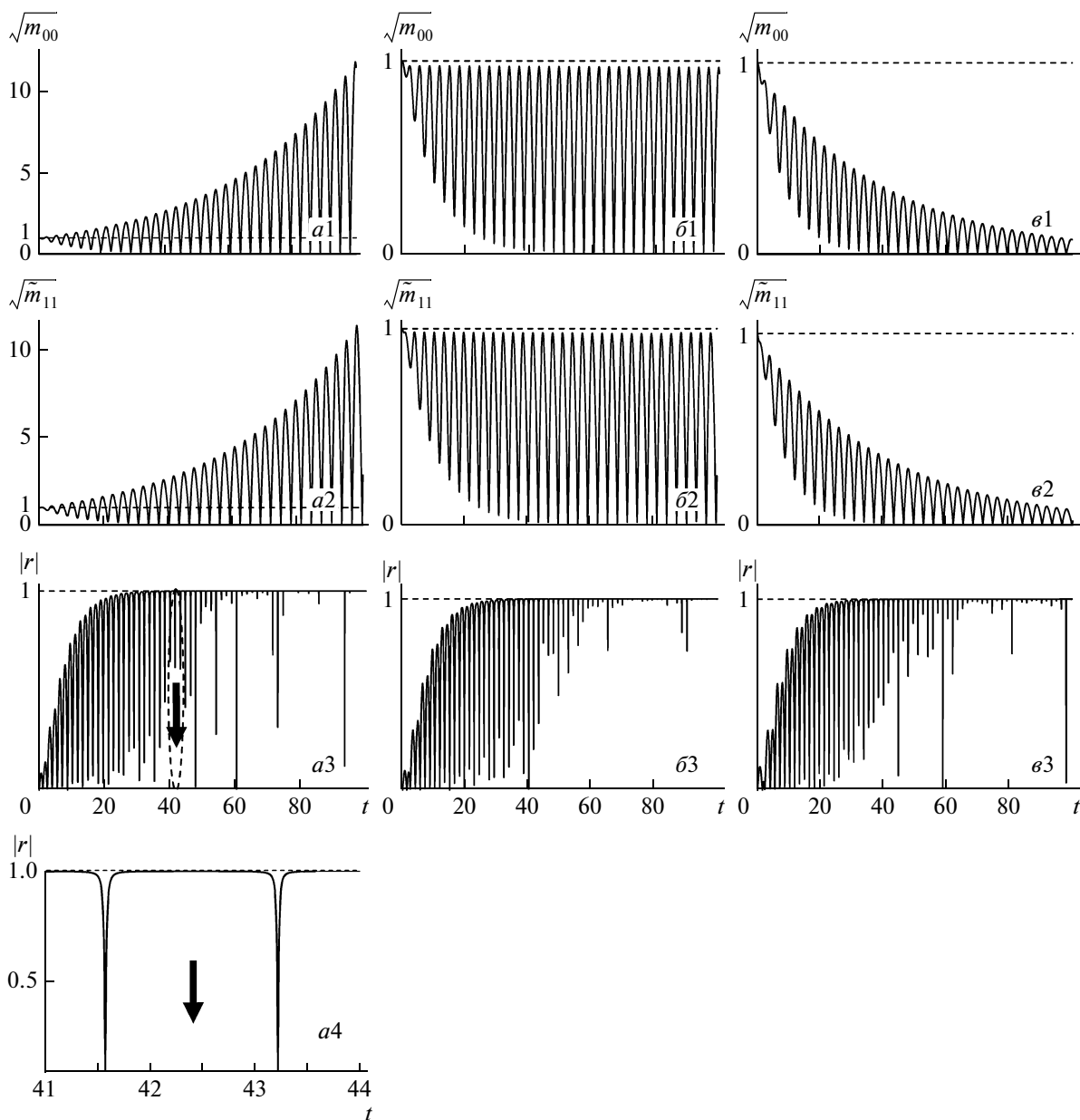


Рис. 1. Зависимости нормированной амплитуды $\sqrt{m_{00}}$ (1), нормированного импульса $\sqrt{\tilde{m}_{11}} \equiv \sqrt{m_{11}}/\omega_0$ (2) и модуля коэффициента корреляции $|r|$ (3) от времени (в единицах ω_0^{-1}) в отсутствие случайной силы $f(t)$ (при $S = 0$) при разных значениях коэффициента затухания γ : $2\gamma = 0.05 < g_\Omega$ (а), $2\gamma = 0.1 = g_\Omega$ (б), $2\gamma = 0.15 > g_\Omega$ (в). На рис. а4 представлен выделенный фрагмент графика а3

$2\gamma \geq g_\Omega$) наличие случайной силы влияет не только на темп изменения нормированных амплитуд колебаний $\sqrt{m_{00}}$ и импульса $\sqrt{\tilde{m}_{11}} \equiv \sqrt{m_{11}}/\omega_0$, но и на процесс возрастания $|r(t)|_{max}$. В этом случае предельное значение коэффициента корреляции ограничено величинами $|r_{max}| \approx 0.95$ при $2\gamma = g_\Omega$ (рис. 2б) и $|r_{max}| \approx 0.65$ при $2\gamma = 0.15 > g_\Omega$ (рис. 2в), которые не зависят от интенсивности S случайной силы $f(t)$.

Во всех рассмотренных случаях общий характер изменения амплитуды нормированного импульса $\sqrt{\tilde{m}_{11}} \equiv \sqrt{m_{11}}/\omega_0$ совпадает с аналогичным характером изменения амплитуды нормированной координаты $\sqrt{m_{00}}$, отличаясь только сдвигом фазы колебаний (эти данные не представлены на рис. 2 только из-за большого объема графической информации).

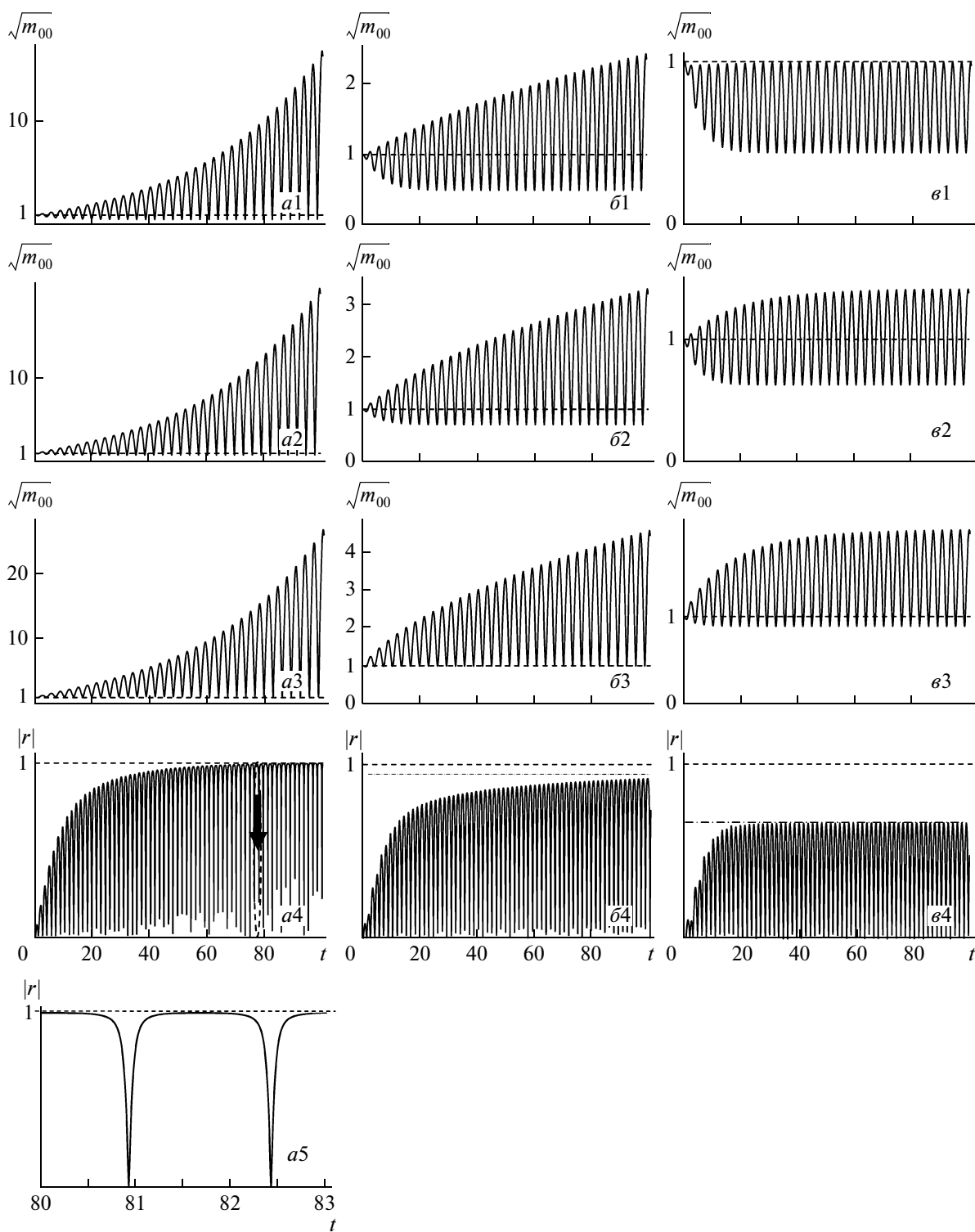


Рис. 2. Зависимости $\sqrt{m_{00}}$ (1, 2, 3) и $|r|$ (4) от времени (в единицах ω_0^{-1}) при разных значениях γ : $2\gamma = 0.05 < g_\Omega$ (а), $2\gamma = 0.1 = g_\Omega$ (б), $2\gamma = 0.15 > g_\Omega$ (е) и наличии случайной силы $f(t)$ с интенсивностью $S = 0.05$ (1), 0.1 (2), 0.2 (3). На рис. а5 представлен выделенный фрагмент графика а4

Можно отметить, что полученная нами система уравнений (22) для моментов m_{ij} при отсутствии случайной силы (при $f(t) = 0$) имеет вид, аналогичный системе уравнений (2.2), (2.3) из работы [23], посвященной анализу динамического эффекта Казимира в системе мод нестационарного резонатора, если сопоставить коэффициенты затухания для классического осциллятора и для реактивных компонент каждой моды поля, а также не учитывать связь между модами. Эти уравнения были получены в работе [23] другим методом — с помощью уравнения Фоккера–Планка для функции Вигнера, характеризующей компоненты электромагнитного поля в нестационарном резонаторе. Решение системы этих уравнений в работе [23] искалось (после исключения величин m_{00} и m_{11} и приведения системы уравнений к одному уравнению третьего порядка для момента m_{01}) методом медленно меняющихся амплитуд на основе выражения

$$m_{01}(t) = A(t) + B(t) \cos \Omega t + C(t) \sin \Omega t$$

с учетом малости индекса модуляции $|g_\Omega|$ и очень малого отклонения частоты модуляции от резонансного значения $\Omega = 2\omega_0$, что оказалось достаточным для анализа эффекта Казимира в резонаторе. Очевидно, что такой метод обоснован, если соответствующие амплитуды мало изменяются за время $1/\Omega$ и

$$\left| \frac{dA/dt}{A} \right| \ll \Omega, \quad \left| \frac{dB/dt}{B} \right| \ll \Omega, \quad \left| \frac{dC/dt}{C} \right| \ll \Omega.$$

Аналогичные требования необходимы при нахождении моментов m_{00} и m_{11} .

Сопоставление этих условий с полученными нами точными численными решениями системы (22), представленными на рис. 2 и соответствующими величине $g_\Omega = 0.1$, показывает, что эти условия заведомо не выполняются. Особенно наглядно это следует, например, из рис. 2(б1, б2, в1, в2, а5), на которых видно большое различие амплитуд соседних осцилляций, а сама структура каждой из осцилляций очень далека от простой комбинации $\cos \Omega t$ и $\sin \Omega t$. Аналогичные результаты следуют из рис. 1 и рис. 4. Следовательно, метод медленно меняющихся амплитуд не может быть использован для точного анализа процесса формирования коррелированного состояния.

3. ФОРМИРОВАНИЕ КОРРЕЛИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ГАРМОНИЧЕСКОМ ОСЦИЛЛЯТОРЕ С ЗАТУХАНИЕМ ПРИ ФЛУКТУАЦИИ ЧАСТОТЫ

Рассмотрим особенности формирования ККС при наличии другого типа стохастического возмущения — случайного воздействия на упорядоченно изменяемую частоту осциллятора.

Стохастическое уравнение

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + 2\gamma \frac{d\varepsilon}{dt} + \omega^2(t) (1 + \varphi(t)) \varepsilon = 0, \quad (26)$$

описывающее нестационарный гармонический осциллятор с модуляцией частоты случайным импульсным процессом $\varphi(t)$, может быть получено с использованием того же феноменологического гамильтониана (10) с равной нулю внешней силой ($F(t) = 0$).

Характеристики стационарного дельта-коррелированного возмущения $\varphi(t)$ соответствуют условиям

$$\langle \varphi(t) \rangle_\varphi = 0, \quad \langle \varphi(t) \varphi(\theta) \rangle_\varphi = 2K \delta(t - \theta). \quad (27)$$

Необходимо отметить, что вопрос об эволюции гармонического осциллятора при случайном воздействии на его частоту неоднократно рассматривался ранее (например, [24–27]). В работе [24] исследовались особенности осциллятора при флуктуационной модуляции постоянной частоты стационарным гауссовым шумом с равным нулю средним значением. В работах [25, 26] было рассмотрено влияние на стационарный классический и квантовый гармонический осциллятор случайного эргодического возмущения типа потенциала Кронига–Пенни с флуктуацией положения и параметров отдельных потенциальных ям. В статье [27] изучались особенности эволюции аналогичного стационарного гармонического осциллятора при воздействии случайного эргодического возмущения с равным нулю средним значением. Во всех этих работах затухание не учитывалось, а исходная (детерминированная) частота осциллятора была постоянной. Эти работы были посвящены изучению фундаментальных особенностей осциллятора без привязки к условиям возможного эксперимента и не были связаны с проблемой формирования ККС.

В рассматриваемом нами случае ситуация принципиально другая — использование нестационарной (периодически изменяемой) частоты осциллятора является необходимым условием формирования коррелированного состояния, а наличие затухания и случайного возмущения этой частоты являются предпосылками практической реализации.

Общая схема дальнейшего решения задачи при учете флуктуационного изменения переменной частоты аналогична рассмотренному выше случаю воздействия случайной силы на осциллятор.

Аналогично определению (5) введем функции

$$\begin{aligned} \mu_{00} &= \varepsilon^* \varepsilon, & \mu_{01} &= \varepsilon^* \frac{d\varepsilon}{dt}, \\ \mu_{10} &= \frac{d\varepsilon^*}{dt} \varepsilon = \mu_{01}^*, & \mu_{11} &= \frac{d\varepsilon^*}{dt} \frac{d\varepsilon}{dt}, \end{aligned}$$

усреднение которых по реализации случайного процесса $\varphi(t)$ позволяет определить необходимые взаимные и смешанные моменты и в итоге вычислить коэффициент корреляции. Дифференцируя эти величины и заменяя производные $d^2\varepsilon/dt^2$ и $d^2\varepsilon^*/dt^2$ их значениями

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} &= -2\gamma \frac{d\varepsilon}{dt} - \omega^2(t) (1 + \varphi(t)) \varepsilon, \\ \frac{d^2\varepsilon^*}{dt^2} &= -2\gamma \frac{d\varepsilon^*}{dt} - \omega^2(t) (1 + \varphi(t)) \varepsilon^*, \end{aligned}$$

следующими из исходного уравнения (25), получаем систему связанных уравнений для μ_{ij} :

$$\frac{d\mu_{00}}{dt} = \mu_{01} + \mu_{01}^*, \quad (28a)$$

$$\frac{d\mu_{01}}{dt} = \mu_{11} - 2\gamma\mu_{01} - \omega^2(t)\mu_{00} (1 + \varphi(t)), \quad (28b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_{11}}{dt} &= -4\gamma\mu_{11} - \omega^2(t) \{ \mu_{01} + \mu_{01}^* \} - \\ &\quad - \omega^2(t)\varphi(t) \{ \mu_{01} + \mu_{01}^* \}. \end{aligned} \quad (28c)$$

Уравнения для моментов $m_{ij} = \langle \mu_{ij} \rangle_\varphi$ могут быть найдены при покомпонентном усреднении всех уравнений этой системы по параметрам случайной модуляции $\varphi(t)$ и имеют вид

$$\frac{dm_{00}}{dt} = m_{01} + m_{01}^*, \quad (29a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dm_{01}}{dt} &= m_{11} - 2\gamma m_{01} - \omega^2(t)m_{00} - \\ &\quad - \omega^2(t) \langle \mu_{00}(t)\varphi(t) \rangle_\varphi, \end{aligned} \quad (29b)$$

$$\begin{aligned} \frac{dm_{11}}{dt} &= -4\gamma m_{11} - \omega^2(t) \{ m_{01} + m_{01}^* \} - \\ &\quad - \omega^2(t) \{ \langle \mu_{01}\varphi(t) \rangle_\varphi + \langle \mu_{01}^*\varphi(t) \rangle_\varphi \}. \end{aligned} \quad (29c)$$

Основная проблема при таком усреднении связана с необходимостью вычисления средних значений произведений двух типов: $\langle \mu_{00}(t)\varphi(t) \rangle_\varphi$ и $\langle \mu_{01}(t)\varphi(t) \rangle_\varphi$, $\langle \mu_{01}^*(t)\varphi(t) \rangle_\varphi$.

Первое усреднение проводится в последнем слагаемом (29b) и определяется статистической связью текущего значения произведения координат $\mu_{00}(t) = \varepsilon^*(t)\varepsilon(t)$ частицы в осцилляторе с мгновенным значением импульсного дельта-коррелированного возмущения $\varphi(t)$. Очевидно, что процесс изменения этих координат под действием возмущения является инерционным процессом, он протекает с запаздыванием (релаксацией) и учитывает действие большого количества аналогичных импульсов случайного возмущения во все предыдущие моменты времени. По этой причине воздействие конкретного случайного импульса возмущения $\varphi(t)$ на частоту модуляции не может приводить к мгновенному изменению $\mu_{00}(t)$, в результате чего имеет место факторизация произведения

$$\langle \mu_{00}(t)\varphi(t) \rangle_\varphi = \mu_{00}(t) \langle \varphi(t) \rangle_\varphi,$$

что ведет к итоговому результату $\langle \mu_{00}(t)\varphi(t) \rangle_\varphi = 0$ в уравнении (29b). Естественно, что этот результат соответствует только рассмотренному дельта-коррелированному процессу и может иметь место только тогда, когда реальная длительность каждого импульса возмущения $\varphi(t)$ будет значительно меньше характерного времени изменения амплитуды $\varepsilon(t)$.

Другая ситуация имеет место при нахождении выражений

$$\begin{aligned} \langle \mu_{01}\varphi(t) \rangle_\varphi &\equiv \left\langle \varepsilon \frac{d\varepsilon^*}{dt} \varphi(t) \right\rangle_\varphi, \\ \langle \mu_{01}^*\varphi(t) \rangle_\varphi &\equiv \left\langle \varepsilon^* \frac{d\varepsilon}{dt} \varphi(t) \right\rangle_\varphi \end{aligned} \quad (30)$$

в уравнении (29c). Скорость частицы $d\varepsilon(t)/dt$ (в отличие от ее координаты $\varepsilon(t)$) может быстро измениться под действием мгновенного возмущения, поэтому факторизация средних значений от произведений (30) невозможна. Для вычисления этих средних необходимо провести дополнительный анализ.

Для этого подставим в (30) выражения для соответствующих производных

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} &= -2\gamma \{ \varepsilon(t) - \varepsilon(0) \} - \\ &\quad - \int_0^t \omega^2(\theta) \{ 1 + \varphi(\theta) \} \varepsilon(\theta) d\theta, \end{aligned} \quad (31a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon^*(t)}{dt} &= -2\gamma \{ \varepsilon^*(t) - \varepsilon^*(0) \} - \\ &\quad - \int_0^t \omega^2(\theta) \{ 1 + \varphi(\theta) \} \varepsilon^*(\theta) d\theta, \end{aligned} \quad (31b)$$

найденных при почленном однократном интегрировании исходного уравнения (26).

Используя условия

$$\begin{aligned} \langle \varphi(t) \rangle_\varphi &= 0, \\ \langle \varphi(t)\varphi(\theta) \rangle_\varphi &= 2K\delta(t-\theta), \\ \langle \varepsilon(t)\varepsilon^*(t)\varphi(t) \rangle_\varphi &= 0, \quad \langle \varepsilon(t)\varepsilon^*(\theta)\varphi(t) \rangle_\varphi = 0, \quad (32) \\ \int_0^t F(\theta)\delta(t-\theta) d\theta &= \frac{F(t)}{2}, \end{aligned}$$

находим необходимые средние

$$\langle \mu_{01}\varphi(t) \rangle_\varphi \equiv \left\langle \varepsilon \frac{d\varepsilon^*}{dt} \varphi(t) \right\rangle_\varphi = -K\omega^2(t)m_{00}, \quad (33a)$$

$$\langle \mu_{01}^*\varphi(t) \rangle_\varphi \equiv \left\langle \varepsilon^* \frac{d\varepsilon}{dt} \varphi(t) \right\rangle_\varphi = -K\omega^2(t)m_{00}. \quad (33b)$$

Учитывая все промежуточные результаты, получаем из (29) окончательный вид системы уравнений для нахождения взаимных и смешанных моментов $m_{ij} = \langle \mu_{ij} \rangle$:

$$\frac{dm_{00}}{dt} = m_{01} + m_{01}^*, \quad (34a)$$

$$\frac{dm_{01}}{dt} = m_{11} - 2\gamma m_{01} - \omega^2(t)m_{00}, \quad (34b)$$

$$\begin{aligned} \frac{dm_{11}}{dt} &= -4\gamma m_{11} - \omega^2(t)\{m_{01} + m_{01}^*\} + \\ &+ 2K\omega^4(t)m_{00}, \quad (34c) \end{aligned}$$

описывающих эволюцию нестационарного гармонического осциллятора с флуктуацией частоты при наличии затухания.

Полученная система уравнений для моментов $m_{ij} = \langle \mu_{ij} \rangle$ в случае стационарной частоты ω_0 и действительных решений $\varepsilon = \varepsilon^*$ сводится к системе уравнений, полученных в работе [22] с использованием уравнения Фоккера–Планка. Отметим, что применение уравнения Фоккера–Планка в случае комплексных решений $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$, необходимых в данной задаче, связано с большими математическими трудностями, которых удалось избежать при альтернативном прямом усреднении системы (28).

Систему уравнений (34) для моментов будем решать при использовании того же закона ограниченной ($g_\Omega = 0.1$) периодической модуляции частоты осциллятора, $\omega(t) = 1 + g_\Omega \cos \Omega t$, с $\Omega = 2$ (в размерной форме $\Omega = 2\omega_0$), как в рассмотренном выше случае воздействия на осциллятор случайной силы.

На рис. 3 представлены результаты вычислений амплитуды координаты $\sqrt{m_{00}}$, амплитуды импульса $\sqrt{\tilde{m}_{11}} \equiv \sqrt{m_{11}}/\omega_0$ и коэффициента корреляции r

для контрольного случая влияния на стационарный осциллятор с затуханием только случайного воздействия $\varphi(t)$ (без упорядоченного изменения его частоты ω_0). Из результатов численного анализа следует, что при малом затухании (в безразмерных единицах при $2\gamma < K$) имеет место параметрическая раскачка осциллятора с возрастанием величин m_{00} , m_{11} и, естественно, увеличением средней нормированной энергии осциллятора. Соответственно, при $2\gamma = K$ имеет место стабилизация амплитуды колебаний и соответствующих амплитуд импульсов, а при $2\gamma > K$ происходит затухание колебаний с уменьшением импульсов. Эти результаты могут также быть получены прямо из анализа устойчивости системы уравнений первого порядка (34), если положить в ней $\omega(t) \equiv 1$ и преобразовать ее в уравнение третьего порядка для m_{ij} . Из приведенного численного анализа (см. рис. 3(a3, б3, в3)) следует, что при всех трех режимах в такой системе $|r| \approx 0$. Этот результат свидетельствует о невозможности формирования ККС за счет действия только случайной силы независимо от соотношения γ и K (см. рис. 3(a3, б3, в3)).

На рис. 4 представлено изменение амплитуды $\sqrt{m_{00}}$ и коэффициента корреляции r с течением времени в режиме периодического изменения частоты осциллятора при различных соотношениях между величиной коэффициента поглощения γ и интенсивностью K случайного процесса $\varphi(t)$.

Из сопоставления результатов расчета, представленных на рис. 3, 4, следует, что возрастание интенсивности K случайного процесса $\varphi(t)$ ведет к увеличению средней амплитуды колебаний осциллятора $\sqrt{m_{00}}$, которое при $2\gamma > K$ может компенсироваться наличием сильного затухания. Из данных, представленных на этих рисунках, видно, что увеличение интенсивности K случайного воздействия на частоту осциллятора приводит к быстрому уменьшению максимального значения коэффициента корреляции от величины $|r|_{max} \approx 1$ при $K = 0$ (соответствует данным, представленным на рис. 1) до $|r|_{max} \approx 0.72 \dots 0.68$, $|r|_{max} \approx 0.54 \dots 0.50$ и $|r|_{max} \approx 0.39 \dots 0.35$ соответственно при $K = 0.05$, $K = 0.1$ и $K = 0.2$.

Этот результат совпадает с ожидаемой тенденцией, поскольку увеличение интенсивности случайного воздействия приводит к нарушению оптимальных фазовых соотношений в системе, которые и определяют состояние корреляции. В то же время из полученных данных следует результат, который невозможно было предсказать заранее и который свидетельствует о том, что наличие случайного измене-

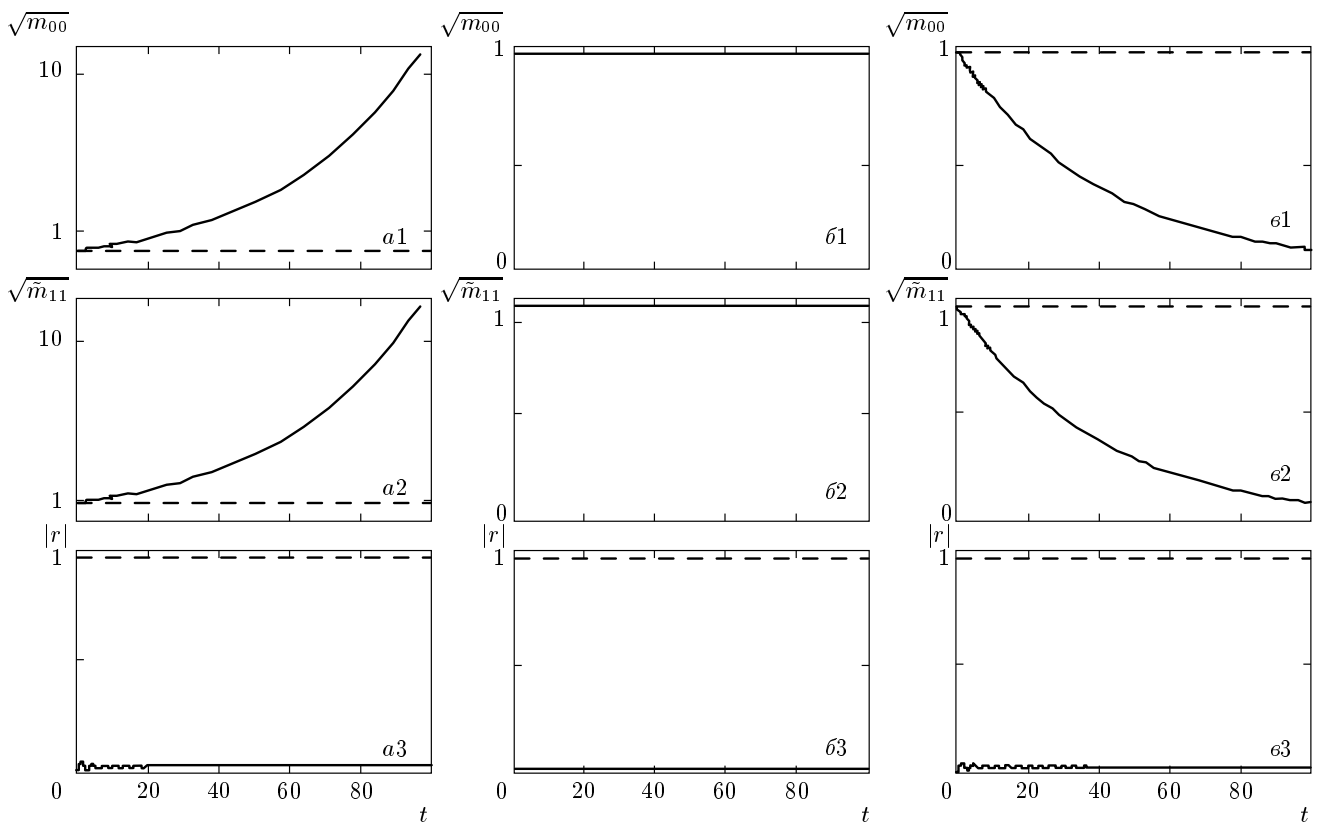


Рис. 3. Влияние флуктуаций постоянной частоты гармонического осциллятора ω_0 на зависимости $\sqrt{m_{00}}$ (1), $\sqrt{\tilde{m}_{11}} \equiv \sqrt{m_{11}}/\omega_0$ (2) и коэффициент корреляции $|r|$ (3) от времени t (в единицах ω_0^{-1}) при наличии функции $\varphi(t)$ случайного изменения частоты осциллятора с $K = 0.1$ и разных значениях коэффициента затухания γ : $2\gamma = 0.05$ (а), 0.1 (б), 0.15 (в)

ния переменной частоты не приводит (из-за накопления факторов стохастического возмущения динамики движения осциллятора) к полному разрушению частично коррелированного состояния, чему соответствует потенциально возможный результат

$$|r(K \neq 0, t \rightarrow \infty)|_{max} \rightarrow 0.$$

Полученные данные показывают, что в такой системе имеет место принципиально другое соотношение

$$|r(K \neq 0, t \rightarrow \infty)|_{max} \rightarrow \text{const} \neq 0,$$

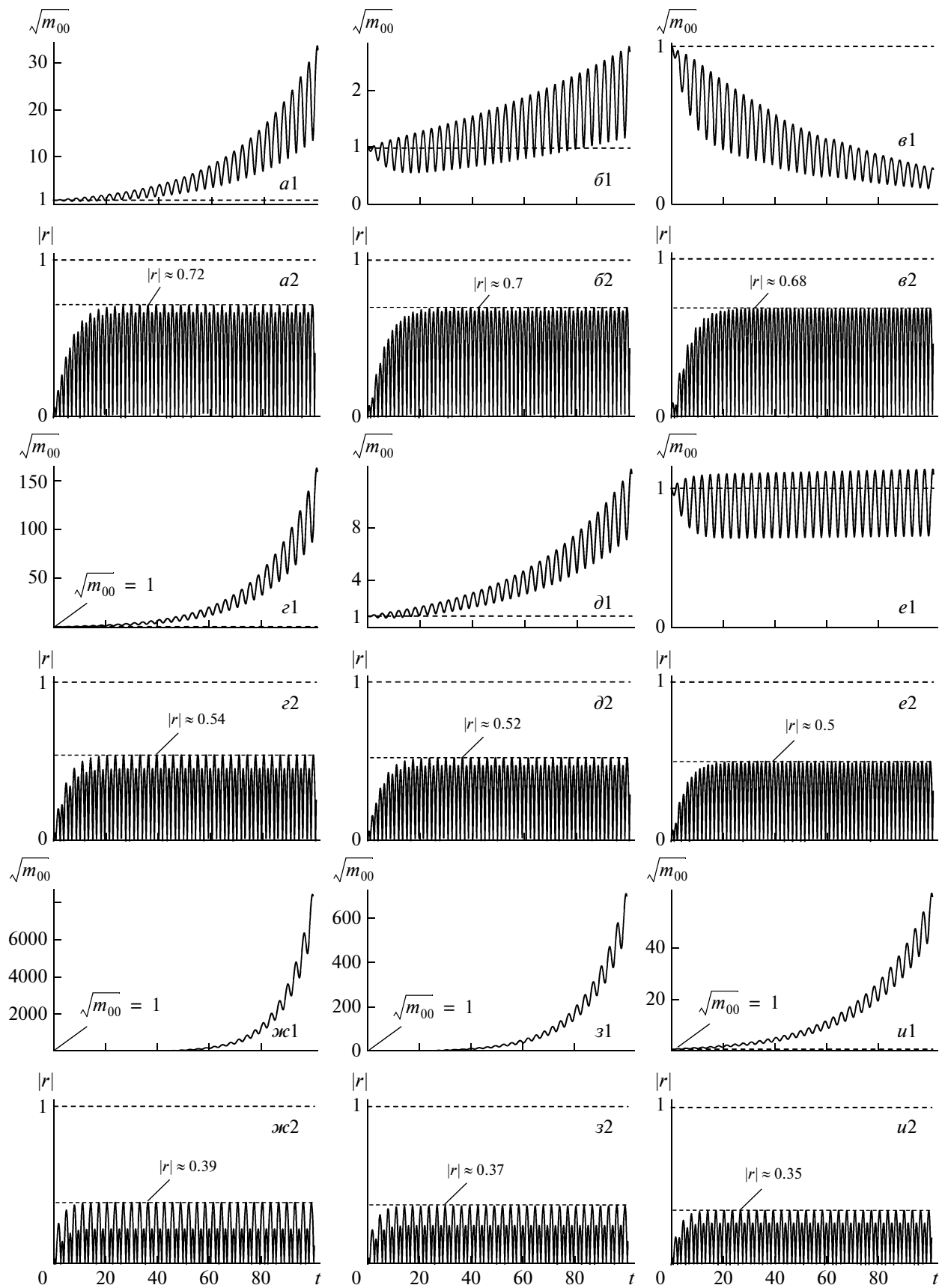
которое свидетельствует о том, что процесс возрастания степени корреляции за счет параметрической модуляции компенсирует (на определенном уровне) противоположный процесс — распад ККС за счет действия стохастического возмущения.

Из результатов, представленных на рис. 4 видно, что значение $|r|_{max}$ при случайном изменении переменной частоты слабо зависит от коэффициента затухания γ , хотя общая тенденция очевидна — возрастание γ в интервале значений $2\gamma = 0.05 \dots 0.15$

приводит к небольшому уменьшению $|r|_{max}$ в пределах указанных выше коридоров.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные выше результаты свидетельствуют о том, что наличие флуктуаций и затухания в системе квантового осциллятора может оказывать существенное влияние на процесс формирования ККС частицы при ограниченной (малой) периодической модуляции частоты осциллятора. Заметим, что такой метод формирования ККС является близким к оптимальному, поскольку в его рамках возможно достижение состояния, близкого к полной корреляции с $|r|_{max} = 1$ без существенного изменения «внешних» параметров системы (в частности, без увеличения размера осциллятора и изменения высоты потенциального барьера, ограничивающего движение частицы в параболическом поле). Рассмотренные выше режимы стохастического возмущения поз-



воляют сделать определенные выводы о возможности практической реализации ККС.

При отсутствии стохастического воздействия на осциллятор наиболее оптимальный режим (из числа рассмотренных выше) соответствует условию $2\gamma \approx g_\Omega$, определяющему оптимальные соотношения между коэффициентом затухания γ (параметром демпфирования квантового осциллятора) и глубиной модуляции (индексом модуляции) g_Ω частоты осциллятора $\omega(t) = 1 + g_\Omega \cos \Omega t$ (в размерных единицах $\omega(t) = \omega_0(1 + g_\Omega \cos \Omega t)$). При таком условии «наблюдаемые» параметры осциллятора (амплитуда колебаний и амплитудное значение импульса) остаются постоянными, а коэффициент корреляции («скрытый» параметр) стремится к предельному значению $|r|_{max} \rightarrow 1$. С учетом того, что коэффициент затухания γ , как правило, мал по сравнению со средней частотой осциллятора ω_0 , оптимальное условие $2\gamma \approx g_\Omega$ будет выполняться при малом (или очень малом) значении индекса частотной модуляции, $g_\Omega \ll 1$. При этом ККС со значением $|r| \geq 0.98-0.99$ будет формироваться к моменту времени $\tau_c \approx 3/g_\Omega \approx 3/2\gamma$ (25). Очевидно, что при проведении эксперимента на основе реального осциллятора с исходной частотой ω_0 и конкретным значением γ процесс оптимизации состоит в использовании конкретного механизма модуляции частоты со значением $g_\Omega \approx 2\gamma$.

Эффективность формирования ККС для прикладных задач можно оценить, вычислив изменение вероятности туннельного эффекта при изменении $|r(t)|$.

Вероятность туннелирования волнового пакета сквозь высокий барьер для «сжатого» (когерентного некоррелированного) состояния была рассмотрена в работе [28]. Другой предельный случай (туннелирование частицы, находящейся в состоянии, близком к полностью коррелированному с $|r(t)|_{max} \approx 0.98$, в область под параболическим барьером) был рассмотрен строгими методами квантовой механики в работе [3].

Следует отметить, что большое (близкое к предельному $|r(t)|_{max} \rightarrow 1$) текущее значение $|r(t)|$ еще не свидетельствует о максимальном просветле-

нии барьера в этот же момент времени. Исходя из выражений для дисперсий координаты и импульса (4b) и коэффициента сжатия (4a), можно сделать вывод, что максимальное значение $|r(t_n)| \rightarrow 1$ в определенные моменты времени t_n может сопровождаться, например, очень малым коэффициентом сжатия $k(t_n) \approx 0$, и это будет соответствовать очень малой дисперсии координаты и очень большой дисперсии импульса. Соответственно, через половину периода осцилляций величин m_{00} и m_{11} имеем $k(t_n + T/2) \rightarrow \infty$ и ситуация зеркально изменится, что будет соответствовать очень большой дисперсии координаты и большой вероятности туннельного эффекта. Наличие таких осцилляций связано с фазовыми соотношениями в гармоническом осцилляторе с периодическим изменением частоты.

Для качественного учета влияния таких особенностей на итоговую вероятность туннельного эффекта и соответствующие дисперсии можно провести локальное (в пределах каждого периода осцилляций) усреднение соответствующих текущих величин по времени. Для оценки усредненной вероятности можно, в частности, использовать приближенное соотношение $D_r \approx (D_{r=0})^{\sqrt{1-r^2}}$, полученное при ряде допущений в рамках метода ВКБ [3, 5]. Поскольку коэффициент корреляции $r(t)$ зависит от времени, величина D_r также будет зависеть от времени. Усредняя эту величину по нормированному периоду $T_0\omega_0 = 2\pi$ средней частоты осциллятора ω_0 , найдем итоговое выражение

$$\langle D_r \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{t-\pi}^{t+\pi} (D_{r=0})^{\sqrt{1-r^2(t)}} dt, \quad (35)$$

характеризующее монотонное изменение (увеличение) вероятности туннельного эффекта.

На рис. 5a представлены зависимости текущей D_r (осциллирующая функция) и усредненной $\langle D_r \rangle$ (монотонная, асимптотически возрастающая функция) вероятностей туннельного эффекта от длительности периодической модуляции частоты при отсутствии случайной силы, наличии затухания и выполнении оптимального условия $2\gamma = g_\Omega = 0.1$, соответствующего стабилизации «наблюдаемых» параметров осциллятора (см. рис. 1(б1,б2)). В расчете использована функция $|r(t)|$, представленная на рис. 1(б3). Видно, что при использовании приведенных параметров прозрачность барьера возрастает синхронно с возрастанием $|r(t)|_{max}$ от начального значения $D_{r=0} = 10^{-80}$ до величины $\langle D_{|r|\approx 1} \rangle \approx 1$ за сравнительно небольшое время $\tau_c \approx 70$ (в размерных единицах $\tau_c \approx 70/\omega_0$). Заметим, что начальная

Рис. 4. Зависимости $\sqrt{m_{00}}$ и $|r|$ от времени при разных значениях γ : $2\gamma = 0.05$ (а, г, ж), 0.1 (б, д, з), 0.15 (в, е, и), и наличии функции $\varphi(t)$ случайного изменения частоты осциллятора с интенсивностью $K = 0.05$ (а, б, в), 0.1 (г, д, е), 0.2 (ж, з, и)

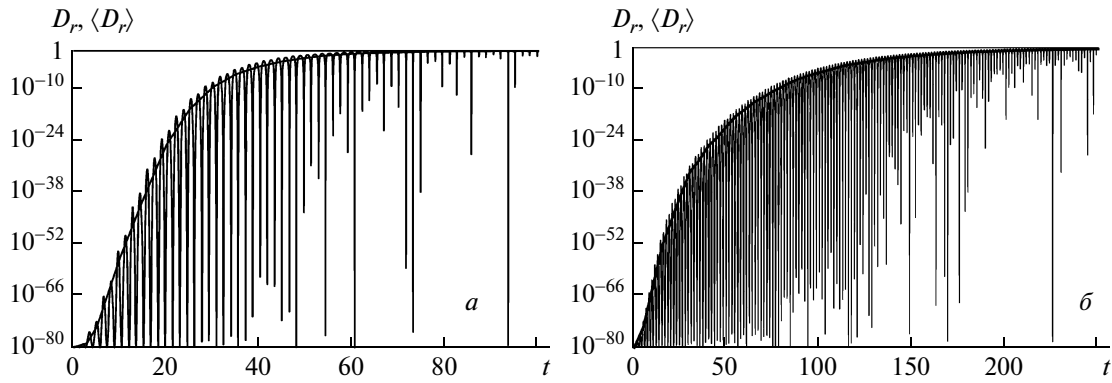


Рис. 5. Зависимости текущей D_r (осциллирующая функция) и усредненной $\langle D_r \rangle$ (монотонная функция) вероятностей туннельного эффекта от длительности периодической модуляции частоты в случаях: *а*) отсутствия случайной силы и наличия затухания с параметрами $2\gamma = g_\Omega = 0.1$, *б*) наличия случайной силы с интенсивностью $S = 0.05$ и затухания с $2\gamma = g_\Omega/2 = 0.05$. Начальные значения $D_{r=0}$ и $\langle D_{r=0} \rangle$ равны $D_{r=0} = \langle D_{r=0} \rangle = 10^{-80}$

(предельно малая) величина $D_{r=0}$ является типичной для вероятности туннельного эффекта в ядерных системах при низкой энергии заряженных частиц. Примерно такое значение $D_{r=0}$ соответствует, например, вероятности проникновения одного ядра в место расположения другого в молекуле дейтерия при комнатной температуре. Визуально график зависимости $\langle D_r \rangle$ почти совпадает с положениями максимумов зависимости D_r , однако разность между этими величинами достаточно велика, так как графики представлены в логарифмическом масштабе.

Мы также исследовали зависимость функции $\langle D_r \rangle$ от времени в отсутствие случайной силы, при наличии затухания и при выполнении условия $2\gamma < g_\Omega$, отличного от оптимального $2\gamma \approx g_\Omega$. Результаты прямого расчета при $2\gamma = g_\Omega/2$ и $2\gamma = g_\Omega/4$ показали, что вид функции $\langle D_r \rangle$ для оптимального и неоптимальных условий практически один и тот же (графики визуально неотличимы). Напомним, что оптимальное условие соответствует стабилизации «наблюдаемых» параметров осциллятора, т. е. постоянству амплитуд колебаний и значений импульса частицы с одновременным возрастанием коэффициента корреляции. Неоптимальному условию $2\gamma < g_\Omega$ соответствует возрастание амплитуд колебаний, т. е. раскачка осциллятора.

При воздействии на осциллятор с затуханием случайной силы интенсивностью S (14) оптимальным является случай слабого демпфирования с $2\gamma < g_\Omega$, для которого возможна реализация ККС с $|r|_{max} \rightarrow 1$ (см. рис. 2 (a1–a4)) и, соответственно, просветление потенциального барьера. При большем значении коэффициента затухания (при $2\gamma \geq g_\Omega$) наличие случайной силы приводит к уменьше-

нию максимально достижимого коэффициента корреляции до величины $|r|_{max} < 1$ и невозможности формирования полного ККС.

На рис. 5б представлены зависимости D_r и $\langle D_r \rangle$ от длительности периодической модуляции частоты осциллятора при учете действия случайной силы интенсивностью $S = 0.05$ при наличии затухания с коэффициентом, соответствующим условию $2\gamma = 0.05 < g_\Omega$. При анализе использована функция $|r(t)|$, аналогичная представленной на рис. 2(a4) и полученная при тех же значениях S и γ . Из полученных данных следует, что в этом случае прозрачность барьера возрастает от $D_{r=0} = 10^{-80}$ до $\langle D_{|r|\approx 1} \rangle \approx 1$ за время $\tau_c \approx 250$ (в размерных единицах $\tau_c \approx 250/\omega_0$).

При возрастании коэффициента затухания (при $2\gamma \geq g_\Omega$) наличие случайной силы ограничивает максимальное значение коэффициента корреляции на уровне $|r|_{max} < 1$.

Поскольку при анализе величин D_r и $\langle D_r \rangle$ использовалось достаточно грубое квазиклассическое приближение $D_r \approx (D_{r=0})^{\sqrt{1-r^2}}$ [5], реальное изменение этих величин может несколько отличаться от данных рис. 5. При этом общая тенденция очевидна — использование частотной параметрической накачки ведет к быстрому увеличению прозрачности барьера даже при наличии демпфирования (затухания) и внешнего стохастического воздействия.

Такие условия формирования ККС позволяют использовать этот эффект для увеличения на много порядков как прозрачности потенциального барьера, так и вероятности ядерного синтеза, в котором, например, одна из взаимодействующих частиц посредством такой накачки переводится в кор-

релированное состояние, а другая формирует высокий кулоновский барьер. Очевидно, что многие успешные эксперименты по реализации ядерных реакций при низкой энергии, не имеющие адекватного объяснения в рамках «стандартного» туннелирования, (в частности, эксперименты по ударному сжатию мишени [29] или эксперименты с использованием нестационарного разряда в плазме, нестационарного электролиза, стимулирующего периодического акустического, магнитного [30] или радиочастотного (СВЧ) [31] воздействия) могут быть связаны с автомоделным формированием ККС и соответствующим просветлением потенциального барьера. Очень важно, что такому очень существенному просветлению барьера в реальных экспериментах не может помешать даже действие случайных возмущений (например, соударений в газе или плазме), если их можно интерпретировать в рамках дельта-коррелированной импульсной случайной силы.

При наличии другого типа стохастического влияния (при случайной модуляции нестационарной частоты осциллятора) ситуация кардинально меняется — увеличение интенсивности K случайного воздействия на частоту осциллятора приводит к быстрому уменьшению максимального значения коэффициента корреляции при любом соотношении между коэффициентом затухания и глубиной модуляции.

В заключение отметим, что проведенный анализ по определению является неполным, поскольку учитывает изменение только двух независимо варьируемых параметров (коэффициента затухания γ и интенсивности случайного возмущения K), оставляя неизменными еще два независимых параметра — частоту Ω и глубину $g\Omega$ модуляции, влияние которых (в отсутствие стохастического возмущения и затухания) было исследовано ранее в работе [5]. Соответственно, все выводы относятся именно к этому случаю. При взаимном варьировании всех четырех параметров задача становится очень громоздкой, но ее решение может содержать дополнительные важные закономерности.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Додонов, В. И. Манько, Труды ФИАН **183**, 71 (1987).
2. В. В. Додонов, А. Б. Климов, В. И. Манько, Труды ФИАН **200**, 56 (1991).
3. В. И. Высоцкий, С. В. Адаменко, ЖТФ **80**(5), 23 (2010).
4. В. И. Высоцкий, С. В. Адаменко, М. В. Высоцкий, Поверхность № 4, 105 (2010).
5. В. И. Высоцкий, М. В. Высоцкий, С. В. Адаменко, ЖЭТФ **141**, 276 (2012).
6. E. Schrödinger, Ber. Kgl. Akad. Wiss. Berlin **24**, 296 (1930).
7. H. P. Robertson, Phys. Rev. A **35**, 667 (1930).
8. Д. Бом, *Квантовая теория*, Наука, Москва (1965).
9. Б. Н. Захарьев, В. Н. Чабанов, *Послушная квантовая механика*, РХД, Ижевск (2002).
10. H. Dekker, Phys. Rep. **80**, 1 (1981).
11. I. Averbukh, B. Sherman, and G. Kurizki, Phys. Rev. A **50**, 5301 (1994).
12. O. V. Man'ko, Nuovo Cimento B **111**, 1111 (1996).
13. P. Caldirola, Nuovo Cim. **18**(9), 393 (1941).
14. E. Kanai, Progr. Theor. Phys. **3**, 440 (1948).
15. R. W. Hasse, J. Math. Phys. **16**, 2005 (1975).
16. U. Weisse, *Quantum Dissipative System*, World Sci., Singapore (1993).
17. J. R. Choi and K. H. Yeon, Ann. Phys. **323**, 812 (2008).
18. G. J. Papadopoulos, J. Phys. A **6**, 1479 (1973).
19. И. Р. Свиньин, ТМФ **27**, 270 (1976).
20. R. Alicki and J. Messer, J. Phys. A **15**, 3543 (1982).
21. V. V. Dodonov, Phys. Rev. A **80**, 023814 (2009).
22. С. М. Рытов, *Введение в статистическую радиофизику, т. 1, Случайные процессы*, гл. V, Наука, Москва (1978).
23. V. V. Dodonov, Phys. Rev. A **58**, 4147 (1998).
24. B. R. Mollow, Phys. Rev. A **2**, 1477 (1970).
25. L. Ferrari, Phys. Rev. B **56**, 593 (1997).
26. L. Ferrari, Phys. Rev. A **57**, 2347 (1998).
27. J. Garnier, Phys. Rev. E **60**, 3676 (1999).
28. V. Dodonov, A. B. Klimov, and V. I. Man'ko, Phys. Lett. A **220**, 41 (1996).
29. *Controlled Nucleosynthesis. Breakthroughs in Experiment and Theory*, ed. by S. V. Adamenko, F. Selleri, and A. van der Merwe, Springer (2007).
30. T. Mizuno, T. Akimoto, A. Takahashi, and F. Celani, in *Proc. 11th ICCF Conf.*, World Sci., Singapore (2006), p. 312.
31. J. Michell, *Rossi's eCat*, Xecnet (2011).