

# РОЛЬ МНОГОЧАСТИЧНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ И КУПЕРОВСКОГО СПАРИВАНИЯ В ПРОЦЕССЕ ОБРАЗОВАНИЯ МОЛЕКУЛ В УЛЬТРАХОЛОДНОМ ГАЗЕ ФЕРМИ АТОМОВ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ДЛИНОЙ РАССЕЯНИЯ

*В. С. Бабиченко\**, *Ю. М. Каган*

*Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»  
123182, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 5 марта 2012 г.

Исследуется влияние многочастичных корреляционных эффектов и куперовского спаривания в ультрахолодном ферми-газе с отрицательной длиной рассеяния на скорость процесса образования молекул. Показано, что куперовское спаривание ведет к росту скорости образования молекул, в отличие от влияния на эту скорость конденсации Бозе–Эйнштейна в бозе-газе. Эта тенденция сохраняется во всем интервале температур, меньших критической.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование ультрахолодных атомарных газов привело к уникальной возможности изучения многочастичных квантовых корреляций и их роли в динамических и кинетических свойствах макроскопических систем. Уже на ранней стадии исследования было предсказано явление резкого уменьшения скорости неупругих процессов при бозе-конденсации за счет принципиальной перестройки квантовых корреляций [1]. Так, локальный трехчастичный коррелятор  $K_3$ , ответственный за рекомбинацию в разреженном газе, с понижением температуры  $T < T_c$  уменьшается и отношение  $K_3(T)/K_3(T_c)$  достигает значения приблизительно  $1/6$  при  $T \rightarrow 0$ . С ростом газового параметра  $na^3$  ( $a$  — длина рассеяния) эффект уменьшается и реально исчезает при плотностях, отвечающих бозе-жидкости.

Экспериментально явление наблюдалось в работе [2], в которой изучалась кинетика распада ультрахолодного газа Rb в ловушке при реализации бозе-конденсации. Результаты оказались в качественном и количественном соответствии с теоретическими предсказаниями. Фактически, результаты этой работы представляли собой наблюдение формирования квантовых корреляций в процессе кинетики бо-

зе-конденсации системы при ограниченном времени жизни системы.

Интересно, что аналогичные явления в полной мере проявляются и в двумерном случае при конечной температуре  $T < T_c$ , хотя конденсат отсутствует при  $T \neq 0$  [3]. Результат отражает определяющую роль локальных корреляционных свойств, которые и при  $T \neq 0$  остаются близкими к свойствам в случае истинного конденсата.

В ультрахолодном двухкомпонентном газе Ферми атомов с притяжением при достаточно низких температурах образуется конденсат куперовских пар. Естественно возникает вопрос, как куперовское спаривание и конденсат пар влияют на трехчастичную рекомбинацию. Анализируя эту проблему, будем предполагать, что притяжение, т. е. отрицательная длина рассеяния  $a < 0$ , возникает в рамках (является результатом) резонанса Фешбаха при  $s$ -характере межатомного рассеяния. При этом, как обычно, можно считать, что взаимодействие имеет место только между атомами разных компонент. Полученные в настоящей работе результаты привели к неочевидному на первый взгляд заключению: куперовское спаривание ведет к росту вероятности трехчастичной рекомбинации и скорости распада системы.

Чтобы сделать рассмотрение прозрачным, ограничимся случаем сильно разреженного газа, предпо-

\*E-mail: vsbabichenko@hotmail.com

лагая выполненными условия

$$|a|k_F \ll 1, \quad r_0 k_F \ll 1, \quad (1)$$

где  $a$  — отрицательная длина рассеяния,  $r_0$  — характерный размер области межатомного взаимодействия ( $\hbar = 1$ ). При  $a < 0$  слабо связанные димеры, наличие которых характерно для случая  $a > 0$ , не возникают (см., например, [4, 5]). При рекомбинации молекула оказывается на глубоком уровне. Большая выделяющаяся энергия обращается в кинетическую энергию молекулы как целого и третьей частицы, вовлеченной в процесс рекомбинации. Здесь картина аналогична для частиц Бозе и Ферми. Вероятность перехода в ферми-случае, так же как и в бозе-случае, пропорциональна трехчастичному коррелятору. Однако в ферми-случае коэффициент, определяющий вероятность помимо трехчастичного коррелятора, антисимметричен относительно перестановки частиц, принадлежащих к одной и той же компоненте. Этот коэффициент не зависит от состояния системы, и именно поведение трехчастичного коррелятора определяет зависимость вероятности образования молекул от состояния системы и при появлении конденсата куперовских пар ведет к обращению знака эффекта по сравнению со случаем конденсации бозе-частиц.

## 2. ТРЕХЧАСТИЧНАЯ РЕКОМБИНАЦИЯ В ГАЗЕ ФЕРМИ АТОМОВ

Рассматривая трехчастичную рекомбинацию в ферми-газе низкой плотности с образованием молекулы в сильно связанном состоянии, будем предполагать, что парному взаимодействию отвечает  $s$ -рассеяние с отрицательной длиной рассеяния. Гамильтониан системы запишется в форме

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}', \quad (2)$$

где  $\hat{H}_0$  — гамильтониан, соответствующий чисто упругим процессам,  $\hat{H}'$  — гамильтониан, описывающий неупругий рекомбинационный процесс,

$$\hat{H}' = \frac{1}{2} \sum_{\sigma \neq \sigma'} \int d^3 r_1 d^3 r_2 d^3 r_3 \times \left\{ \begin{aligned} & \hat{\psi}_m^\dagger(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \hat{\psi}_\sigma^\dagger(\mathbf{r}_3) \hat{V}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \times \\ & \times \hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r}_1) \hat{\psi}_{\sigma'}(\mathbf{r}_2) \hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r}_3) + \text{H.c.} \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Здесь  $\hat{\psi}_m^\dagger(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  — оператор рождения молекулы,

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_m^\dagger(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \\ &= \sum_{\mathbf{q}} \exp\left(-i\frac{1}{2}\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)\right) \varphi_m(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \hat{b}_{\mathbf{q}}, \end{aligned} \quad (4)$$

$\varphi_m(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  — волновая функция молекулы в системе ее центра инерции. Операторы фермионного поля имеют стандартный вид

$$\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}\sigma} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (5)$$

где  $\sigma$  — индекс компоненты ферми-частицы, принимающий два значения:  $\sigma = \uparrow, \downarrow$ . Ограничиваясь парной структурой взаимодействия, вершину  $\hat{V}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$  можно записать в виде

$$\hat{V}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + U(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2),$$

где  $U(\mathbf{r})$  — потенциал взаимодействия частиц, имеющих разные индексы компонент.

После перехода к фурье-компонентам гамильтониан неупругого процесса рождения молекулы  $\hat{H}'$  приобретает вид

$$\begin{aligned} \hat{H}' &= \sum_{\sigma \neq \sigma'} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{q}} \left( \Gamma_{\mathbf{q}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} \hat{c}_{\mathbf{k}_1, \sigma} \hat{c}_{\mathbf{k}_2, \sigma'} \times \right. \\ & \times \left. \hat{c}_{\mathbf{k}_3, \sigma} \hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{c}_{-\mathbf{q} + \mathbf{K}, \sigma} + \text{H.c.} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$  — малые импульсы трех частиц, две из которых имеют одинаковые индексы компонент  $\sigma$  (с импульсами  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3$ ), а третья — индекс  $\sigma'$ , не совпадающий с  $\sigma$ . В процессе релаксации две частицы, взаимодействуя друг с другом, образуют молекулу, а третья частица, забирая энергию, выделяющуюся при образовании молекулы, приобретает большой импульс  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_*$ , величина которого определяется из закона сохранения энергии и имеет вид

$$q_* = \sqrt{\frac{4}{3} m |E_b|},$$

где  $E_b \gg \mathbf{k}_i^2/2m$  — энергия связи молекулы ( $i = 1, 2, 3$  — индекс частицы, участвующей в процессе), которая предполагается существенно большей энергий сталкивающихся частиц,  $\mathbf{K}$  — суммарный импульс сталкивающихся частиц  $\mathbf{K} = \sum_{i=1,2,3} \mathbf{k}_i$ . Поскольку волновая функция трех ферми-атомов симметрична, вершина  $\Gamma_{\mathbf{q}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}$  в (6) с учетом антисимметризации при перестановке частиц с одинаковыми индексами может быть представлена в виде

$$\Gamma_{\mathbf{q}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} = \frac{1}{2} \int d^3 r_1 d^3 r_2 d^3 r_3 \times \left\{ \begin{array}{l} \varphi_m^*(\mathbf{r}_{12}) U(\mathbf{r}_{32}) \times \\ \times \exp \left[ i \sum_i (\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_i) - i \mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_{12} - \right. \\ \left. - i(-\mathbf{q} + \mathbf{K}) \cdot \mathbf{r}_3 \right] - (1 \rightleftharpoons 3) \end{array} \right\}, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{r}_{32} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{R}_{12} = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2).$$

Расстояние  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  имеет масштаб размера молекулы  $r_*$ . Близкий масштаб будет характерен и для расстояния  $|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|$ , поскольку только в этом случае третья частица может получить большой импульс, сравнимый по значению и противоположный по направлению импульсу образующейся молекулы. Переходя в интеграле (7) к фурье-компонентам для потенциала  $U(\mathbf{r})$  и волновой функции  $\varphi_m(\mathbf{r})$  —

$$U(\mathbf{r}) = \int d^3 q U(\mathbf{q}) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}),$$

$$\varphi_m(\mathbf{r}) = \int d^3 q \varphi_m(\mathbf{q}) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})$$

— и интегрируя по координатам  $r_1, r_2, r_3$ , получим выражение для вершины  $\Gamma_{\mathbf{q}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}$  в виде

$$\Gamma_{\mathbf{q}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} = \frac{1}{2} \times \left[ \varphi_m^* \left( -\frac{1}{2} \mathbf{q} + \mathbf{k}_1 \right) U(\mathbf{q} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) - (1 \rightleftharpoons 3) \right]. \quad (8)$$

Рассматривая ферми-газ с большой отрицательной длиной рассеяния  $|a| \gg r_0, r_*$  при выполнении неравенств (1), в условиях резонанса Фешбаха мы сталкиваемся с резким увеличением вершины  $\Gamma$ . Действительно, в этом случае для синглетных пар в непрерывном спектре при энергии  $\varepsilon \rightarrow 0$  реализуется квазирезонансное состояние при отсутствии реального слабо связанного димерного состояния. Решение уравнения Шредингера для пары частиц в этих условиях демонстрирует, что при  $|\rho| < r_0$  волновая функция  $\psi(\rho)$  приобретает большой дополнительный множитель  $|a|/r_0$ . Амплитуда вероятности одновременного нахождения трех фермионов в объеме с радиусом порядка  $r_*$  оказывается увеличенной в  $(|a|/r_0)^2$  раз по сравнению со случаем, когда рассеянием медленных частиц пренебрегается (ср. [5–7]). Заметим, что  $r_* \lesssim r_0$ . Соответственно, вершина (8) эффективно приобретает дополнительный множитель порядка  $(|a|/r_0)^2$ .

Принимая во внимание, что

$$|\mathbf{q}| \sim q_* = \sqrt{\frac{4}{3} m |E_b|},$$

и используя малость импульсов,  $|\mathbf{k}_i| \ll q_* \sim r_0^{-1}$ , можно разложить функции  $\varphi_m(\mathbf{q})$  и  $U(\mathbf{q})$  в (8) по параметру  $|\mathbf{k}_i|/q_* \ll 1$ . В результате получим следующее выражение для амплитуды образования молекулы:

$$\Gamma_{\mathbf{q}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} = \tilde{\Gamma}(q) \frac{(\mathbf{k}_{13} \cdot \mathbf{q})}{q^2}, \quad (9)$$

где

$$\mathbf{k}_{13} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3,$$

$$\tilde{\Gamma}(q) = \left( \frac{|a|}{r_0} \right)^2 \times \left[ \frac{d\varphi_m^*(-q/2)}{dq} U(q) + \varphi_m^* \left( -\frac{q}{2} \right) \frac{dU(q)}{dq} \right].$$

Во всех случаях мы предполагаем сферическую симметрию функций  $U(\mathbf{r})$ ,  $\varphi_m(\mathbf{r})$ . Поэтому фактически функция  $\tilde{\Gamma}(q)$  зависит только от модуля вектора  $q = |\mathbf{q}|$ .

В предположении малости вероятности рекомбинационных переходов имеем для числа переходов в единицу времени:

$$W = 2\pi \sum_{i,f} \hat{\rho}_i |\hat{H}'_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) = \int dt \langle \hat{H}'(0) \hat{H}'(t) \rangle, \quad (10)$$

$$\hat{H}'(t) = \exp(i\hat{H}_0 t) \hat{H}' \exp(-i\hat{H}_0 t).$$

Здесь  $\hat{\rho}_i$  — равновесная матрица, определяемая гамильтонианом  $\hat{H}_0$ . При суммировании по конечным состояниям в (10) можно воспользоваться тем, что  $\varepsilon_F \ll E_b$ . Подставляя гамильтониан  $\hat{H}'$  (6) в (10), получим

$$W = \int dt \times \left\{ \sum_{\sigma \neq \sigma'} \sum_{\substack{\mathbf{k}_i, \mathbf{q} \\ \mathbf{k}'_i, \mathbf{q}'}} \left\{ \tilde{\Gamma}(q) \tilde{\Gamma}^*(q') \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{k}_{13})(\mathbf{q}' \cdot \mathbf{k}'_{13})}{q^2 q'^2} \times \right. \right. \\ \times \left\{ \langle \hat{c}_{\mathbf{k}_1, \sigma}^\dagger(0) \hat{c}_{\mathbf{k}_2, \sigma'}^\dagger(0) \hat{c}_{\mathbf{k}'_3, \sigma}^\dagger(0) \hat{b}_{\mathbf{q}'}(0) \hat{c}_{-\mathbf{q} + \mathbf{K}, \sigma}(0) \times \right. \\ \times \left. \hat{c}_{\mathbf{k}_1, \sigma}(t) \hat{c}_{\mathbf{k}_2, \sigma'}(t) \hat{c}_{\mathbf{k}_3, \sigma}(t) \hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger(t) \hat{c}_{-\mathbf{q} + \mathbf{K}, \sigma}^\dagger(t) \right\} + \\ \left. \left. + \text{H.c.} \right\} \right\}. \quad (11)$$

Расцепляя среднее на произведение средних от медленных и быстрых операторов полей, получаем

$$W = \int dt \times \sum_{\sigma \neq \sigma'} \sum_{\mathbf{k}_i, \mathbf{k}'_i, \mathbf{q}} \left\{ \tilde{\Gamma}(\mathbf{q}) \tilde{\Gamma}^*(\mathbf{q}') \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{k}_{13})(\mathbf{q}' \cdot \mathbf{k}'_{13})}{q^2 q'^2} \times K^{(3)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}'_i; \sigma, \sigma'; t) K_{B-F}^{(2)}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'; t) + \text{H.c.} \right\}, \quad (12)$$

где  $K^{(3)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}'_i; \sigma, \sigma'; t)$  — трехчастичный коррелятор, зависящий от операторов, медленно изменяющихся в пространстве и во времени:

$$K^{(3)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}'_i; \sigma, \sigma'; t) = \langle \hat{c}_{\mathbf{k}'_1, \sigma}^\dagger(0) \hat{c}_{\mathbf{k}'_2, \sigma'}^\dagger(0) \hat{c}_{\mathbf{k}'_3, \sigma}^\dagger(0) \times \hat{c}_{\mathbf{k}_3, \sigma}(t) \hat{c}_{\mathbf{k}_2, \sigma'}(t) \hat{c}_{\mathbf{k}_1, \sigma}(t) \rangle. \quad (13)$$

Характерные времена изменения операторов  $\hat{c}_{\mathbf{k}, \sigma}(t)$  в этом корреляторе  $t_s \sim 1/\varepsilon_F$ . Коррелятор  $K_{B-F}^{(2)}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'; t)$  есть среднее от операторов  $\hat{b}_{\mathbf{q}}(t)$  и  $\hat{c}_{\mathbf{q}, \sigma}(t)$ , быстро меняющихся в пространстве и времени, характерное время изменения для которых  $t_r \sim 1/E_b \ll t_s$ :

$$K_{B-F}^{(2)}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'; t) = \langle \hat{b}_{\mathbf{q}}(0) \hat{b}_{\mathbf{q}'}^\dagger(t) \hat{c}_{-\mathbf{q}+\mathbf{K}, \sigma}(0) \hat{c}_{-\mathbf{q}'+\mathbf{K}, \sigma}^\dagger(t) \rangle = \langle \hat{b}_{\mathbf{q}}(0) \hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger(t) \rangle \langle \hat{c}_{-\mathbf{q}+\mathbf{K}, \sigma}(0) \hat{c}_{-\mathbf{q}+\mathbf{K}, \sigma}^\dagger(t) \rangle \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'}. \quad (14)$$

Коррелятор  $K_{B-F}^{(2)}$  может быть представлен в виде произведения двух парных корреляторов для операторов  $\hat{b}_{\mathbf{q}}$  и  $\hat{c}_{-\mathbf{q}+\mathbf{K}, \sigma}$ , которые легко вычисляются, как парные корреляторы для одночастичных систем. При этом возникает  $\delta$ -символ  $\delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'}$ , так что коррелятор  $K_{B-F}^{(2)}$  можно записать в виде

$$K_{B-F}^{(2)}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'; t) = K_{B-F}^{(2)}(\mathbf{q}; t) \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'}$$

Характерные времена изменения коррелятора  $K^{(3)}$  значительно больше характерных времен изменения коррелятора  $K_{B-F}^{(2)}$ , а именно  $t_r \sim 1/E_b \ll t_s$ , и при интегрировании по времени в (12) пределы интегрирования ограничиваются малым временем  $t_r$ . В связи с этим зависимостью от времени  $t$  трехчастичного коррелятора  $K^{(3)}$  в (12) можно пренебречь, и все операторы в  $K^{(3)}$  (12) могут быть взяты в один и тот же момент времени. По этой причине коррелятор  $K^{(3)}$  может быть записан в виде

$$K^{(3)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}'_i; \sigma, \sigma') = \langle \hat{c}_{\mathbf{k}'_1, \sigma}^\dagger(0) \hat{c}_{\mathbf{k}'_2, \sigma'}^\dagger(0) \hat{c}_{\mathbf{k}'_3, \sigma}^\dagger(0) \times \hat{c}_{\mathbf{k}_3, \sigma}(0) \hat{c}_{\mathbf{k}_2, \sigma'}(0) \hat{c}_{\mathbf{k}_1, \sigma}(0) \rangle. \quad (15)$$

Таким образом (12) принимает вид

$$W = \sum_{\sigma \neq \sigma'} \sum_{\mathbf{k}_i, \mathbf{k}'_i, \mathbf{q}} \left\{ |\tilde{\Gamma}(\mathbf{q})|^2 \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{k}_{13})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{k}'_{13})}{q^4} \times K^{(3)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}'_i; \sigma, \sigma') \int dt K_{B-F}^{(2)}(\mathbf{q}; t) + \text{H.c.} \right\}. \quad (16)$$

Коррелятор  $K_{B-F}^{(2)}(\mathbf{q}; t)$  легко вычисляется и принимает простой вид:

$$K_{B-F}^{(2)}(\mathbf{q}; t) = \exp\left(-i\left(E_b - \frac{3}{4} \frac{q^2}{m}\right)t\right).$$

Вычисляя интеграл по времени и по импульсу  $\mathbf{q}$ , в (16) можно выделить блок

$$\sum_{\mathbf{q}} |\tilde{\Gamma}(\mathbf{q})|^2 \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{k}_{13})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{k}'_{13})}{q^4} \times \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp\left(-i\left(E_b - \frac{3}{4} \frac{q^2}{m}\right)t\right).$$

Здесь  $3q^2/4m$  — суммарная кинетическая энергия молекулы и быстрого атома, вылетающих с практически равными по величине, но противоположными по направлению импульсами. Простое вычисление последнего выражения дает

$$\frac{2}{9\pi} q_* |\tilde{\Gamma}(q_*)|^2 \frac{\mathbf{k}_{13} \cdot \mathbf{k}'_{13}}{q_*^2},$$

где  $q_* = \sqrt{4mE_b/3}$ . В результате для вероятности (16) находим

$$W = B \sum_{\sigma \neq \sigma'} \sum_{\substack{\mathbf{k}_i, \mathbf{k}'_i \\ i=1,2,3}} \frac{\mathbf{k}_{13} \cdot \mathbf{k}'_{13}}{q_*^2} K^{(3)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}'_i; \sigma, \sigma') \quad (17)$$

и значение константы  $B$  определяется выражением

$$B = \frac{2}{9\pi} m q_* |\tilde{\Gamma}(q_*)|^2. \quad (18)$$

Коэффициент  $\mathbf{k}_{13} \cdot \mathbf{k}'_{13}/q_*^2$  в (17) является прямым следствием пространственной антисимметрии при перестановке тождественных ферми-частиц. Его структура оказывается существенной при вычислении вероятности  $W$  с учетом коррелятора  $K^{(3)}$ . Степень уменьшения  $W$  при учете этого коэффициента, пропорционального  $\mathbf{k}^2/q_*^2$ , был впервые отмечен Д. Петровым [6].

### 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРЕХЧАСТИЧНОГО КОРРЕЛЯТОРА. ВЕРОЯТНОСТЬ ОБРАЗОВАНИЯ МОЛЕКУЛ

Начнем с вычисления вероятности перехода  $W$  в сильно связанное состояние (17). В нулевом по межчастичному взаимодействию приближении коррелятор  $K^{(3)}$  принимает вид

$$K_0^{(3)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}'_i; \sigma, \sigma') = n_{\mathbf{k}_1, \sigma} n_{\mathbf{k}_2, \sigma'} n_{\mathbf{k}_3, \sigma} \times (\delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'_1} \delta_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}'_3} - \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'_3} \delta_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}'_1}) \delta_{\mathbf{k}_2; \mathbf{k}'_2} (1 - \delta_{\sigma, \sigma'}), \quad (19)$$

где  $n_{\mathbf{k}, \sigma}$  — функция распределения идеального двухкомпонентного газа фермионов. Подставляя это выражение в (17), при  $T = 0$  находим

$$W_0 = B \frac{24}{5} \frac{k_F^2}{q_*^2} n^3, \quad (20)$$

где  $n$  — плотность частиц одной компоненты.

При конечной температуре  $T \ll \varepsilon_F$  температурная поправка к вероятности перехода  $W$  может быть легко вычислена при подстановке  $K_0^{(3)}$  (19) в (17) с учетом температурной зависимости  $n_{\mathbf{k}, \sigma}$ . В результате находим

$$W_0(T) = W_0 \left[ 1 + \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{T}{\varepsilon_F} \right)^2 \right]. \quad (21)$$

Учет межчастичного взаимодействия меняет состояние, по которому происходит усреднение в (13). Рассмотрим сначала изменения коррелятора  $K_0^{(3)}$  в отсутствие куперовского спаривания в первом порядке по параметру  $|a|k_F \ll 1$ . Гамильтониан взаимодействия частиц с малой энергией  $\varepsilon \lesssim \varepsilon_F$  может быть записан в виде

$$\hat{H}_{int} = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2} V(\mathbf{k}) \hat{c}_{\mathbf{k}'_1 \uparrow}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}'_2 \downarrow}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}_2 \downarrow} \hat{c}_{\mathbf{k}_1 \uparrow}, \quad (22)$$

где  $\mathbf{k} = \mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}_1$ ; сумма в этом выражении берется с учетом условия  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2$ .

В дальнейшем мы воспользуемся обычным методом замены в гамильтониане взаимодействия  $\hat{H}_{int}$  истинного потенциала взаимодействия  $U(\mathbf{r})$  на эффективный потенциал  $V(\mathbf{r})$  с тем же значением длины рассеяния  $|a|$  при малых энергиях  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Такой метод сохраняет возможность использовать теорию возмущений. Выберем  $V(\mathbf{r})$  в простой форме сферической прямоугольной ямы глубиной  $V_0 \gg \varepsilon_F$  и радиусом  $R_0$ . Применимость теории возмущений предполагает выполнение неравенства  $\varkappa R_0 \ll 1$ , где  $\varkappa = \sqrt{mV_0}$ , при этом отсутствует и связанное состояние в яме. Легко проследить, что в случае

близости к резонансу  $|a| \gg R_0$ . В предположении малой плотности частиц выполняется неравенство  $k_F |a| \ll 1$  и, следовательно, в условиях резонанса  $k_F R_0 \ll k_F |a| \ll 1$ . Вследствие того, что  $V(\mathbf{r})$  резко убывает при  $|\mathbf{r}| > R_0$ , фурье-компонента  $V(\mathbf{k})$  быстро уменьшается при  $kR_0 \gtrsim 1$  ( $k \gg k_F$ ), при этом

$$V(\mathbf{k} \rightarrow 0) = \frac{4\pi}{m} a = g.$$

Трехчастичный коррелятор  $K^{(3)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}'_i)$  в представлении взаимодействия по  $\hat{H}_{int}$  может быть записан в виде

$$K^{(3)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}'_i) = \text{Sp} \left\{ \hat{\rho}_i^{(0)} \hat{c}_{\mathbf{k}'_1 \uparrow}^\dagger(0) \hat{c}_{\mathbf{k}'_2 \downarrow}^\dagger(0) \hat{c}_{\mathbf{k}'_3 \uparrow}^\dagger(0) \times \hat{c}_{\mathbf{k}_3 \uparrow}(0) \hat{c}_{\mathbf{k}_2 \downarrow}(0) \hat{c}_{\mathbf{k}_1 \uparrow}(0) \hat{S} \right\}, \quad (23)$$

где  $\hat{\rho}_i^{(0)}$  — матрица плотности идеального газа, оператор  $\hat{S} = S$ -матрица, имеющая вид [8]

$$\hat{S} = T \exp \left( -i \int_{-\infty}^{\infty} dt \hat{H}_{int} \right). \quad (24)$$

Учет поправки первого порядка по  $\hat{H}_{int}$  к коррелятору  $K^{(3)}$  приводит к выражению

$$K_1^{(3)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}'_i) = 2V(\mathbf{k}) \left[ \frac{n_{\mathbf{k}_1 \uparrow} n_{\mathbf{k}_2 \downarrow} (1 - n_{\mathbf{k}'_1 \uparrow}) (1 - n_{\mathbf{k}'_2 \downarrow})}{\varepsilon_{\mathbf{k}'_1} + \varepsilon_{\mathbf{k}'_2} - \varepsilon_{\mathbf{k}_1} - \varepsilon_{\mathbf{k}_2}} \times n_{\mathbf{k}_3 \uparrow} \delta_{\mathbf{k}_3; \mathbf{k}'_3} - (1 \rightleftharpoons 3) \right], \quad (25)$$

где  $\mathbf{k} = \mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}_2$ . Фурье-компонента  $V(\mathbf{k})$  резко уменьшается при  $kR_0 \gtrsim 1$  ( $k \gg k_F$ ). Это существенно, поскольку при подстановке (25) в (17) расходимость интеграла при больших импульсах  $k'_2$  от члена в квадратных скобках, пропорционального

$$\frac{n_{\mathbf{k}_1 \uparrow} n_{\mathbf{k}_2 \downarrow} n_{\mathbf{k}_3 \uparrow}}{\varepsilon_{\mathbf{k}'_1} + \varepsilon_{\mathbf{k}'_2} - \varepsilon_{\mathbf{k}_1} - \varepsilon_{\mathbf{k}_2}},$$

при интегрировании по  $k'_2$  обрезается только при учете зависимости  $V(\mathbf{k})$  от импульса. При этом значение интеграла оказывается пропорциональным  $1/R_0$  и перестает зависеть от длины рассеяния. Фактически вклад от рассматриваемого члена в  $K^{(3)}$  определяет некоторую перенормировку  $W_0$  (20). В связи с этим нас будет интересовать вклад от остальных членов в квадратных скобках в выражении (25). Для этих членов в (25) выполняются соотношения  $k_i, k'_i \lesssim k_F$ ,  $V(\mathbf{k}) = g$ . Подставляя  $K_1^{(3)}$  (25) в (17)

и вычисляя соответствующие интегралы, находим вероятность перехода  $W_1$ , а также общее выражение для  $W_n$  в линейном по взаимодействию приближении в отсутствие куперовского спаривания:

$$W_n = W_0 + W_1 = W_0(T) \left( 1 - \frac{6}{35\pi} (11 - 2 \ln 2) k_F |a| \right). \quad (26)$$

#### 4. ВЛИЯНИЕ КУПЕРОВСКОГО СПАРИВАНИЯ

Рассмотрим теперь вклад куперовского спаривания в формирование трехчастичного коррелятора (15). При усреднении по основному состоянию в (15) кроме нормальных средних необходимо учитывать аномальные средние. Вклад от аномальных средних без учета дополнительных перенормировок за счет разложения  $S$ -матрицы (24) может быть представлен в виде

$$K_S^{(3)} = - \left( \langle \hat{c}_{\mathbf{k}_1\uparrow}^\dagger(0) \hat{c}_{-\mathbf{k}_1\downarrow}^\dagger(0) \rangle \langle \hat{c}_{\mathbf{k}_1\uparrow}(0) \hat{c}_{-\mathbf{k}_1\downarrow}(0) \rangle \times \right. \\ \left. \times n_{\mathbf{k}_3} \delta_{\mathbf{k}_3; \mathbf{k}'_3} \delta_{\mathbf{k}'_2; -\mathbf{k}'_1} \delta_{\mathbf{k}_2; -\mathbf{k}_1} - (\mathbf{k}_1 \rightleftharpoons \mathbf{k}_3) \right), \quad (27)$$

где  $\langle \hat{c}_{\mathbf{k}_1\uparrow}(0) \hat{c}_{-\mathbf{k}_1\downarrow}(0) \rangle$  и  $\langle \hat{c}_{\mathbf{k}'_1\uparrow}^\dagger(0) \hat{c}_{-\mathbf{k}'_1\downarrow}^\dagger(0) \rangle$  — аномальные средние (см., например, [8, 9]). Если помимо аномальных средних учесть перенормировки  $S$ -матрицы (24) до первого и более высокого порядка по  $\hat{H}_{int}$  (22), то это приведет к возникновению дополнительного к (27) вклада, пропорционального  $k_F |a|$ , которым в случае газа малой плотности, т. е. малости параметра  $k_F |a| \ll 1$ , можно пренебречь. Вычисляя аномальное среднее по перестроенному в соответствии с теорией БКШ состоянию и используя стандартный метод  $u$ - $v$ -преобразования, имеем при температуре  $T = 0$

$$\langle \hat{c}_{\mathbf{k}_1\uparrow}(0) \hat{c}_{-\mathbf{k}_1\downarrow}(0) \rangle = \frac{\Delta}{E_{\mathbf{k}_1}},$$

где

$$E_{\mathbf{k}_1} = \sqrt{|\Delta|^2 + \left( \frac{\mathbf{k}_1^2}{2m} - \mu \right)^2},$$

$\Delta$  — куперовская щель в спектре одночастичных возбуждений. В рамках рассматриваемого метода интеграл по импульсам от полученного выражения легко вычисляется, что дает

$$\int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{\Delta}{E_{\mathbf{k}_1}} = \frac{2\Delta}{g}.$$

Легко проследить, что при  $T \neq 0$  этот результат сохраняется, если под  $\Delta$  понимать зависящую от температуры  $T$  ширину щели  $\Delta(T)$ . В результате после подстановки части трехчастичного коррелятора  $K_S^{(3)}$  (27), обусловленной куперовским спариванием, в выражение для полной вероятности процесса образования молекулы (17), находим часть  $W_S$  вероятности образования молекул, обусловленную куперовским спариванием:

$$W_S = W_0(T) \frac{9\pi^2}{4} \frac{1}{(k_F a)^2} \left( \frac{\Delta(T)}{\varepsilon_F} \right)^2, \quad (28)$$

где  $W_0(T)$  определяется выражением (21). Полная вероятность процесса образования молекул  $W$  является суммой нормальной части  $W_n$  (26) и части  $W_S$  (28), обусловленной куперовским спариванием,  $W = W_n + W_S$ . Из формулы (28) следует основной качественный результат: куперовское спаривание, иными словами, конденсат куперовских пар, усиливает трехчастичную рекомбинацию за счет образования молекул в газе ферми-атомов с отрицательной длиной рассеяния. В этом аспекте результат принципиально отличается от случая бозе-конденсации разреженного газа бозе-атомов, которая ведет к уменьшению трехчастичной рекомбинации.

Сравнивая температурную поправку к  $W_0(T)$  с  $W_S$  (28), мы видим, что поскольку  $T_c \approx \Delta(T=0)$ , в интервале  $T < T_c$  температурный ход  $W$  полностью определяется величиной вероятности  $W_S$  (28) с учетом зависимости  $\Delta(T)$ .

Итак, сравнивая результаты данной работы с результатами работы [5], в которой, в отличие от настоящей работы, рассматривался случай положительной амплитуды рассеяния ферми-атомов  $a > 0$ , следует отметить качественное различие в поведении вероятности образования молекул как функции амплитуды рассеяния. В случае большой положительной амплитуды рассеяния  $a > 0$  в системе существуют реальные слабо связанные состояния пары ферми-атомов — димеры, в отличие от случая отрицательной амплитуды  $a < 0$ , когда образуются куперовские пары. В работе [5] при  $a > 0$  вычислялась вероятность образования молекул за счет рассеяния димера на димере и за счет рассеяния атома на димере. Если положительная амплитуда рассеяния  $a$  растёт, увеличивается и радиус димера, а его энергия связи уменьшается. В этом случае, чем больше размер димера, тем больше этот димер похож на два практически свободных фермиона, которые могут уходить друг от друга на достаточно большие расстояния. В связи с этим вероятность процесса

образования молекулы при рассеянии атома на димере, во время которого должны встретиться три ферми-атома в малой области пространства, уменьшается с ростом размера димера, а значит, с ростом амплитуды рассеяния  $a$ .

В отличие от случая  $a > 0$  в случае отрицательной амплитуды рассеяния  $a < 0$ , который рассматривается в нашей работе, с ростом модуля величины амплитуды рассеяния радиус куперовской пары уменьшается, что ведет к росту вероятности встречи трех частиц в малой области пространства и, соответственно, к росту вероятности образования молекулы.

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассматривается роль многочастичных корреляций в процессе рекомбинации атомного ферми-газа, вызванного рождением молекул в случае отрицательной длины рассеяния  $a < 0$ . В частности, исследуется влияние куперовского спаривания на скорость процесса рекомбинации. Показано, что куперовское спаривание ведет к росту трехчастичного коррелятора и, в связи с этим, к росту скорости рекомбинации. Роль куперовского спаривания анализируется в предположении малой плотности системы и возможности разложения по параметру  $k_F|a| \ll 1$ . Это предположение позволяет провести как качественный, так и количественный анализ вклада куперовского спаривания в процесс рождения молекул. Экстраполяция полученных результа-

тов в область  $k_F|a| \lesssim 1$  дает значение вероятности  $W_S$  порядка значения  $W_0$ . Эти оценки демонстрируют возможность экспериментального наблюдения эффекта.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Каган, Б. В. Свистунов, Г. В. Шляпников, Письма в ЖЭТФ **42**, 169 (1985).
2. E. A. Burt, R. W. Ghrist, C. J. Myatt, E. A. Cornell, and C. E. Wieman, Phys. Rev. Lett. **79**, 337 (1997).
3. Ю. Каган, Б. В. Свистунов, Г. В. Шляпников, ЖЭТФ **93**, 552 (1987).
4. X. Du, Y. Zhang, and J. E. Thomas, Phys. Rev. Lett. **102**, 250402 (2009).
5. D. S. Petrov, C. Salomon, and G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. Lett. **93**, 090404 (2009).
6. D. S. Petrov, Phys. Rev. A **67**, 010703 (2003).
7. K. Helfrich, H.-W. Hammer, and D. S. Petrov, Phys. Rev. A **81**, 042715 (2010).
8. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Добросвет, Москва (1998), с. 81, 446.
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. 2, Наука, Москва (1978), с. 188.