ЖЭТФ, 2012, том 142, вып. 4 (10), стр. 824–828

НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ РЕАКЦИЯ–ДИФФУЗИЯ. АМПЛИТУДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Е. П. Земсков *

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Российской академии наук
119333, Москва, Россия

Поступила в редакцию 15 февраля 2012 г.

Рассматривается система типа реакция–диффузия с нелинейным диффузионным членом. В рамках нелинейного анализа получены амплитудные уравнения для случаев, когда система обнаруживает неустойчивости Хопфа и Тьюринга. Определены области структур Тьюринга при сверх- и подкритической видах неустойчивости для двухкомпонентной системы реакция–диффузия.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения реакция–диффузия математически описывают процессы формирования и распространения автоволн и образования диссипативных структур в неравновесных системах [1, 2]. Структуры в таких системах образуются при неустойчивости Тьюринга [3, 4] (Turing) в результате потери устойчивости основного состояния системы при достижении управляющим параметром некоторого критического значения. В окрестности критической точки для описания динамики системы вместо исходного реакционно-диффузионного формализма возможно использовать подход на основе так называемых амплитудных уравнений, получаемых в результате слабонелинейного анализа [4–8]. Во многих случаях [3, 9, 10] однако, коэффициент диффузии не является постоянной величиной. Это может иметь место, в частности, для некоторых химических систем, когда коэффициент зависит от концентраций участвующих в реакции реагентов [3, 11, 12]. Поскольку неустойчивость Тьюринга является диффузионной неустойчивостью, представляется интересным исследовать влияние различных зависимостей коэффициентов диффузии на такую бифуркацию. Целью настоящей работы является применение слабонелинейного анализа систем реакция–диффузия [5] к моделям с нелинейным диффузионным членом [11]. Для простоты и определенности в работе будет использована линейная зависимость коэффициента диффузии от концентрации. Данное исследование представляет собой продолжение работы [13]. Таким образом, рассматриваемая реакционно-диффузионная система описывается следующим векторным уравнением:

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{Z}) + \frac{\partial}{\partial r}\left[(\mathbf{D} + \mathbf{QZ})\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial r}\right]. \qquad (1)$$

Здесь n-мерные векторы $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{F}$ обозначают соответственно концентрации компонент и реакционные функции, а $\mathbf{D} + \mathbf{QZ}$ представляет собой матрицу коэффициентов диффузии, в которой $\mathbf{D}$ и $\mathbf{Q}$ считаются постоянными величинами.

Амплитудное уравнение, получающееся в результате слабонелинейного анализа системы (1), имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial T} = \eta W + g|W|^2 W + \mathcal{D}\frac{\partial^2 W}{\partial R^2}, \qquad (2)$$

в котором функция $W = W(T, R)$ является комплексной амплитудой. В работе будут вычислены коэффициенты η, g и $\mathcal{D}$ в случае, когда система обнаруживает неустойчивость Хопфа (Hopf) или Тьюринга [3, 4].

2. СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ

При слабонелинейном анализе вводится отклонение (возмущение) $\mathbf{X} = \mathbf{Z} - \mathbf{Z}_0$ от положения равновесия $\mathbf{Z}_0$, удовлетворяющего уравнению $\mathbf{F}(\mathbf{Z}_0) = 0$. При этом система (1) может быть разложена в ряд следующим образом:

*E-mail: zemskov@ccas.ru, e.p.zemskov@gmail.com

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \mathbf{LX} + \mathbf{MXX} + \mathbf{NXXX} + \\ + \mathbf{Q}\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial r}\right)^2 + \mathbf{QX}\frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial r^2}, \quad (3)$$

где в разложении удержаны члены до третьего порядка включительно. В линейном операторе

$$\mathbf{L} = \mathbf{J} + (\mathbf{D} + \mathbf{QZ}_0)\frac{\partial^2}{\partial r^2} \equiv \mathbf{J} + \hat{\mathbf{D}}\frac{\partial^2}{\partial r^2} \quad (4)$$

матрица $\mathbf{J}$ представляет собой якобиан. Квадратичный $\mathbf{MXX}$ (гессиан) и кубичный $\mathbf{NXXX}$ члены имеют вид [5]

$$(\mathbf{MXX})_m = \frac{1}{2!}\sum_{p,q=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 F_m(\mathbf{Z})}{\partial Z_p \partial Z_q}\right|_{\mathbf{Z}=\mathbf{Z}_0} X_p X_q, \\ p,q,m = 1,2,\ldots,n, \quad (5)$$

$$(\mathbf{NXXX})_m = \frac{1}{3!}\sum_{p,q,s=1}^{n} \left.\frac{\partial^3 F_m(\mathbf{Z})}{\partial Z_p \partial Z_q \partial Z_s}\right|_{\mathbf{Z}=\mathbf{Z}_0} \times \\ \times X_p X_q X_s, \quad p,q,s,m = 1,2,\ldots,n. \quad (6)$$

На следующем шаге вводятся новые, скейлинговые, временна́я T и пространственная R переменные, связанные со старыми переменными посредством соотношений $T = \mu t$ и $R = \mu^{1/2} r$. Мера скейлинга μ выбирается как отношение $\mu = (\phi - \phi_{crit})/\phi_{crit}$, где ϕ является управляющим параметром системы с некоторым критическим значением ϕ_{crit}, при котором система теряет устойчивость. С учетом этого производные по времени и пространству преобразуются как [4]

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} + \mu\frac{\partial}{\partial T}, \quad \frac{\partial}{\partial r} \to \frac{\partial}{\partial r} + \mu^{1/2}\frac{\partial}{\partial R}, \quad (7)$$

а разложение операторов $\mathbf{H} = \{\mathbf{J}, \mathbf{M}, \mathbf{N}\}$ в ряд по степеням μ есть [5]

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mu\mathbf{H}_1 + \mu^2\mathbf{H}_2 + \ldots, \quad (8)$$

в то время как возмущение $\mathbf{X}$ раскладывается следующим образом [5]:

$$\mathbf{X} = \mu^{1/2}\mathbf{X}_1 + \mu\mathbf{X}_2 + \mu^{3/2}\mathbf{X}_3 + \ldots \quad (9)$$

Подстановка всех разложений в (3) и компоновка членов с одинаковыми степенями μ дает набор уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{L}_0\right)\mathbf{X}_l = \mathbf{B}_l, \quad l = 1,2,\ldots \quad (10)$$

Здесь $\mathbf{L}_0 = \mathbf{J}_0 + \hat{\mathbf{D}}\partial^2/\partial r^2$, где якобиан нулевого порядка вычисляется исходя из уравнения (8) применительно к якобиану как $\mathbf{J}_0 = \mathbf{J}|_{\mu=0}$, а первые три правые части (10), отвечающие соответственно правым частям при членах со степенями $\mu^{1/2}$, μ и $\mu^{3/2}$, имеют вид $\mathbf{B}_1 = 0$ (дает линейное уравнение для возмущения первого порядка $\mathbf{X}_1$),

$$\mathbf{B}_2 = 2\hat{\mathbf{D}}\frac{\partial^2 \mathbf{X}_1}{\partial r \partial R} + \mathbf{M}_0\mathbf{X}_1\mathbf{X}_1 + \\ + \mathbf{Q}\left(\frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial r}\right)^2 + \mathbf{QX}_1\frac{\partial^2 \mathbf{X}_1}{\partial r^2}, \quad (11)$$

$$\mathbf{B}_3 = -\frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial T} + \mathbf{J}_1\mathbf{X}_1 + \hat{\mathbf{D}}\frac{\partial^2 \mathbf{X}_1}{\partial R^2} + 2\hat{\mathbf{D}}\frac{\partial^2 \mathbf{X}_2}{\partial r \partial R} + \\ + 2\mathbf{M}_0\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + \mathbf{N}_0\mathbf{X}_1\mathbf{X}_1\mathbf{X}_1 + \\ + 2\mathbf{Q}\frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial r}\frac{\partial \mathbf{X}_2}{\partial r} + 2\mathbf{Q}\frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial r}\frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial R} + \\ + \mathbf{QX}_1\frac{\partial^2 \mathbf{X}_2}{\partial r^2} + \mathbf{QX}_2\frac{\partial^2 \mathbf{X}_1}{\partial r^2} + 2\mathbf{QX}_1\frac{\partial^2 \mathbf{X}_1}{\partial r \partial R}. \quad (12)$$

В последнем выражении якобиан первого порядка вычисляется также исходя из (8): $\mathbf{J}_1 = (d\mathbf{J}/d\mu)_{\mu=0}$.

Кубическое амплитудное уравнение получается из условия разрешимости [14] для третьего порядка разложения [5], $\mathbf{U}^*\mathbf{B}_3^{(1)} = 0$, где $\mathbf{U}^*$ обозначает левый собственный вектор (вектор-строка) матрицы $\mathbf{L}_0$, а верхний индекс "1" при $\mathbf{B}_3$ показывает, что удерживаются только члены с первой гармоникой. Дальнейшие шаги требуют знания конкретной формы возмущений, которая зависит от типа неустойчивости. В системах реакция–диффузия основными типами являются неустойчивости Хопфа и Тьюринга [3, 4].

2.1. Неустойчивость Хопфа

Для неустойчивости Хопфа, возникающей при достижении некоторого критического значения частоты ω_c, возмущение первого порядка представляется как [5]

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{U}We^{i\omega_c t} + \bar{\mathbf{U}}\bar{W}e^{-i\omega_c t}, \quad i^2 = -1, \quad (13)$$

где $\mathbf{U}$ есть правый собственный вектор (вектор-столбец) матрицы $\mathbf{L}_0$, а черта сверху обозначает комплексное сопряжение. Здесь необходимо помнить, что собственные векторы зависят от параметров системы (1), но не зависят от r, t, R и T.

Возмущение второго порядка содержит нулевые, первые и вторые гармоники, т. е. [5]

$$\mathbf{X}_2 = \hat{\mathbf{V}}_0 + \mathbf{V}_1 e^{i\omega_c t} + \mathbf{V}_2 e^{2i\omega_c t} + \\ + \bar{\mathbf{V}}_1 e^{-i\omega_c t} + \bar{\mathbf{V}}_2 e^{-2i\omega_c t}. \quad (14)$$

При этом векторы $\mathbf{V}$ являются функциями амплитуд W и $\bar{W}$ и не зависят от r и T. Они могут быть найдены из уравнения для второго порядка разложения (10) с правой частью (11).

Поскольку возмущения $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$ не зависят от r, правые части (11) и (12) становятся равными соответственно

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{M}_0\mathbf{X}_1\mathbf{X}_1, \tag{15}$$

$$\mathbf{B}_3 = -\frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial T} + \mathbf{J}_1\mathbf{X}_1 + \hat{\mathbf{D}}\frac{\partial^2 \mathbf{X}_1}{\partial R^2} + 2\mathbf{M}_0\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + \mathbf{N}_0\mathbf{X}_1\mathbf{X}_1\mathbf{X}_1. \tag{16}$$

Отсюда видно, что результаты совпадают с формулами, полученными Курамото (Kuramoto) [5], если в последних провести замену $\mathbf{D} \to \hat{\mathbf{D}}$, т. е. получается амплитудное уравнение

$$\mathbf{U}^*\mathbf{U}\frac{\partial W}{\partial T} = \eta W + g|W|^2 W + \mathcal{D}\frac{\partial^2 W}{\partial R^2} \tag{17}$$

с коэффициентами

$$\mathcal{D} = \mathbf{U}^*\hat{\mathbf{D}}\mathbf{U},$$

$$g = 2\mathbf{U}^*\mathbf{M}_0\mathbf{U}\mathbf{V}_0 + 2\mathbf{U}^*\mathbf{M}_0\bar{\mathbf{U}}\mathbf{V}_+ + 3\mathbf{U}^*\mathbf{N}_0\mathbf{U}\mathbf{U}\bar{\mathbf{U}},$$

$$\eta = \mathbf{U}^*\mathbf{J}_1\mathbf{U}.$$

2.2. Неустойчивость Тьюринга

В случае неустойчивости Тьюринга с соответствующим критическим волновым вектором k_c возмущения имеют схожий со случаем Хопфа вид:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{U}We^{ik_cr} + \bar{\mathbf{U}}\bar{W}e^{-ik_cr}, \tag{18}$$

$$\mathbf{X}_2 = \hat{\mathbf{V}}_0 + \mathbf{V}_1e^{ik_cr} + \mathbf{V}_2e^{2ik_cr} + \bar{\mathbf{V}}_1e^{-ik_cr} + \bar{\mathbf{V}}_2e^{-2ik_cr}. \tag{19}$$

Теперь в силу их зависимости от r второй порядок разложения дает следующие результаты:

$$\hat{\mathbf{V}}_0 = -2\mathbf{J}_0^{-1}\mathbf{M}_0\mathbf{U}\bar{\mathbf{U}}|W|^2 \equiv \mathbf{V}_0|W|^2, \tag{20}$$

$$\mathbf{V}_2 = -(\mathbf{J}_0 - 4k_c^2\hat{\mathbf{D}})^{-1}(\mathbf{M}_0\mathbf{U}\mathbf{U} - 2k_c^2\mathbf{Q}\mathbf{U}\mathbf{U})W^2 \equiv \mathbf{V}_+W^2. \tag{21}$$

Вектор $\mathbf{V}_1$ и, как следствие, $\mathcal{D}$ определяются особо, что будет продемонстрировано для случая двухкомпонентной системы ниже.

Таким образом, амплитудное уравнение имеет следующие коэффициенты:

$$\eta = \mathbf{U}^*\mathbf{J}_1\mathbf{U}, \tag{22}$$

по структуре совпадающий с формулой в случае неустойчивости Хопфа, но в силу пространственной зависимости $\mathbf{L}_0$ при неустойчивости Тьюринга имеющий отличные собственные векторы, и

$$g = 2\mathbf{U}^*\mathbf{M}_0\mathbf{U}\mathbf{V}_0 + 2\mathbf{U}^*\mathbf{M}_0\bar{\mathbf{U}}\mathbf{V}_+ + 3\mathbf{U}^*\mathbf{N}_0\mathbf{U}\mathbf{U}\bar{\mathbf{U}} - k_c^2\mathbf{U}^*\mathbf{Q}\mathbf{V}_0\mathbf{U} - k_c^2\mathbf{U}^*\mathbf{Q}\mathbf{V}_+\bar{\mathbf{U}}. \tag{23}$$

Фактически, все $\mathbf{Q}$-вклады в (23) обеспечиваются членом $\mathbf{Q}\mathbf{X}_2(\partial^2\mathbf{X}_1/\partial r^2)$ из (12), поскольку вклады для первых гармоник в членах $2\mathbf{Q}(\partial\mathbf{X}_1/\partial r)(\partial\mathbf{X}_2/\partial r)$ и $\mathbf{Q}\mathbf{X}_1(\partial^2\mathbf{X}_2/\partial r^2)$ взаимно уничтожаются, а два квадратичных по $\mathbf{X}_1$ члена $2\mathbf{Q}(\partial\mathbf{X}_1/\partial r)(\partial\mathbf{X}_1/\partial R)$ и $2\mathbf{Q}\mathbf{X}_1(\partial^2\mathbf{X}_1/\partial r\partial R)$ не содержат первых гармоник вообще.

3. ДВУХКОМПОНЕНТНАЯ СИСТЕМА

В этом разделе анализ будет применен к произвольной двухкомпонентной системе в случае неустойчивости Тьюринга. Матрицы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{Q}$ в настоящей работе полагаются диагональными, т. е. система описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= F_1(u,v) + D_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + Q_{11}\frac{\partial}{\partial r}\left(u\frac{\partial u}{\partial r}\right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= F_2(u,v) + D_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + Q_{22}\frac{\partial}{\partial r}\left(v\frac{\partial v}{\partial r}\right). \end{aligned} \tag{24}$$

Собственные векторы имеют вид

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} e^{ik_cr}, \quad \mathbf{U}^* = \frac{1}{1+\alpha\beta}(1,\beta)\,e^{ik_cr}, \tag{25}$$

где

$$\alpha = -\frac{\hat{L}_{11}^0}{\hat{L}_{12}^0} = -\frac{\hat{L}_{21}^0}{\hat{L}_{22}^0}, \quad \beta = -\frac{\hat{L}_{11}^0}{\hat{L}_{21}^0} = -\frac{\hat{L}_{12}^0}{\hat{L}_{22}^0} \tag{26}$$

и

$$\hat{L}_{mn}^0 = J_{mn}^0 - k_c^2\hat{D}_{nn}\delta_{mn}, \quad m,n = 1,2. \tag{27}$$

Здесь J_{mn}^0 — элементы якобиана $\mathbf{J}_0$, а $\delta_{mn} = 1$ при $m = n$ и $\delta_{mn} = 0$ при $m \neq n$. Следовательно,

$$\hat{D}_{11} = D_{11} + Q_{11}u_0, \quad \hat{D}_{22} = D_{22} + Q_{22}v_0,$$

где u_0 и v_0 удовлетворяют равенству $F_1(u_0,v_0) = F_2(u_0,v_0) = 0$.

Поэтому возмущения могут быть записаны как

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} X_{1u} \\ X_{1v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \left[W e^{ik_c r} + \bar{W} e^{-ik_c r} \right], \quad (28)$$

$$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} e^{ik_c r} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} e^{2ik_c r} + \text{c.c.} \quad (29)$$

и из уравнения (11) для второго порядка можно найти коэффициенты

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{\det \mathbf{J}_0} \left(\hat{G}_1 J_{22}^0 - \hat{G}_2 J_{12}^0 \right) |W|^2 \equiv \hat{a}_0 |W|^2, \\ b_0 &= -\frac{1}{\det \mathbf{J}_0} \left(\hat{G}_2 J_{11}^0 - \hat{G}_1 J_{21}^0 \right) |W|^2 \equiv \hat{b}_0 |W|^2 \end{aligned} \quad (30)$$

и

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{\det \mathbf{\Phi}} \left(G_1 \Phi_{22} - G_2 \Phi_{12} \right) W^2 \equiv \hat{a}_2 W^2, \\ b_2 &= -\frac{1}{\det \mathbf{\Phi}} \left(G_2 \Phi_{11} - G_1 \Phi_{21} \right) W^2 \equiv \hat{b}_2 W^2, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} G_n &= \frac{1}{2} F_n^{uu} + \alpha F_n^{uv} + \frac{\alpha^2}{2} F_n^{vv} - 2k_c^2 Q_{nn}, \\ \hat{G}_n &= F_n^{uu} + 2\alpha F_n^{uv} + \alpha^2 F_n^{vv} \end{aligned} \quad (32)$$

и элементы матрицы $\mathbf{\Phi}$ есть

$$\Phi_{mn} = J_{mn}^0 - 4k_c^2 \hat{D}_{nn} \delta_{mn}.$$

В формулах F_n^{uv} обозначает вторые частные производные функций F_n по переменным u и v, вычисленные при критическом значении управляющего параметра, т. е. при $\mu = 0$. Коэффициенты a_1 и b_1 связаны посредством соотношения

$$\alpha a_1 - b_1 = \frac{2ik_c \hat{D}_{11}}{J_{12}^0} \frac{\partial W}{\partial R} = \frac{2ik_c \alpha \hat{D}_{22}}{\hat{L}_{22}^0} \frac{\partial W}{\partial R}, \quad (33)$$

поскольку $\hat{D}_{11} + \alpha\beta \hat{D}_{22} = 0$.

Таким образом, коэффициенты амплитудного уравнения (2) имеют вид

$$\eta = \frac{1}{1+\alpha\beta} \left(J_{11}^1 + \alpha J_{12}^1 + \beta J_{21}^1 + \alpha\beta J_{22}^1 \right), \quad (34)$$

J_{nm}^1 — элементы матрицы $\mathbf{J}_1$,

$$\mathcal{D} = 4k_c^2 \frac{\beta}{1+\alpha\beta} \frac{1}{J_{12}^0} \hat{D}_{11} \hat{D}_{22}, \quad (35)$$

$$g = \frac{1}{1+\alpha\beta} \left(g_1 + \frac{g_2}{2} \right), \quad (36)$$

где были введены обозначения

$$\begin{aligned} g_1 &= (F_1^{uu} + \alpha F_1^{uv} + \beta F_2^{uu} + \alpha\beta F_2^{uv} - k_c^2 Q_{11}) \times \\ &\times (\hat{a}_0 + \hat{a}_2) + (F_1^{uv} + \alpha F_1^{vv} + \beta F_2^{uv} + \alpha\beta F_2^{vv} - \\ &- \alpha\beta k_c^2 Q_{22})(\hat{b}_0 + \hat{b}_2), \\ g_2 &= F_1^{uuu} + \beta F_2^{uuu} + 3\alpha(F_1^{uuv} + \beta F_2^{uuv}) + \\ &+ 3\alpha^2(F_1^{uvv} + \beta F_2^{uvv}) + \alpha^3(F_1^{vvv} + \beta F_2^{vvv}). \end{aligned} \quad (37)$$

Используя выражение (36) для g, можно найти области существования структур Тьюринга. Знак g при этом определяет сверхкритическую ($g < 0$) и подкритическую ($g > 0$) неустойчивости Тьюринга. В частном случае при линейных реакционных функциях F_1 и F_2 коэффициент g становится равным

$$g = -\frac{k_c^2 (Q_{11} \hat{a}_2 + \alpha\beta Q_{22} \hat{b}_2)}{1+\alpha\beta}.$$

Тогда граница между сверх- и подкритической неустойчивостями $g = 0$ вычисляется с использованием выражений (31) и (32) следующим образом:

$$\chi^2 (J_{22}^0 - 4k_c^2 \hat{D}_{22}) - \chi (J_{12}^0 + \alpha\beta J_{21}^0) + \\ + \alpha\beta (J_{11}^0 - 4k_c^2 \hat{D}_{11}) = 0,$$

где $\chi = Q_{11}/Q_{22}$. При этом надо учитывать, что для реакционно-диффузионных систем типа активатор–ингибитор $J_{11}^0 > 0$, а $J_{22}^0 < 0$. Здесь важно также отметить, что α, β и k_c, вообще говоря, зависят от коэффициентов диффузии, что не позволяет выразить их из последнего равенства простым образом.

Приведенные выражения позволяют рассчитывать одномодовые структуры Тьюринга (полосы). В случае многомодовых структур (прямоугольных или гексагональных паттернов) нелинейный анализ дает два или три связанных амплитудных уравнения [4].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Неустойчивость Тьюринга наряду с неустойчивостью Хопфа и волновой неустойчивостью является основной в системах реакция–диффузия. Приложение анализа неустойчивости Тьюринга особенно широко известно для диссипативных структур в химических и биологических областях. На сегодняшний день существуют две химические системы, в которых были экспериментально обнаружены структуры Тьюринга [3]. Это — реакция ХИМ (хлорид–иодид–малоновая кислота) и реакция Белоусова – Жаботинского, протекающая в нанокапельках воды в обращенной микроэмульсии АОТ [3]

(БЖ–АОТ). Сводная таблица структур, обнаруженных в системе БЖ–АОТ приведена в работе [15]. В качестве структур Тьюринга, возникающих в биологических системах, наиболее явным примером являются пигментные пятна животных (полосы на шкуре зебры, пятна леопарда и т. д.) [9]. При моделировании механизмов в подобных системах, ответственных за появление таких сложных структур, в системах уравнений реакция–диффузия часто используют коэффициент диффузии сложного вида, частным случаем которого является форма, рассмотренная в данном исследовании. Поэтому приведенный выше анализ представляет несомненную ценность в рамках данных приложений.

В заключение автор хотел бы искренне поблагодарить В. К. Ванага за введение в проблему и многочисленные полезные обсуждения и А. Де Вит за предоставление диссертации и комментарии к ней.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Васильев, Ю. М. Романовский, В. Г. Яхно, *Автоволновые процессы*, Наука, Москва (1987).

2. А. Ю. Лоскутов, А. С. Михайлов, *Основы теории сложных систем*, РХД, Москва (2008).

3. В. К. Ванаг, *Диссипативные структуры в реакционно-диффузионных системах*, РХД, Москва (2008).

4. M. Cross and H. Greenside, *Pattern Formation and Dynamics in Nonequilibrium Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2009).

5. Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, Springer, Berlin (1984).

6. A. De Wit, PhD Thesis, Univ. Libre de Bruxelles, Brussels (1993).

7. D. Walgraef, *Spatiotemporal Pattern Formation*, Springer, Berlin (1997).

8. L. M. Pismen, *Patterns and Interfaces in Dissipative Dynamics*, Springer, Berlin (2006).

9. J. D. Murray, *Mathematical Biology*, Springer, Berlin (2002).

10. V. Méndez, S. Fedotov, and W. Horsthemke, *Reaction–Transport Systems*, Springer, Berlin (2010).

11. N. Kumar and W. Horsthemke, Physica A **389**, 1812 (2010).

12. N. Kumar and W. Horsthemke, Phys. Rev. E **83**, 036105 (2011).

13. E. P. Zemskov, V. K. Vanag, and I. R. Epstein, Phys. Rev. E **84**, 036216 (2011).

14. R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1, Wiley, New York (1953).

15. В. К. Ванаг, УФН **174**, 991 (2004).