

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ СОЛИТОНОВ В КВАЗИРЕЗОНАНСНОЙ СРЕДЕ СО ШТАРКОВСКОЙ ДЕФОРМАЦИЕЙ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ

С. В. Сазонов^{a*}, Н. В. Устинов^{b**}

^a *Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия*

^b *Калининградский филиал Московского государственного университета путей сообщения
236039, Калининград, Россия*

Поступила в редакцию 12 марта 2012 г.

Исследована нелинейная динамика векторного двухкомпонентного оптического импульса, распространяющегося в режиме квазирезонанса в среде несимметричных квантовых объектов, при шарковском расщеплении квантовых уровней внешним электрическим полем. Рассмотрен случай, когда обыкновенная компонента оптического импульса вызывает σ -переходы, а необыкновенная компонента, возбуждая π -переход, еще и смещает частоты разрешенных переходов за счет динамического эффекта Штарка. Обнаружено, что в условиях резонанса Захарова – Бенни распространение оптического импульса сопровождается генерацией электромагнитного всплеска терагерцевого диапазона и описывается векторным обобщением нелинейной системы Ядзими – Ойкавы. Показано, что эта система (а также ее формальное обобщение с произвольным числом оптических компонент) интегрируема методом обратной задачи рассеяния. Найдены соответствующие преобразования Дарбу для получения многосолитонных решений. Исследовано влияние поперечных эффектов на распространение векторных солитонов. Определены условия, при которых поперечная динамика приводит к самофокусировке (дефокусировке) солитонов.

1. ВВЕДЕНИЕ

К оптическим солитонам приводит весьма широкий класс задач нелинейной оптики диспергирующих сред [1–4]. Наиболее часто в экспериментальных и теоретических исследованиях можно встретить резонансные и нерезонансные солитоны. В первом случае несущая частота солитона близка к частоте одного из разрешенных квантовых переходов настолько, что спектр импульса за счет своей конечной длительности захватывает частоту этого перехода. Во втором же случае несущая частота далека от всех линий резонансного поглощения среды. Однако в ряде задач имеет смысл выделить промежуточный случай и рассматривать так называемые квазирезонансные солитоны. К ним относятся оптические импульсы, несущая частота ω которых так отстроена от ближайшей к ней частоты ω_0 разрешенного перехода, что соответствующая отстройка $\Delta = \omega_0 - \omega$

по абсолютной величине значительно меньше обеих частот ω и ω_0 . В то же время величина Δ настолько велика, что спектр импульса практически не захватывает рассматриваемый переход. С учетом того, что ширина $\delta\omega$ спектра импульса, фазовой модуляцией которого можно пренебречь, связана с его длительностью τ_p соотношением $\delta\omega \approx 1/\tau_p$, условие квазирезонансности примет вид

$$1/\tau_p \ll |\Delta| \ll \omega, \omega_0. \quad (1)$$

Левая часть данного неравенства говорит о том, что в спектре импульса практически отсутствуют фурье-компоненты, резонансные квантовым переходам среды. Поэтому взаимодействие импульса со средой относительно слабое. С другой стороны, правая часть неравенства (1) позволяет при рассмотрении такого взаимодействия учитывать только ограниченное число переходов среды, что существенно облегчает исследование. Нерезонансные переходы, для которых отстройка от несущей частоты импуль-

*E-mail: sazonov.sergey@gmail.com

**E-mail: n_ustinov@mail.ru

са порядка ω и ω_0 , можно вовсе исключить из рассмотрения.

Если оптический импульс не является резонансным, то поляризационный отклик среды на его воздействие можно представить в виде аддитивного разложения по степеням электрического поля и его временным производным. В оптически изотропной среде поле будет иметь только нечетные степени из-за симметрии задачи. При этом наименьшая степень нелинейности равна трем, и говорят о кубической нелинейности. Как в нерезонансном [1–5], так и в квазирезонансном случае [6] при учете в минимальных порядках нелинейности и групповой дисперсии распространение импульса в оптически изотропной среде описывается нелинейным уравнением Шредингера (НУШ). При квазирезонансном взаимодействии возникают ситуации, когда необходимо модифицировать это уравнение, учтя высшие степени нелинейности и ее дисперсию [7]. Как известно, НУШ обладает солитонными решениями и принадлежит к уравнениям, интегрируемым методом обратной задачи рассеяния (МОЗР) [8–11]. Интегрируемым обобщением НУШ на двухкомпонентный (векторный) случай является система Манаква [12]. Эта система позволяет учесть изменение поляризации оптических солитонов.

Иная ситуация имеет место в анизотропных средах. Там наименьшая нелинейность в разложении отклика среды по степеням электрического поля импульса оказывается квадратичной. В результате возникает возможность генерации электромагнитного излучения на разностной частоте двух оптических импульсов. Если частоты этих импульсов достаточно близки, так что их разность выходит за пределы оптического диапазона, то таким образом можно получить излучение инфракрасного и терагерцевого диапазонов [13, 14]. К настоящему времени вопросы генерации терагерцевого излучения приобрели особую популярность в связи с его использованием в медицине, системах безопасности, обработки и восстановления изображений и т. д. [15].

Вместо использования двух оптических сигналов с близкими частотами можно использовать один оптический импульс длительностью порядка 1 пс [16]. Тогда его спектральная ширина $\delta\omega \approx 1/\tau_p \sim 10^{12} \text{ с}^{-1}$. Следовательно, в спектре такого импульса уже содержатся фурье-компоненты, разностные частоты между которыми лежат в терагерцевом диапазоне. Поскольку спектр оптического импульса является сплошным, ясно, что он содержит непрерывное множество разностных частот терагерцевого диапазона. Поэтому ширина спектра генерируемого

терагерцевого сигнала и его центральная частота являются величинами одного порядка и имеют значение примерно $1/\tau_p$. При этом длительность данного сигнала не может превышать длительности τ_p входного фемтосекундного импульса. Таким образом, генерируемый терагерцевый сигнал является широкополосным и содержит внутри себя всего лишь порядка одного периода электромагнитных колебаний.

Исходя из представленных выше очевидных соображений, нетрудно вывести условие синхронизма, при котором пикосекундный оптический импульс способен породить в квадратично нелинейной среде широкополосный терагерцевый сигнал. Пусть ω_1 и ω_2 — две близкие частоты из спектра фемтосекундного импульса и $\omega_T = \omega_2 - \omega_1$ — одна из частот генерируемого терагерцевого сигнала. Чтобы генерация была эффективной, должно выполняться условие пространственного синхронизма $\mathbf{k}_T = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$, где \mathbf{k}_T , \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_1 — волновые векторы, соответствующие частотам ω_T , ω_2 и ω_1 . Учитывая малость вектора \mathbf{k}_T в сравнении с \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_1 , запишем соотношение

$$\begin{aligned} \omega_2 = \omega(\mathbf{k}_2) &= \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_T) \approx \\ &\approx \omega(\mathbf{k}_1) + \frac{\partial\omega(\mathbf{k}_1)}{\partial\mathbf{k}_1} \cdot \mathbf{k}_T = \omega_1 + \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{k}_T, \end{aligned}$$

где \mathbf{v}_g — групповая скорость оптического импульса с несущей частотой ω_1 . Тогда $\omega_T = \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{k}_T$. Отсюда приходим к условию черенковского вида: $\cos\theta = v_g/v_{ph}$, где $v_{ph} = \omega_T/k_T$ — фазовая скорость терагерцевого импульса, θ — угол между оптическим импульсом и генерируемым терагерцевым сигналом. Именно такой черенковский механизм использовался в работах [13, 14]. В случае коллинеарного распространения обоих сигналов приходим к равенству

$$v_g = v_{ph}, \quad (2)$$

называемому в теории нелинейных волн условием резонанса Захарова–Бенни (РЗБ) [11].

В терагерцевой области спектра, вдали от полюса поглощения, можно пренебречь дисперсией, т. е. считать величину v_{ph} постоянной в широком частотном диапазоне. Тогда, если ограничиться минимальной (квадратичной) нелинейностью и минимальным порядком групповой дисперсии оптического импульса, генерация терагерцевого излучения в анизотропной среде в коллинеарном режиме описывается системой уравнений Ядзимы–Ойкавы (ЯО) [17–19]. Эта система является хорошо известной нелинейной системой, интегрируемой с помощью МОЗР [11, 20, 21], и представляет собой однонаправленный вариант неинтегрируемой системы уравне-

ний Захарова, выведенной в физике плазмы при исследовании взаимодействия ленгмюровских и ионно-звуковых волн [22]. Применительно к оптике анизотропных сред первое уравнение системы ЯО определяет динамику огибающей оптического импульса, второе — эволюцию поля порождаемого им терагерцевого сигнала. Поскольку в генерации участвует лишь одна компонента оптического поля, такую модель можно назвать скалярной.

Здесь возникает естественный вопрос о возможности интегрируемого векторного обобщения системы ЯО для оптической генерации терагерцевого излучения в анизотропной среде, подобно тому, как в случае изотропных сред система Манакова явилась интегрируемым векторным обобщением НУШ.

Анизотропия среды, необходимая для появления квадратичной оптической нелинейности, помимо прочего, может быть создана вкраплением в изотропную среду несимметричных квантовых объектов (НКО) типа квантовых ям, квантовых нитей [23–28], примесных ионов [29], полярных молекул [30] и т. д., обладающих в стационарных квантовых состояниях постоянными дипольными моментами. Наличие постоянного дипольного момента приводит к тому, что поле импульса не только возбуждает квантовые переходы, но также смещает их частоты за счет динамического эффекта Штарка [27, 28]. По принятой терминологии среды с ненулевым постоянным дипольным моментом называют штарковскими [27].

Аддитивное разложение поляризованного отклика среды по степеням нелинейности и порядкам дисперсии возможно только в нерезонансном и квазирезонансном режимах. Взаимодействие импульса со средой оказывается значительно сильнее в последнем случае. Поэтому естественно искать векторное обобщение системы ЯО, рассматривая квазирезонансное взаимодействие оптического импульса со штарковскими средами, чему и посвящена настоящая работа. При этом будем также считать, что помимо динамического штарк-эффекта примесные НКО подвержены еще и статическому эффекту Штарка, вызывающему дополнительное расщепление квантовых уровней за счет снятия вырождения по величине проекции углового момента. Как результат, разные квантовые переходы возбуждаются компонентами электрического поля, поляризованными в разных плоскостях и, вообще говоря, обладающими разными частотами. Данное обстоятельство и приводит к векторному характеру оптического импульса.

С точки зрения эксперимента весьма важным яв-

ляется вопрос о влиянии поперечных возмущений на распространение импульсов. Особый интерес здесь представляет выяснение условий, при которых реализуются режимы самофокусировки, дефокусировки или самоканализации при компенсации самофокусировки процессом дифракции, что также является предметом настоящей работы.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 выводится система материальных и волновых уравнений, описывающая взаимодействие штарковского дублета, обладающего постоянным дипольным моментом и помещенного во внешнее электрическое поле, с двухчастотным векторным полем светового импульса. В разд. 3 к полученным уравнениям применено квазирезонансное приближение, которое позволило исключить материальные переменные и свести рассмотрение к системе нелинейных волновых уравнений типа Манакова–Ядзими–Ойкавы. При выполнении условия сильной анизотропии эта система представляет собой векторное (двухкомпонентное) обобщение системы ЯО. В разд. 4 показана интегрируемость векторной системы ЯО с произвольным числом оптических компонент, выписаны формулы преобразования Дарбу и с их помощью получены одно- и двухсолитонные решения. Исследованию влияния поперечной динамики на распространение уединенных импульсов векторной системы Манакова–Ядзими–Ойкавы посвящен разд. 5. В Заключение обсуждаются основные результаты работы и намечаются дальнейшие перспективы в обозначенной области исследований.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. СИСТЕМА МАТЕРИАЛЬНЫХ И ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть НКО погружены в изотропную матрицу и выстроены в ней вдоль внешнего электрического поля \mathbf{E}_{ext} , параллельно друг другу, образуя оптическую ось z . В таких условиях гамильтониан \hat{H}_0 оптических электронов, связанных с НКО, обладает аксиальной симметрией и, значит, его собственные функции, описывающие стационарные состояния, можно записать в координатном представлении в виде

$$\tilde{\Phi}_{\mu,m} = f_{\mu,m}(r, z)e^{im\varphi}, \quad (3)$$

где r, z, φ — координаты цилиндрической системы, $f_{\mu,m}(r, z)$ — вещественная квадратично интегрируемая функция, m — проекция углового момента оптического электрона на ось z (в единицах постоянной

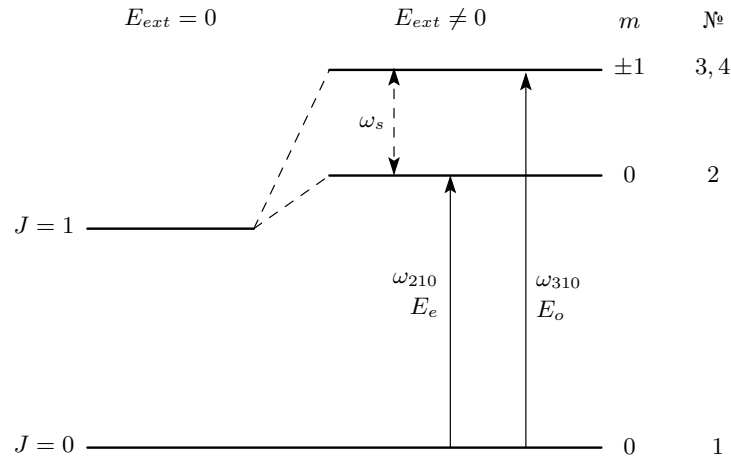


Рис. 1. Разрешенные квантовые переходы из s - в p -состояние в условиях штарковского расщепления уровней при распространении поперек внешнего электрического поля \mathbf{E}_{ext} . Обыкновенная компонента E_o импульса вызывает вырожденный σ -переход $1 \leftrightarrow 3, 1 \leftrightarrow 4$ с частотой ω_{310} ; необыкновенная составляющая E_e возбуждает π -переход $1 \leftrightarrow 2$ с частотой ω_{210} и динамически, пропорционально E_e , смещает частоты переходов $1 \leftrightarrow 2$ и $1 \leftrightarrow 3, 1 \leftrightarrow 4$

Планка \hbar), μ — набор квантовых чисел, отличных от m .

В представлении собственных функций (3) матричный элемент оператора дипольного момента $\hat{\mathbf{d}}$, соответствующий состояниям с квантовыми числами μ_1, m_1 и μ_2, m_2 , есть

$$\langle \mu_2, m_2 | \hat{\mathbf{d}} | \mu_1, m_1 \rangle = -e \langle \mu_2, m_2 | \mathbf{r} | \mu_1, m_1 \rangle,$$

где e — заряд электрона. Декартовы компоненты радиус-вектора \mathbf{r} обычным образом связаны с координатами цилиндрической системы: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$. Нетрудно видеть, что отличными от нуля будут следующие недиагональные матричные элементы:

$$\langle \mu_2, m \pm 1 | \hat{d}_x | \mu_1, m \rangle = \frac{d}{\sqrt{2}},$$

$$\langle \mu_2, m \pm 1 | \hat{d}_y | \mu_1, m \rangle = \mp i \frac{d}{\sqrt{2}},$$

$$\langle \mu_2, m | \hat{d}_z | \mu_1, m \rangle = d_z,$$

где

$$d = -\sqrt{2}\pi e \int_0^\infty r^2 dr \int_{-\infty}^\infty f_{\mu_2, m \pm 1} f_{\mu_1, m} dz,$$

$$d_z = -\pi e \int_0^\infty r dr \int_{-\infty}^\infty z f_{\mu_2, m} f_{\mu_1, m} dz.$$

Диагональные элементы могут быть отличными от нуля только у z -й проекции оператора дипольного момента:

$$\langle \mu, m | \hat{d}_z | \mu, m \rangle = D_{\mu\mu} = -e \int_0^\infty r dr \int_{-\infty}^\infty z f_{\mu, m}^2 dz.$$

Рассмотрим два квантовых уровня, характеризующихся, в числе прочего, полными угловыми моментами $J = 0$ (основной s -уровень) и $J = 1$ (возбужденный p -уровень). Здесь имеются два σ -перехода $1 \leftrightarrow 3$ и $1 \leftrightarrow 4$ (см. рис. 1), в которых m изменяется на ± 1 , и один π -переход $1 \leftrightarrow 2$, в котором m не изменяется и остается равным нулю. Внешнее электрическое поле \mathbf{E}_{ext} снимает вырождение возбужденного состояния по абсолютной величине m .

При наблюдении перпендикулярно оси z интенсивность π -перехода в два раза превосходит интенсивности каждого из σ -переходов [31]. Поэтому, считая, что штарковское расщепление уровней внешним полем относительно невелико, положим $d_z = d$. Кроме того, будем считать, что для возбужденного состояния диагональные элементы оператора дипольного момента равны друг другу: $D_{44} = D_{33} = D_{22}$. Но при этом $D_{22} \neq D_{11}$. Суммируя сказанное выше, представим матрицу оператора дипольного момента НКО в следующем виде:

$$\hat{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} D_{22}\mathbf{e}_z & 0 & 0 & d\frac{\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} \\ 0 & D_{22}\mathbf{e}_z & 0 & d\frac{\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & D_{22}\mathbf{e}_z & d\mathbf{e}_z \\ d\frac{\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} & d\frac{\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} & d\mathbf{e}_z & D_{11}\mathbf{e}_z \end{pmatrix},$$

где \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y и \mathbf{e}_z — орты декартовых осей.

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} = \begin{pmatrix} \varepsilon_3 - D_{22}E_e & 0 & 0 & -\frac{dE_o}{\sqrt{2}} \\ 0 & \varepsilon_3 - D_{22}E_e & 0 & -\frac{dE_o}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 - D_{22}E_e & -dE_e \\ -\frac{dE_o}{\sqrt{2}} & -\frac{dE_o}{\sqrt{2}} & -dE_e & \varepsilon_1 - D_{11}E_e \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где ε_1 , ε_2 и ε_3 — энергии стационарных состояний.

Используя (4), можно записать систему уравнений фон Неймана для элементов матрицы плотности $\hat{\rho}$ НКО. При этом нетрудно видеть, что если до прохождения импульса выполнялись равенства $\rho_{31} = \rho_{41}$, $\rho_{32} = \rho_{42}$, $\rho_{33} = \rho_{44}$ и $\rho_{34} = \rho_{43} = 0$, то они останутся справедливыми и в последующие моменты времени. Эти равенства будут иметь место, например, при физически разумном предположении о том, что до импульсного воздействия в среде отсутствовала квантовая когерентность, а стационарные состояния НКО были заселены в соответствии со статистикой Больцмана. В таких условиях четырехуровневая квантовая система эффективно сводится к трехуровневой с помощью замены переменных $\tilde{\rho}_{13} = \sqrt{2}\rho_{13}$, $\tilde{\rho}_{23} = \sqrt{2}\rho_{23}$, $\tilde{\rho}_{33} = 2\rho_{33}$. В терминах новых переменных система материальных уравнений, определяющая эволюцию НКО, примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}_{33}}{\partial t} &= i\frac{dE_o}{\hbar}(\tilde{\rho}_{13} - \tilde{\rho}_{13}^*), \\ \frac{\partial \rho_{22}}{\partial t} &= i\frac{dE_e}{\hbar}(\rho_{12} - \rho_{12}^*), \\ \frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} &= i\frac{dE_e}{\hbar}(\rho_{12}^* - \rho_{12}) + i\frac{dE_o}{\hbar}(\tilde{\rho}_{13}^* - \tilde{\rho}_{13}), \\ \frac{\partial \tilde{\rho}_{23}}{\partial t} &= i\omega_{320}\tilde{\rho}_{23} + i\frac{d}{\hbar}(E_e\tilde{\rho}_{13} - E_o\rho_{12}^*), \end{aligned}$$

Пусть световой импульс распространяется перпендикулярно направлению внешнего электрического поля \mathbf{E}_{ext} , вдоль оси y . Тогда поле импульса состоит из двух компонент: обыкновенной $E_o \equiv E_x$ и необыкновенной $E_e \equiv E_z$. Учитывая, что гамильтониан взаимодействия НКО с полем импульса в электродипольном приближении есть $\hat{V} = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}$, получим выражение для гамильтониана \hat{H} оптического электрона:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}_{13}}{\partial t} &= i\left(\omega_{310} - \frac{DE_e}{\hbar}\right)\tilde{\rho}_{13} + \\ &+ i\frac{dE_e}{\hbar}\tilde{\rho}_{23} + i\frac{dE_o}{\hbar}(\tilde{\rho}_{33} - \rho_{11}), \\ \frac{\partial \rho_{12}}{\partial t} &= i\left(\omega_{210} - \frac{DE_e}{\hbar}\right)\rho_{12} + \\ &+ i\frac{dE_o}{\hbar}\tilde{\rho}_{23}^* + i\frac{dE_e}{\hbar}(\rho_{22} - \rho_{11}). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\omega_{310} = (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)/\hbar$ и $\omega_{210} = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/\hbar$ — собственные частоты разрешенных квантовых переходов соответственно $1 \leftrightarrow 3$ и $1 \leftrightarrow 2$, $\omega_{320} = \omega_s = (\varepsilon_3 - \varepsilon_2)/\hbar$ — частота штарковского расщепления уровней, переход между которыми запрещен (рис. 1), $D \equiv D_{22} - D_{11}$ — постоянный дипольный момент.

Учитывая, что поляризационный отклик системы НКО $\mathbf{P} = n \text{Sp}(\hat{\rho}\hat{\mathbf{d}})$, где n — их плотность, запишем

$$P_o = P_x = dn(\tilde{\rho}_{13} + \tilde{\rho}_{13}^*)$$

и, приняв во внимание равенство $\tilde{\rho}_{33} + \rho_{22} + \rho_{11} = 1$, найдем

$$P_e = P_z = n[d(\rho_{12} + \rho_{12}^*) + D(1 - \rho_{11})].$$

Тогда волновые уравнения для полевых компонент примут вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 E_o}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_o}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \times \\ & \times \left[dn(\tilde{\rho}_{13} + \tilde{\rho}_{13}^*) + \int_0^\infty \chi(\tilde{t}) E_o(t - \tilde{t}) d\tilde{t} \right] - \Delta_\perp E_o, \\ & \frac{\partial^2 E_e}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_e}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \times \\ & \times \left[dn(\rho_{12} + \rho_{12}^*) - Dn\rho_{11} + \int_0^\infty \chi(\tilde{t}) E_e(t - \tilde{t}) d\tilde{t} \right] - \\ & - \Delta_\perp E_e, \end{aligned} \quad (6)$$

где c — скорость света в вакууме, $\chi(\tau)$ — феноменологическая временная восприимчивость изотропной матрицы, в которую помещены НКО,

$$\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

— поперечный лапласиан.

Из системы (5) видно, что обыкновенная компонента импульса возбуждает вырожденный σ -переход $1 \leftrightarrow 3$, а необыкновенная составляющая одновременно выполняет две функции: возбуждает π -переход $1 \leftrightarrow 2$ и за счет динамического эффекта Штарка сдвигает пропорционально постоянному дипольному моменту частоты обоих разрешенных переходов.

Ниже будем считать, что обыкновенная и необыкновенная компоненты на входе в среду обладают соответственно несущими частотами ω_{31} и ω_{21} . Как видно из правой части второго уравнения (6), за счет изменения населенности ρ_{11} в плоскости необыкновенной компоненты должен порождаться импульс без несущей частоты. Это и есть терагерцевый широкополосный сигнал. Представим компоненты поля импульса и недиагональные элементы $\hat{\rho}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} E_o &= \psi_o e^{i(\omega_{31}t - k_{31}y)} + c.c., \\ E_e &= \psi_e e^{i(\omega_{21}t - k_{21}y)} + c.c. + E_T, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{13} &= R_{13} e^{i(\omega_{31}t - k_{31}y)}, \quad \rho_{12} = R_{12} e^{i(\omega_{21}t - k_{21}y)}, \\ \tilde{\rho}_{23} &= R_{23} e^{i(\omega_{32}t - k_{32}y)}, \end{aligned} \quad (8)$$

где k_{31} и k_{21} — волновые числа, соответствующие несущим частотам ω_{31} и ω_{21} , $\omega_{32} = \omega_{31} - \omega_{21}$, $k_{32} = k_{31} - k_{21}$, ψ_o и ψ_e — огибающие соответствующих оптических компонент, E_T — электрическое поле генерируемой терагерцевой компоненты.

Подставив (7), (8) в (5) и отбросив слагаемые, осциллирующие на частотах $2\omega_{31}$ и $2\omega_{21}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}_{33}}{\partial t} &= i \frac{d}{\hbar} (\psi_o^* R_{13} - \psi_o R_{13}^*), \\ \frac{\partial \rho_{22}}{\partial t} &= i \frac{d}{\hbar} (\psi_e^* R_{12} - \psi_e R_{12}^*), \\ \frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} &= i \frac{d}{\hbar} (\psi_e R_{12}^* - \psi_e^* R_{12} + \psi_o R_{13}^* - \psi_o^* R_{13}), \\ \frac{\partial R_{23}}{\partial t} &= i \Delta_{32} R_{23} + i \frac{d}{\hbar} (\psi_e^* R_{13} - \psi_o R_{12}^*), \\ \frac{\partial R_{13}}{\partial t} &= i \left(\Delta_{31} - \frac{D}{\hbar} E_T \right) R_{13} + i \frac{d}{\hbar} \psi_e R_{23} + \\ &+ i \frac{d}{\hbar} \psi_o (\tilde{\rho}_{33} - \rho_{11}), \\ \frac{\partial R_{12}}{\partial t} &= i \left(\Delta_{21} - \frac{D}{\hbar} E_T \right) R_{12} + i \frac{d}{\hbar} \psi_o R_{23}^* + \\ &+ i \frac{d}{\hbar} \psi_e (\rho_{22} - \rho_{11}), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\Delta_{31} = \omega_{31} - \omega_{310}, \quad \Delta_{21} = \omega_{21} - \omega_{210},$$

$$\Delta_{32} = \Delta_{31} - \Delta_{21}.$$

При подстановке (7) в (6) пренебрежем групповой дисперсией матрицы, т. е. положим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \chi(\tilde{t}) E_o(t - \tilde{t}) d\tilde{t} &= e^{i(\omega_{31}t - k_{31}y)} \times \\ &\times \int_0^\infty \chi(\tilde{t}) e^{-i\omega_{31}\tilde{t}} \psi_o(t - \tilde{t}) d\tilde{t} + c.c. \approx \\ &\approx \chi_\omega \psi_o e^{i(\omega_{31}t - k_{31}y)} + c.c., \\ \int_0^\infty \chi(\tilde{t}) E_e(t - \tilde{t}) d\tilde{t} &= e^{i(\omega_{21}t - k_{21}y)} \times \\ &\times \int_0^\infty \chi(\tilde{t}) e^{-i\omega_{21}\tilde{t}} \psi_e(t - \tilde{t}) d\tilde{t} + c.c. + \\ &+ \int_0^\infty \chi(\tilde{t}) E_T(t - \tilde{t}) d\tilde{t} \approx \chi_\omega \psi_e e^{i(\omega_{21}t - k_{21}y)} + c.c. + \chi_T E_T, \end{aligned}$$

где частотные оптическая χ_ω и терагерцевая χ_T восприимчивости матрицы определяются выражениями

$$\begin{aligned} \chi_\omega &\approx \chi_{\omega_{31}} = \int_0^\infty \chi(\tilde{t}) e^{-i\omega_{31}\tilde{t}} d\tilde{t} \approx \chi_{\omega_{21}} = \\ &= \int_0^\infty \chi(\tilde{t}) e^{-i\omega_{21}\tilde{t}} d\tilde{t}, \end{aligned}$$

$$\chi_T = \int_0^\infty \chi(\tilde{t}) d\tilde{t}.$$

Второе уравнение системы (6) расцепим на два уравнения: для оптической и терагерцевой компонент. Для обеих оптических компонент воспользуемся стандартным приближением медленно меняющихся огибающих [5, 32]. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_o}{\partial y} + \frac{n_{opt}}{c} \frac{\partial \psi_o}{\partial t} &= -i \frac{4\pi dn\omega_{31}}{cn_{opt}} R_{13} - \\ &\quad - i \frac{c}{2n_{opt}\omega_{31}} \Delta_\perp \psi_o, \\ \frac{\partial \psi_e}{\partial y} + \frac{n_{opt}}{c} \frac{\partial \psi_e}{\partial t} &= \\ &= -i \frac{4\pi dn\omega_{21}}{cn_{opt}} R_{12} - i \frac{c}{2n_{opt}\omega_{21}} \Delta_\perp \psi_e, \\ \frac{\partial^2 E_T}{\partial y^2} - \frac{n_T^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_T}{\partial t^2} &= \\ &= -\frac{4\pi Dn}{c^2} \frac{\partial^2 \rho_{11}}{\partial t^2} - \Delta_\perp E_T. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$$n_{opt} = \sqrt{1 + 4\pi\chi_\omega}, \quad n_T = \sqrt{1 + 4\pi\chi_T}$$

— соответственно оптический и терагерцевый показатели преломления матрицы и, кроме того, положено, что $k_{31} = n_{opt}\omega_{31}/c$, $k_{21} = n_{opt}\omega_{21}/c$.

Система (9), (10) описывает взаимодействие НКО с полем проходящего векторного светового импульса и генерацию за счет постоянного дипольного момента терагерцевого сигнала. При отсутствии одной из оптических компонент (что предполагает равенство нулю соответствующих элементов матрицы плотности) эта система сведется в одномерном случае к системе синхронизма длинных и коротких волн, подробно исследованной в работе [33]. Примечательно, что, как и упомянутые во Введении НУШ, системы Манакова и ЯО, она тоже является интегрируемой в рамках МОЗР.

3. КВАЗИРЕЗОНАНСНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Применим к выведенной в предыдущем разделе системе материальных и волновых уравнений квазирезонансное приближение. Исходя из условия (1), разрешим систему (9) методом последовательных приближений по малому параметру

$$\varepsilon = (\Delta_{31}\tau_p)^{-1} \approx (\Delta_{21}\tau_p)^{-1}.$$

При этом будем также считать, что $DE_T/\hbar\Delta_{31} \ll 1$. Тогда из пятого уравнения системы (9) получим

$$\begin{aligned} R_{13} &\approx \frac{d\psi_o}{\hbar\Delta_{31}} \left(1 + \frac{DE_T}{\hbar\Delta_{31}}\right) (\rho_{11} - \tilde{\rho}_{33}) - \\ &\quad - \frac{d\psi_e}{\hbar\Delta_{31}} R_{23} - \frac{i}{\Delta_{31}} \frac{\partial R_{13}}{\partial t} \approx \frac{d\psi_o}{\hbar\Delta_{31}} (\rho_{11} - \tilde{\rho}_{33}) + \\ &\quad + \frac{dDE_T\psi_o}{(\hbar\Delta_{31})^2} - \frac{d\psi_e}{\hbar\Delta_{31}} R_{23} - \frac{i}{\Delta_{31}} \frac{\partial R_{13}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогично, из шестого уравнения этой системы имеем

$$\begin{aligned} R_{12} &\approx \frac{d\psi_e}{\hbar\Delta_{21}} \left(1 + \frac{DE_T}{\hbar\Delta_{21}}\right) (\rho_{11} - \rho_{22}) - \frac{d\psi_o}{\hbar\Delta_{21}} R_{23}^* - \\ &\quad - \frac{i}{\Delta_{21}} \frac{\partial R_{12}}{\partial t} \approx \frac{d\psi_e}{\hbar\Delta_{21}} (\rho_{11} - \rho_{22}) + \frac{dDE_T\psi_e}{(\hbar\Delta_{21})^2} - \\ &\quad - \frac{d\psi_o}{\hbar\Delta_{21}} R_{23}^* - \frac{i}{\Delta_{21}} \frac{\partial R_{12}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставив (11) и (12) в четвертое уравнение системы (9), найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{23}}{\partial t} &= i \left(\Delta_{31} + \frac{d^2|\psi_o|^2}{\hbar\Delta_{31}} - \Delta_{21} - \frac{d^2|\psi_e|^2}{\hbar\Delta_{21}} \right) R_{23} + \\ &\quad + i \frac{d^2}{\hbar^2} \frac{\Delta_{21} - \Delta_{31}}{\Delta_{21}\Delta_{31}} \left(1 + \frac{D}{\hbar} \frac{\Delta_{21} + \Delta_{31}}{\Delta_{21}\Delta_{31}} E_T \right) \psi_e^* \psi_o + \\ &\quad + \frac{d}{\hbar} \left(\frac{\psi_o}{\Delta_{21}} \frac{\partial R_{12}^*}{\partial t} + \frac{\psi_e^*}{\Delta_{31}} \frac{\partial R_{13}}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Пусть обе отстройки от резонанса одинаковы: $\Delta_{21} = \Delta_{31} = \Delta$. В этом случае несущие частоты обеих импульсных компонент отстроены друг от друга на величину ω_s . В дальнейшем будем учитывать нелинейность не выше третьего порядка. Тогда в (13) останется только последнее слагаемое. Подставим в него вместо R_{13} и R_{12} первые слагаемые правых частей уравнений (11) и (12). При этом примем во внимание наложенное ранее условие $DE_T/\hbar\Delta \ll 1$ и, поскольку при квазирезонансе населенности квантовых уровней меняются слабо, то населенность основного уровня будем считать равной своему начальному значению, за которое возьмем 1: $\rho_{11} = 1$, а, следовательно, будем считать $\rho_{22} = \tilde{\rho}_{33} = 0$. Интегрирование полученного в результате равенства дает

$$R_{23} = \left(\frac{d}{\hbar\Delta} \right)^2 \psi_e^* \psi_o.$$

Теперь равенства (11) и (12) примут вид

$$R_{13} = \frac{d\psi_o}{\hbar\Delta}(\rho_{11} - \tilde{\rho}_{33}) + \frac{dDE_T\psi_o}{(\hbar\Delta)^2} - \left(\frac{d}{\hbar\Delta}\right)^3 |\psi_e|^2 \psi_o - \frac{i}{\Delta} \frac{\partial R_{13}}{\partial t},$$

$$R_{12} = \frac{d\psi_e}{\hbar\Delta}(\rho_{11} - \rho_{22}) + \frac{dDE_T\psi_e}{(\hbar\Delta)^2} - \left(\frac{d}{\hbar\Delta}\right)^3 |\psi_o|^2 \psi_e - \frac{i}{\Delta} \frac{\partial R_{12}}{\partial t}.$$

Положив здесь в правых частях $R_{13} = d\psi_o/\hbar\Delta$ и $R_{12} = d\psi_e/\hbar\Delta$, во втором приближении по ε имеем

$$R_{13} = \frac{d\psi_o}{\hbar\Delta}(\rho_{11} - \tilde{\rho}_{33}) + \frac{dDE_T\psi_o}{(\hbar\Delta)^2} - \left(\frac{d}{\hbar\Delta}\right)^3 |\psi_e|^2 \psi_o - \frac{id}{\hbar\Delta^2} \frac{\partial \psi_o}{\partial t} - \frac{d}{\hbar\Delta^3} \frac{\partial^2 \psi_o}{\partial t^2}, \quad (14)$$

$$R_{12} = \frac{d\psi_e}{\hbar\Delta}(\rho_{11} - \rho_{22}) + \frac{dDE_T\psi_e}{(\hbar\Delta)^2} - \left(\frac{d}{\hbar\Delta}\right)^3 |\psi_o|^2 \psi_e - \frac{id}{\hbar\Delta^2} \frac{\partial \psi_e}{\partial t} - \frac{d}{\hbar\Delta^3} \frac{\partial^2 \psi_e}{\partial t^2}. \quad (15)$$

Подставив эти выражения в первые три уравнения системы (9) и проинтегрировав с учетом наложенных ранее начальных условий на диагональные элементы матрицы плотности, получим

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{33} &= \left(\frac{d}{\hbar\Delta}\right)^2 |\psi_o|^2, & \rho_{22} &= \left(\frac{d}{\hbar\Delta}\right)^2 |\psi_e|^2, \\ \rho_{11} &= 1 - \left(\frac{d}{\hbar\Delta}\right)^2 (|\psi_e|^2 + |\psi_o|^2). \end{aligned} \quad (16)$$

Отсюда и из (14), (15) следует, что

$$R_{13} = \frac{d\psi_o}{\hbar\Delta} - 2 \left(\frac{d}{\hbar\Delta}\right)^3 (|\psi_e|^2 + |\psi_o|^2) \psi_o + \frac{dDE_T\psi_o}{(\hbar\Delta)^2} - \frac{id}{\hbar\Delta^2} \frac{\partial \psi_o}{\partial t} - \frac{d}{\hbar\Delta^3} \frac{\partial^2 \psi_o}{\partial t^2}, \quad (17)$$

$$R_{12} = \frac{d\psi_e}{\hbar\Delta} - 2 \left(\frac{d}{\hbar\Delta}\right)^3 (|\psi_e|^2 + |\psi_o|^2) \psi_e + \frac{dDE_T\psi_e}{(\hbar\Delta)^2} - \frac{id}{\hbar\Delta^2} \frac{\partial \psi_e}{\partial t} - \frac{d}{\hbar\Delta^3} \frac{\partial^2 \psi_e}{\partial t^2}. \quad (18)$$

Подстановка (17) и (18) в правые части первых двух уравнений (10) дает

$$\begin{aligned} i \left(\frac{\partial \Phi_o}{\partial y} + \frac{1}{v_g^{(o)}} \frac{\partial \Phi_o}{\partial t} \right) &= -\frac{k_2^{(o)}}{2} \frac{\partial^2 \Phi_o}{\partial t^2} - \\ &- 2\alpha_o (|\Phi_e|^2 + |\Phi_o|^2) \Phi_o + \alpha_o U \Phi_o + \\ &+ \frac{c}{2n_{opt}\omega_{31}} \Delta_{\perp} \Phi_o, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} i \left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial y} + \frac{1}{v_g^{(e)}} \frac{\partial \Phi_e}{\partial t} \right) &= -\frac{k_2^{(e)}}{2} \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial t^2} - \\ &- 2\alpha_e (|\Phi_e|^2 + |\Phi_o|^2) \Phi_e + \alpha_e U \Phi_o + \\ &+ \frac{c}{2n_{opt}\omega_{21}} \Delta_{\perp} \Phi_e. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь групповые скорости обыкновенной $v_g^{(o)}$ и необыкновенной $v_g^{(e)}$ компонент определяются выражениями

$$\frac{1}{v_g^{(o)}} = \frac{n_{opt}}{c} \left(1 + \frac{2\pi d^2 n \omega_{31}}{\hbar n_{opt}^2 \Delta^2} \right),$$

$$\frac{1}{v_g^{(e)}} = \frac{n_{opt}}{c} \left(1 + \frac{2\pi d^2 n \omega_{21}}{\hbar n_{opt}^2 \Delta^2} \right);$$

соответствующие параметры дисперсии групповых скоростей есть $k_2^{(o)} = 2\alpha_o/\Delta^2$, $k_2^{(e)} = 2\alpha_e/\Delta^2$, где

$$\alpha_o = \frac{2\pi d^2 n \omega_{31}}{\hbar c n_{opt} \Delta}, \quad \alpha_e = \frac{2\pi d^2 n \omega_{21}}{\hbar c n_{opt} \Delta};$$

кроме того, мы переопределили огибающие обеих оптических компонент и поле терагерцевой составляющей:

$$\begin{aligned} \Phi_o &= \frac{d\psi_o}{\hbar\Delta} \exp(i\alpha_o y), & \Phi_e &= \frac{d\psi_e}{\hbar\Delta} \exp(i\alpha_e y), \\ U &= \frac{DE_T}{\hbar\Delta}. \end{aligned} \quad (21)$$

Правая часть последнего уравнения системы (10) для поля терагерцевой компоненты содержит вторую производную от населенности основного состояния и вклад поперечной динамики импульса. Согласно (16), изменение населенностей относительно мало и квадратично по модулям амплитуд оптических составляющих. Учитывая, кроме того, поперечную динамику в параксиальном пределе, применим к последнему уравнению системы (10) приближение медленно меняющегося профиля [34, 35] (не путать с приближением медленно меняющихся огибающих). Для этого введем «локальное» время $\tau = t - n_T y/c$ и «медленную» координату $\zeta = \varepsilon y$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{n_T}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{n_T^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 2\varepsilon \frac{n_T}{c} \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \zeta} + \\ &+ \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \approx \frac{n_T^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 2\varepsilon \frac{n_T}{c} \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \zeta} \end{aligned}$$

(здесь мы пренебрегли слагаемым, пропорциональным ε^2). Подставив эти символические выражения в последнее уравнение системы (10), получим после интегрирования по τ и возвращения к переменной y :

$$\frac{\partial E_T}{\partial y} = \frac{2\pi D n}{c n_T} \frac{\partial \rho_{11}}{\partial \tau} + \frac{c}{2n_T} \Delta_{\perp} \int_{-\infty}^{\tau} E_T(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau}. \quad (22)$$

Как правило, $\omega_{31} - \omega_{21} = \omega_{310} - \omega_{210} \sim 10^{12} - 10^{13} \text{ с}^{-1}$, тогда как $\omega_{31} \sim \omega_{21} \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$. Значит, $(\omega_{31} - \omega_{21})/\omega_{31} \sim 10^{-3} - 10^{-2}$. Следовательно, с хорошей точностью можно считать, что

$$\alpha_e = \alpha_o = \alpha = \frac{2\pi d^2 n \omega}{\hbar c n_{opt} \Delta},$$

$$\frac{1}{v_g^{(e)}} = \frac{1}{v_g^{(o)}} = \frac{1}{v_g} = \frac{n_{opt}}{c} \left(1 + \frac{2\pi d^2 n \omega}{\hbar n_{opt}^2 \Delta^2} \right),$$

$$k_2^{(e)} = k_2^{(o)} = k_2 = \frac{2\alpha}{\Delta^2},$$

где $\omega = (\omega_{31} + \omega_{21})/2$. Подставляя далее (16) в (22) и считая выполненным условие РЗБ (2), придем окончательно к следующей нелинейной системе волновых уравнений:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \Phi_o}{\partial y} &= -\frac{k_2}{2} \frac{\partial^2 \Phi_o}{\partial \tau^2} - 2\alpha (|\Phi_e|^2 + |\Phi_o|^2) \Phi_o + \\ &+ \alpha U \Phi_o + \frac{c}{2n_{opt}\omega} \Delta_{\perp} \Phi_o, \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \Phi_e}{\partial y} &= -\frac{k_2}{2} \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial \tau^2} - 2\alpha (|\Phi_e|^2 + |\Phi_o|^2) \Phi_e + \\ &+ \alpha U \Phi_e + \frac{c}{2n_{opt}\omega} \Delta_{\perp} \Phi_e, \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} &= -\beta \frac{\partial}{\partial \tau} (|\Phi_e|^2 + |\Phi_o|^2) + \\ &+ \frac{c}{2n_T} \Delta_{\perp} \int_{-\infty}^{\tau} U(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau}, \quad (25) \end{aligned}$$

где

$$\beta = \frac{2\pi D^2 n}{\hbar c n_T \Delta},$$

$\tau = t - y/v_g = t - n_T y/c$; мы положили $\omega_{31} = \omega_{21} = \omega$ в коэффициентах перед поперечными лапласианами оптических компонент, а также учли (21). Полученная нами система волновых уравнений описывает генерацию поля U компонентами Φ_o и Φ_e , обратное влияние U на эти компоненты, а также взаимодействие между Φ_o и Φ_e как непосредственное, так и посредством поля U .

Если анизотропия отсутствует ($D = \beta = U = 0$), то система (23)–(25) переходит в одномерном случае ($\Delta_{\perp} = 0$) в систему Манакова [12]. Здесь имеется только непосредственное (за счет кубической нелинейности) взаимодействие между высокочастотными компонентами. Отметим, что возникающая в данной задаче система Манакова соответствует случаю нелинейной среды, в которой коэффициенты α и k_2 имеют одинаковые знаки. Такая система имеет решения в виде несингулярных светлых солитонов [2].

Пусть теперь, наоборот, анизотропия велика, так что

$$|U| \gg 2(|\Phi_e|^2 + |\Phi_o|^2)$$

или

$$|E_T| \gg 2 \frac{d}{D} \frac{d(|\psi_e|^2 + |\psi_o|^2)}{\hbar \Delta}.$$

Положив $d\sqrt{|\psi_e|^2 + |\psi_o|^2}/\hbar \sim 1/\tau_p$, перепишем последнее условие в виде

$$I_T \gg \left(\frac{2d}{D} \right)^2 \frac{n_T}{n_{opt}} \frac{I_e + I_o}{(\Delta \tau_p)^2}, \quad (26)$$

где

$$I_T = \frac{cE_T^2}{4\pi n_T}, \quad I_{e,o} = \frac{c|\psi_{e,o}|^2}{4\pi n_{opt}}$$

— интенсивности компонент импульса.

При выполнении условия (26) система (23)–(25) переходит в одномерном случае в векторную, двухкомпонентную, систему уравнений ЯО:

$$i \frac{\partial \Phi_o}{\partial y} = -\frac{k_2}{2} \frac{\partial^2 \Phi_o}{\partial \tau^2} + \alpha U \Phi_o, \quad (27)$$

$$i \frac{\partial \Phi_e}{\partial y} = -\frac{k_2}{2} \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial \tau^2} + \alpha U \Phi_e, \quad (28)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\beta \frac{\partial}{\partial \tau} (|\Phi_e|^2 + |\Phi_o|^2). \quad (29)$$

Если одна из компонент Φ_o или Φ_e тождественно равна нулю, то данная система сведется к обычной (скалярной) системе ЯО [11, 20]. Взаимодействие между компонентами Φ_o и Φ_e осуществляется здесь посредством порождаемого ими поля U .

4. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ И СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ

Существует обобщение системы (27)–(29) на случай произвольного числа оптических компонент Φ_j ($j = 1, 2, \dots, N$), взаимодействующих друг с другом через низкочастотное поле U :

$$i \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} = -\frac{k_2}{2} \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \tau^2} + \alpha U \Phi_j, \tag{30}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\beta \frac{\partial}{\partial \tau} \sum_{j=1}^N |\Phi_j|^2. \tag{31}$$

Очевидно, при $N = 2$, $\Phi_1 = \Phi_o$, $\Phi_2 = \Phi_e$ эти уравнения совпадут с (27)–(29).

Как было отмечено во Введении, система ЯО интегрируема МОЗР. Оказывается, что ее векторные обобщения (27)–(29) и (30), (31) тоже интегрируемы этим методом и, значит, их можно записать в виде условия нулевой кривизны:

$$\frac{\partial \hat{L}(\lambda)}{\partial y} - \frac{\partial \hat{A}(\lambda)}{\partial \tau} + [\hat{L}(\lambda), \hat{A}(\lambda)] = 0, \tag{32}$$

где λ — так называемый спектральный параметр. Матрицы $\hat{L}(\lambda)$ и $\hat{A}(\lambda)$ имеют в случае системы (30), (31) следующий вид:

$$\hat{L}(\lambda) = -\delta \begin{pmatrix} -\lambda & \Phi_1 & \dots & \Phi_N & -\frac{2i\alpha}{k_2\delta^2}U \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\Phi_1^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\Phi_N^* \\ i & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}(\lambda) = \frac{i}{2}k_2\delta^2 \times \begin{pmatrix} \lambda^2 & M(\Phi_1) & \dots & M(\Phi_N) & -\sum_{j=1}^N |\Phi_j|^2 \\ -i\Phi_1^* & 0 & \dots & 0 & M(\Phi_1^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -i\Phi_N^* & 0 & \dots & 0 & M(\Phi_N^*) \\ 0 & i\Phi_1 & \dots & i\Phi_N & \lambda^2 \end{pmatrix},$$

где использованы обозначения

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{2\alpha\beta}{k_2^2}}, \quad M(\Phi) = -\frac{1}{\delta} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} - \lambda \Phi.$$

Уравнение (32) представляет собой условие совместности переопределенной системы линейных уравнений (пары Лакса)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} &= \hat{L}\xi, \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} &= \hat{A}\xi, \end{aligned} \tag{33}$$

где

$$\xi = \xi(\tau, y, \lambda) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N+2})^T$$

— векторное решение пары Лакса. Условие совместности (32) выполняется при любом значении спектрального параметра λ .

Как известно, солитонные решения интегрируемых уравнений имеют только дискретную часть данных рассеяния, а непрерывная часть данных рассеяния у них отсутствует. Такие решения можно найти, не только развивая аппарат МОЗР для спектральной задачи в паре Лакса, но и применяя простые алгебраические методы. В настоящей статье мы воспользуемся одним из таких методов, а именно техникой преобразования Дарбу [36]. Особенность этой техники заключается в том, что она позволяет получить бесконечную последовательность решений интегрируемого уравнения вместе с соответствующими решениями ее пары Лакса.

Пусть $\chi = (\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{N+2})^T$ — решение пары Лакса (33) с $\lambda = \nu$. Можно показать, что пара Лакса (33) ковариантна относительно преобразования Дарбу

$$\{\xi, \Phi_1, \dots, \Phi_N, U\} \rightarrow \{\tilde{\xi}, \tilde{\Phi}_1, \dots, \tilde{\Phi}_N, \tilde{U}\}$$

следующего вида:

$$\tilde{\xi}_1 = -iM(\tilde{\xi}_{N+2}), \tag{34}$$

$$\tilde{\xi}_j = \xi_j - \frac{s(\chi, \xi)}{s(\chi, \chi)} \chi_j \quad (j = 2, \dots, N + 2), \tag{35}$$

$$\tilde{\Phi}_j = \Phi_j + \frac{\chi_{j+1}\chi_{N+2}}{s(\chi, \chi)} \quad (j = 1, \dots, N), \tag{36}$$

$$\tilde{U} = U - \frac{k_2}{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \ln s(\chi, \chi), \tag{37}$$

где

$$s(\chi, \xi) = \frac{1}{\lambda^2 - \nu^{*2}} \times \left(\frac{1}{\delta} \left(\xi_{N+2} \frac{\partial \chi_{N+2}^*}{\partial \tau} - \chi_{N+2}^* \frac{\partial \xi_{N+2}}{\partial \tau} \right) + i \sum_{j=2}^{N+1} \chi_i^* \xi_j \right).$$

Равенства (36), (37) определяют новое («одетое») решение системы (30), (31).

Если в качестве исходного решения взят нулевой фон: $\Phi_1 = \dots = \Phi_N = U = 0$, то с помощью формул (34)–(37) можно построить многосолитонные решения системы уравнений (30), (31) или ее частного случая при $N = 2$, т.е. векторной системы ЯО (27)–(29). Так, проведя преобразование Дарбу один раз, получим для несингулярного односолитонного решения векторной системы ЯО (27)–(29), записанного в лабораторной системе координат с точностью до сдвигов по независимым переменным, такие выражения:

$$\Phi_{e,o} = \frac{k_2}{\tau_p} q_{e,o} \sqrt{\frac{\Omega}{\alpha\beta}} \exp[-i(\theta_I + \varphi_{e,o})] \operatorname{sch} \theta_R, \quad (38)$$

$$U = -\frac{k_2}{\alpha\tau_p^2} \operatorname{sch}^2 \theta_R, \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_R &= \frac{t - y/v}{\tau_p}, \\ \theta_I &= \Omega \left(t - \frac{y}{v_g} \right) + \frac{k_2}{2} \left(\Omega^2 - \frac{1}{\tau_p^2} \right) y, \\ q_e^2 + q_o^2 &= 1, \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{v_g} - k_2 \Omega. \end{aligned} \quad (40)$$

Это решение имеет пять свободных вещественных параметров. В качестве таковых можно взять длительность τ_p солитона, сдвиг Ω несущих частот оптических компонент, один из «весовых» множителей q_e или q_o , которые связаны друг с другом первым условием в (40), а также φ_e и φ_o . Компонента U данного решения является однополярной: $U < 0$. Так как $\alpha\beta > 0$, то из (38) следует, что $\Omega > 0$. Поэтому сдвиг несущих частот оптических компонент происходит в красную область.

В решении (38), (39) можно положить $q_o = \sin \gamma$, $q_e = \cos \gamma$, где γ — вещественный параметр. Именно такую параметризацию будет удобно использовать в случае двухсолитонного решения.

Введенный выше параметр γ , а также φ_e и φ_o определяют локальный угол $\tilde{\gamma}$ между вектором электрического поля оптической компоненты солитона (38), (39) и плоскостью поляризации однополярного терагерцевого всплеска:

$$\operatorname{tg} \tilde{\gamma} = \frac{E_o}{E_e - E_T} = \operatorname{tg} \gamma \frac{\cos((\omega_{31} - \Omega)\tau_\Sigma - \varphi_o)}{\cos((\omega_{21} - \Omega)\tau_\Sigma - \varphi_e)}. \quad (41)$$

Здесь $\tau_\Sigma = t - n_\Sigma y/c$, суммарный показатель преломления n_Σ представляется в виде суммы его линейной n_l и нелинейной n_{non} частей: $n_\Sigma = n_l + n_{non}$, где

$$n_l = n_{opt} + \frac{\omega_c}{2n_{opt}\Delta},$$

$$\begin{aligned} n_{non} &= -\frac{\omega_c}{2n_{opt}(\omega - \Omega)\Delta} \times \\ &\times \left\{ \Omega \left[\frac{\omega}{\Delta} \left(1 - \frac{\Omega}{\Delta} \right) - 1 \right] + \frac{\omega}{(\Delta\tau_p)^2} \right\} \approx, \\ &\approx -\frac{\omega_c}{2n_{opt}\Delta} \left\{ \frac{\Omega}{\Delta} + \frac{1}{(\Delta\tau_p)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (42)$$

ω_c — кооперативная частота,

$$\omega_c = \frac{4\pi n d^2}{\hbar}. \quad (43)$$

При переходе к приближенному равенству в (42) использовали условия $\Omega \ll \omega, |\Delta|$, необходимые для того, чтобы импульс оставался в квазирезонансе с квантовыми переходами.

Учитывая малость отстройки друг от друга несущих частот ω_{21} и ω_{31} , запишем

$$\begin{aligned} E_e - E_T + iE_o &= \frac{k_2}{\tau_p} \sqrt{\frac{\Omega}{2\alpha\beta}} e^{i\tilde{\gamma}} \operatorname{sch} \theta_R \times \\ &\times \left[1 + \sqrt{1 - \sin^2(2\gamma) \sin^2 \theta_- \cos(2\theta_+)} \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

где

$$\theta_- = \omega_s \tau_\Sigma + \varphi_e - \varphi_o, \quad \theta_+ = (\omega - \Omega)\tau_\Sigma - \frac{\varphi_e + \varphi_o}{2},$$

$\tilde{\gamma}$ определяется согласно (41). Таким образом, оптическую часть солитона можно рассматривать как эллиптически поляризованный импульс с несущей частотой ω , амплитуда которого промодулирована во времени и пространстве благодаря штарковскому расщеплению.

Выше было отмечено, что однополярный всплеск, порождаемый оптическими компонентами, можно интерпретировать в прикладном смысле как широкополосное терагерцевое излучение. Красный частотный сдвиг при оптическом методе генерации терагерцевого излучения наблюдался экспериментально [37], а свое теоретическое объяснение нашел в работах [17–19, 38] на основе скалярной модели ЯО и ее уточнений. Можно сказать, что солитонное решение (38), (39) описывает процесс генерации терагерцевого излучения в двухчастотном оптическом режиме, сопровождаемом смещением несущих

частот в красную область. Как следует из (38), это смещение пропорционально интенсивности оптических компонент.

Из (38), (39), а также выражений для U и $\psi_{e,o}$ вытекает следующая оценка эффективности генерации терагерцевого излучения, равная отношению интенсивностей терагерцевой и суммарной $I = I_e + I_o$ оптической компонент:

$$\frac{I_T}{I} \sim \frac{E_T^2}{|\psi_e|^2 + |\psi_o|^2} \sim \frac{1}{\omega \Omega \tau_p^2}.$$

Взяв $\omega \sim 10^{15} \text{ c}^{-1}$, $\Omega \sim 10^{11} \text{ c}^{-1}$, $\tau_p \sim 10^{-12} \text{ c}$, найдем $I_T/I \sim 10^{-2}$. Это значительно выше, чем соответствующая интенсивность в присутствии нерезонансной оптической нелинейности, едва достигающая значений $10^{-5} - 10^{-4}$ [37].

Рассмотрим несингулярное двухсолитонное решение векторной системы ЯО (27)–(29). Для его получения необходимо выполнить две итерации преобразования Дарбу (34)–(37) на нулевом фоне, что приводит к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \Phi_e &= 2\sqrt{2} \frac{G}{F}, & \Phi_o &= 2\sqrt{2} \frac{H}{F}, \\ U &= -\frac{k_2}{\alpha} \frac{\partial^2 \ln F}{\partial \tau^2}, \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} F &= (\nu - \lambda)(\nu - \lambda^*)(\nu^* - \lambda)(\nu^* - \lambda^*) e^{2(\theta_{R,1} + \theta_{R,2})} + \\ &+ (\nu^2 - \lambda^{*2})(\nu^{*2} - \lambda^2) (e^{2\theta_{R,1}} + e^{2\theta_{R,2}}) + \\ &+ (\nu^2 - \lambda^2)(\nu^{*2} - \lambda^{*2}) + 16\nu_R \nu_I \lambda_R \lambda_I \times \\ &\times \left(\sin(2\gamma_1) \sin(2\gamma_2) \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) + \sin^2(\gamma_1 - \gamma_2) \right) + \\ &+ 8i\nu_R \lambda_R \sqrt{\nu_I \lambda_I} \left[(\nu - \lambda^*) f e^{i(\theta_{I,1} - \theta_{I,2})} - (\nu^* - \lambda) \times \right. \\ &\quad \left. \times f^* e^{i(\theta_{I,2} - \theta_{I,1})} \right] e^{\theta_{R,1} + \theta_{R,2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \nu_R \sqrt{\nu_I} (\nu - \lambda^*) \left[(\nu^{*2} - \lambda^2) \cos \gamma_1 \times \right. \\ &\quad \times e^{i\alpha_1} ((\nu - \lambda) e^{2\theta_{R,2}} + \nu + \lambda^*) + \\ &\quad \left. + 4i\lambda_R \lambda_I (\nu + \lambda^*) \cos \gamma_2 f e^{i\alpha_2} \right] e^{\theta_{R,1} + i\theta_{I,1}} - \\ &- \lambda_R \sqrt{\lambda_I} (\nu^* - \lambda) \left[(\nu^2 - \lambda^{*2}) \cos \gamma_2 \times \right. \\ &\quad \times e^{i\alpha_2} ((\nu - \lambda) e^{2\theta_{R,1}} - \nu^* - \lambda) + \\ &\quad \left. + 4i\nu_R \nu_I (\nu^* + \lambda) \cos \gamma_1 f^* e^{i\alpha_1} \right] e^{\theta_{R,2} + i\theta_{I,2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= \nu_R \sqrt{\nu_I} (\nu - \lambda^*) \left[(\nu^{*2} - \lambda^2) \sin \gamma_1 \times \right. \\ &\quad \times e^{-i\alpha_1} ((\nu - \lambda) e^{2\theta_{R,2}} + \nu + \lambda^*) + \\ &\quad \left. + 4i\lambda_R \lambda_I (\nu + \lambda^*) \sin \gamma_2 f e^{-i\alpha_2} \right] e^{\theta_{R,1} + i\theta_{I,1}} - \\ &- \lambda_R \sqrt{\lambda_I} (\nu^* - \lambda) \left[(\nu^2 - \lambda^{*2}) \sin \gamma_2 \times \right. \\ &\quad \times e^{-i\alpha_2} ((\nu - \lambda) e^{2\theta_{R,1}} - \nu^* - \lambda) + \\ &\quad \left. + 4i\nu_R \nu_I (\nu^* + \lambda) \sin \gamma_1 f^* e^{-i\alpha_1} \right] e^{\theta_{R,2} + i\theta_{I,2}}, \end{aligned}$$

$$f = \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} + \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 e^{i(\alpha_2 - \alpha_1)},$$

$$\theta_{R,1} = -\delta \nu_R (\tau + \nu_I k_2 \delta y) + c_1,$$

$$\theta_{I,1} = -\delta \left(\nu_I \tau + \frac{\nu_I^2 - \nu_R^2}{2} k_2 \delta y \right) + C_1,$$

$$\theta_{R,2} = -\delta \lambda_R (\tau + \lambda_I k_2 \delta y) + c_2,$$

$$\theta_{I,2} = -\delta \left(\lambda_I \tau + \frac{\lambda_I^2 - \lambda_R^2}{2} k_2 \delta y \right) + C_2,$$

$$\nu = \nu_R + i\nu_I, \quad \lambda = \lambda_R + i\lambda_I.$$

Это решение описывает столкновение двух солитонов (38), (39) с разными длительностями и сдвигами несущих частот оптических компонент. Его свободными параметрами являются следующие безразмерные вещественные параметры: λ_R, ν_R и λ_I, ν_I , определяющие соответственно длительности и сдвиги несущих частот солитонов; γ_1, γ_2 и α_1, α_2 , определяющие в некоторый момент времени локальные углы между направлениями поляризаций оптических компонент каждого солитона и их однополярными всплесками, а также разность фаз компонент Φ_e и Φ_o каждого солитона; c_1, c_2 и C_1, C_2 , определяющие соответственно начальное положение солитонов и начальную фазу одной из оптических компонент.

Отметим, что параметры λ_I и ν_I положительны. Эти ограничения соответствуют односолитонному случаю и означают, что несущие частоты каждого солитона в двухсолитонном решении сдвигаются в красную область.

На рис. 2 и 3 представлены столкновения солитонов, которые описываются решением (44). Следствиями столкновений являются сдвиги по пространственной и временной координатам. Кроме того, меняются фазы оптических векторов и их локальные поляризационные направления. Так, например, если до столкновения оптическая составляющая какого-либо солитона была линейно поляризованной ($\psi_e = 0$ или $\psi_o = 0$), то после столкновения она может стать эллиптически поляризованной. Такое поведение отражает рис. 2. Здесь у одного из солитонов отсутствовала до столкновения компонента

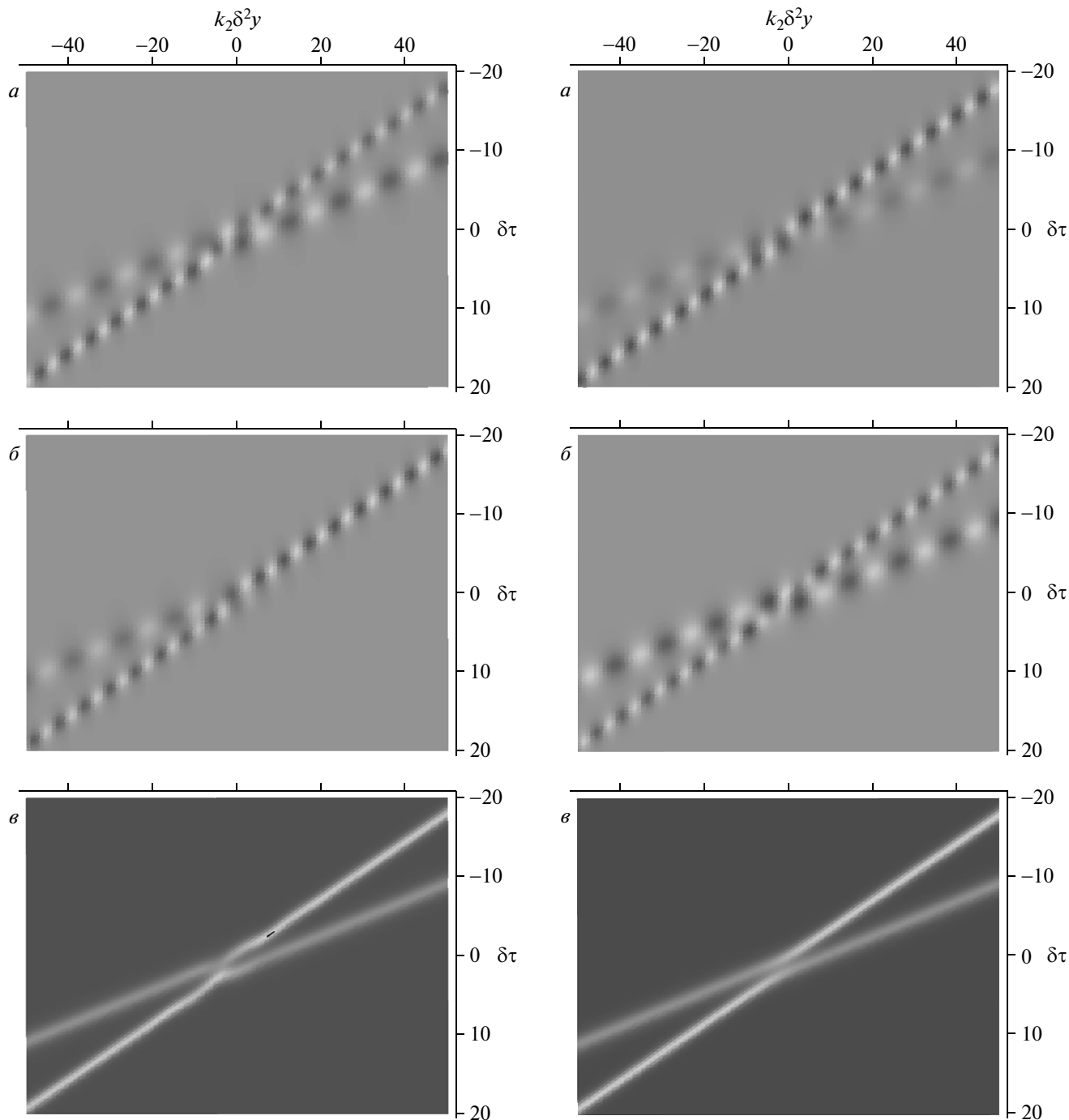


Рис. 2. Зависимости полей $\text{Re}\Phi_e$ (а), $\text{Re}\Phi_o$ (б) и U (в) двухсолитонного решения с параметрами $\lambda_R = -1.4$, $\nu_R = -1.0$, $\lambda_I = 0.36$, $\nu_I = 0.22$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \pi/4$, $\alpha_1 = \pi/6$, $\alpha_2 = 3\pi/4$, $c_1 = c_2 = C_1 = C_2 = 0$. Областям с большими значениями полей соответствует более темный оттенок серого цвета

Рис. 3. Зависимости полей $\text{Re}\Phi_e$ (а), $\text{Re}\Phi_o$ (б) и U (в) двухсолитонного решения с параметрами $\lambda_R = -1.4$, $\nu_R = -1.0$, $\lambda_I = 0.36$, $\nu_I = 0.22$, $\gamma_1 = \pi/3$, $\gamma_2 = \pi/6$, $\alpha_1 = \pi/6$, $\alpha_2 = -\pi/3$, $c_1 = c_2 = C_1 = C_2 = 0$. Областям с большими значениями полей соответствует более темный оттенок серого цвета

ψ_o (см. рис. 2б). После столкновения эта компонента появилась, а амплитуда другой компоненты (ψ_e) уменьшилась.

Можно показать, что амплитуды компонент Φ_e и Φ_o солитонов не изменятся при столкновении, если выполняется условие $f = 0$ или эквивалентное —

$$\operatorname{tg} \gamma_1 \operatorname{tg} \gamma_2 = -e^{2i(\alpha_2 - \alpha_1)}.$$

Из этого равенства следует, что либо каждый солитон должен иметь до столкновения только одну компоненту, либо их параметры должны быть связаны соотношениями

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \frac{\pi k}{2}, \quad \gamma_1 = \frac{\pi}{2} + (-1)^k \gamma_2 + \pi l$$

(k, l — целые числа). Параметры солитонов на рис. 3 соответствуют последнему случаю.

В заключение этого раздела рассмотрим систему уравнений (23)–(25) в одномерном случае. По-видимому, она не является интегрируемой в рамках МОЗР и не имеет солитонных решений, хотя ее предельные частные случаи (система Манакова и векторная система ЯО (27)–(29)) интегрируемы. Солитоноподобное решение системы (23)–(25) можно получить из формул (38), (39), поскольку поле U является однофазным. Это решение имеет вид

$$\Phi_{e,o} = \Phi_{e,o}^{(m)} \exp(-i\theta_I) \operatorname{sch} \theta_R, \quad (45)$$

$$U = -U_m \operatorname{sch}^2 \theta_R, \quad (46)$$

где величины

$$\Phi_{e,o}^{(m)} = \frac{q_{e,o}}{\tau_p} \sqrt{\frac{k_2}{2\alpha(1+\eta)}}, \quad U_m = \frac{k_2 \eta}{\alpha \tau_p^2 (1+\eta)}$$

определяют амплитуды компонент, η — параметр анизотропии,

$$\eta = \frac{\beta}{2k_2\Omega} = -\frac{1}{2} \frac{U}{|\Phi_e|^2 + |\Phi_o|^2} = \left(\frac{D}{2d}\right)^2 \frac{n_{opt}}{n_T} \frac{\Delta^2}{\omega\Omega},$$

а для весовых множителей $q_{e,o}$ и скорости v справедливы соотношения (40).

Поскольку $\Phi_{e,o}^{(m)}$ вещественны, должно выполняться условие $1 + \eta > 0$. Значит, сдвиг Ω несущих частот импульса может быть отрицательным, таким что $-1 < \eta < 0$ и, следовательно, $U > 0$. Случай $1 + \eta < 0$ соответствует среде, в которой возможны только темные несингулярные солитоноподобные решения.

При $\eta = 0$ формулы (45), (46) дают односолитонное решение системы Манакова, а при $\eta \gg 1$ они переходят в решение (38), (39) векторной системы ЯО

(27)–(29). Нетрудно видеть, что неравенство $\eta \gg 1$ эквивалентно условию (26).

Пусть $\omega \sim 10^{15} \text{ c}^{-1}$, $\Omega \sim 10^{11} \text{ c}^{-1}$, $|\Delta| \sim 10^{13} \text{ c}^{-1}$, $\tau_p \sim 10^{-12} \text{ c}$, $n_T \sim n_{opt}$. Тогда неравенство $\eta \gg 1$ примет вид $(D/d)^2 \gg 1$. Такое условие вполне выполнимо как для полярных молекул, так и для искусственных НКО типа квантовых ям, нитей и т. д. [23, 29, 30].

Из формул (16), (45) и выражений для $\Phi_{e,o}$ видно поведение населенностей квантовых уровней при распространении импульсов. Для населенности основного состояния имеем

$$\rho_{11} = 1 - \frac{1}{1 + \eta} \left(\frac{\operatorname{sch} \theta_R}{\Delta \tau_p} \right)^2.$$

При распространении квазирезонансных солитонов векторной системы ЯО ($\eta \gg 1$) среда возбуждается значительно слабее, чем при распространении солитонов системы Манакова ($\eta = 0$). Еще более сильным возбуждением среды будет при $\eta < 0$. Причиной является то, что в этом случае $U > 0$ и эффективная отстройка от резонанса $\Delta - DE_T/\hbar = \Delta(1 - U)$, учитывающая динамический штарковский сдвиг уровней НКО, уменьшается по абсолютной величине. Если же $\eta \gg 1$, то $U < 0$ и эффективная отстройка увеличивается по абсолютной величине, что, естественно, влечет за собой уменьшение возбуждения НКО.

Решение (45), (46) позволит нам в следующем разделе с единых позиций провести учет влияния поперечных возмущений на солитоны системы Манакова и векторной системы ЯО.

5. ВЛИЯНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

В этом разделе исследуем влияние поперечных возмущений на одномерное солитоноподобное решение (45), (46) системы (23)–(25). Эти возмущения описываются слагаемыми с поперечными лапласианами в правых частях уравнений рассматриваемой системы. Для соответствующего анализа воспользуемся методом усредненного лагранжиана [39, 40]. Системе (23)–(25) соответствует лагранжиан

$$L = \sum_{j=e,o} \left[\frac{i}{2} \left(\Phi_j^* \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} - \Phi_j \frac{\partial \Phi_j^*}{\partial y} \right) - \frac{k_2}{2} \left| \frac{\partial \Phi_j}{\partial \tau} \right|^2 - \alpha \frac{\partial Q}{\partial \tau} |\Phi_j|^2 + \frac{c}{2n_{opt}\omega} |\nabla_{\perp} \Phi_j|^2 \right] + \alpha \left(\sum_{j=e,o} |\Phi_j|^2 \right)^2 - \frac{\alpha}{2\beta} \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial \tau} + \frac{c}{4n_T} \frac{\alpha}{\beta} (\nabla_{\perp} Q)^2, \quad (47)$$

где Q — функция, связанная с U соотношением $U = \partial Q / \partial \tau$.

Исходя из формул (45), (46), выберем «пробные» решения системы (23)–(25) в виде

$$\Phi_{e,o} = q_{e,o} \rho \sqrt{\frac{k_2}{2\alpha(1+\eta)}} \frac{\exp[-i(\Omega\tau + n_{opt}\omega\varphi/c)]}{\text{ch}[\rho(\tau + k_2\Omega)]}, \quad (48)$$

$$Q = -\frac{k_2\eta}{\alpha\tau_p^2(1+\eta)} \rho \text{th}[\rho(\tau + k_2\Omega)]. \quad (49)$$

В одномерном случае величина ρ постоянна и имеет смысл обратной длительности солитона, в то время как солитонный эйконал φ пропорционален координате y . Поэтому при учете поперечных возмущений будем считать, следуя [39, 40], ρ и φ соответственно «медленной» и «быстрой» функциями координат.

Далее, согласно методу усредненного лагранжиана, подставим (48) и (49) в (47), а затем проинтегрируем полученное равенство по «локальному» времени τ от $-\infty$ до ∞ . Здесь необходимо сделать одно замечание, которое оказывается важным за пределами приближения геометрической оптики для солитонов. Легко видеть, что

$$(\nabla_{\perp} Q)^2 = \left(\frac{k_2\eta}{\alpha(1+\eta)}\right)^2 \left\{ (\nabla_{\perp} \rho) \text{th}[\rho(\tau + k_2\Omega)] + \rho(\nabla_{\perp} \rho)(\tau + k_2\Omega) \text{sch}^2[\rho(\tau + k_2\Omega)] \right\}^2.$$

Раскрыв квадрат выражения в фигурных скобках, видим, что имеется слагаемое, пропорциональное $(\nabla_{\perp} \rho)^2 \text{th}^2[\rho(\tau + k_2\Omega)]$, интеграл от которого расходится. Чтобы обойти эту трудность, запишем

$$\text{th}^2[\rho(\tau + k_2\Omega)] = 1 - \text{sch}^2[\rho(\tau + k_2\Omega)].$$

В этом выражении отбросим единицу, приводящую к линейно расходящемуся интегралу, второе же слагаемое даст сходящийся интеграл. Обоснование такого приема содержится в работе [41]. В результате придем к следующему усредненному лагранжиану:

$$\Lambda \equiv \alpha \frac{2k_2\Omega + \beta}{k_2^2\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} L d\tau = 2\rho \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \rho(\nabla_{\perp} \varphi)^2 - \frac{ck_2}{n_{opt}\omega} \left(\Omega^2 \rho - \frac{\rho^3}{3} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{c}{n_{opt}\omega} \right)^2 \times \left[\frac{\pi^2}{6} + 2 + \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) \frac{n_{opt}\omega}{n_T\Omega} \frac{\eta}{1+\eta} \right] \frac{(\nabla_{\perp} \rho)^2}{\rho}. \quad (50)$$

Используя это выражение, запишем для ρ и φ уравнения Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} + \nabla_{\perp}(\rho \nabla_{\perp} \varphi) = 0, \quad (51)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{(\nabla_{\perp} \varphi)^2}{2} + \frac{ck_2}{n_{opt}\omega} (\rho^2 - \Omega^2) = 2g^2 \frac{\Delta_{\perp} \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}, \quad (52)$$

где

$$2g^2 = \left(\frac{c}{n_{opt}\omega} \right)^2 \left(2.43 + 0.43 \frac{n_{opt}\omega}{n_T\Omega} \frac{\eta}{1+\eta} \right).$$

По форме система (51), (52) похожа на уравнения двумерной квантовой бозе-жидкости взаимодействующих частиц. Роль времени играет здесь координата y . В одномерном случае ($\nabla_{\perp} = \Delta_{\perp} = 0$) система (51), (52) имеет решения

$$\rho = \frac{1}{\tau_p} = \text{const}, \quad \varphi = \frac{ck_2}{n_{opt}\omega} \left(\Omega^2 - \frac{1}{\tau_p^2} \right) y.$$

Тогда пробные решения (48), (49) совпадают с точными одномерными решениями системы (23)–(25), что служит важным аргументом в пользу применяемого метода.

Если пренебречь правой частью в уравнении (52), получим приближение геометрической оптики. Тогда (52) совпадает с интегралом Коши для течения идеальной жидкости. В этом случае можно получить точное радиально-симметричное решение системы (51), (52). Следуя [42], для этого положим

$$\rho = a(y) \sqrt{1 - \frac{r_{\perp}^2}{R^2(y)}}, \quad \varphi = \varphi_1(y) + \frac{r_{\perp}^2 \varphi_2(y)}{2}, \quad (53)$$

$$r_{\perp} \leq R(y),$$

где $r_{\perp}^2 = x^2 + z^2$. Очевидно, что величина $a(y)$ пропорциональна амплитудам оптических компонент на центральной оси ($r_{\perp} = 0$) и обратно пропорциональна их длительностям; $\varphi_1(y)$ обратно пропорциональна фазовой скорости оптических компонент, а $\varphi_2(y)$ характеризует кривизну их волновых фронтов. Граничные условия выберем из предположения, что на входе (при $y = 0$) волновые фронты являются плоскими:

$$a(0) = \frac{1}{\tau_p}, \quad R(0) = R_0, \quad \varphi_2(0) = 0. \quad (54)$$

В дальнейшем зависимость от переменной y указываться не будет для сокращения записи.

Подстановка (53) в (51), (52) при нулевой правой части дает систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\varphi_2 = \frac{R'}{R} = -\frac{a'}{2a}, \quad \varphi_1' = \frac{ck_2}{n_{opt}\omega} (a^2 - \Omega^2), \quad (55)$$

$$\varphi_2' + \varphi_2^2 = 2 \frac{ck_2}{n_{opt}\omega} \frac{a^2}{R^2},$$

где штрихами обозначены производные по y . Из первого уравнения этой системы с учетом условий (54) получим

$$a = \frac{1}{\tau_p} \frac{R_0^2}{R^2}. \quad (56)$$

Отсюда, а также из первого и последнего уравнений системы (55) следует, что

$$R'' = \frac{2ck_2}{n_{opt}\omega\tau_p^2} \frac{R_0^4}{R^5}. \quad (57)$$

Таким образом, как и следовало ожидать, при $k_2 > 0$ импульс распространяется в режиме дефокусировки, а при $k_2 < 0$ — в режиме самофокусировки. В последнем случае решение уравнения (57) имеет вид

$$R = R_0 \cos \theta, \quad (58)$$

где θ находится из обращения интегралов:

$$\frac{1}{\tau_p R_0} \sqrt{\frac{c|k_2|}{n_{opt}\omega}} y = \sqrt{2} E(\theta, \sqrt{0.5}) - \sqrt{0.5} K(\theta, \sqrt{0.5}). \quad (59)$$

Здесь

$$K(\theta, \sqrt{0.5}) = \int_0^\theta \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - 0.5 \sin^2 \zeta}},$$

$$E(\theta, \sqrt{0.5}) = \int_0^\theta \sqrt{1 - 0.5 \sin^2 \zeta} d\zeta$$

— эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода.

Из (58) и (59) находим длину самофокусировки, при которой $R = 0$:

$$y_f = \sqrt{\frac{n_{opt}\omega}{c|k_2|}} \tau_p R_0 \left[\sqrt{2} E\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{0.5}\right) - \sqrt{0.5} K\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{0.5}\right) \right] = 0.60 \sqrt{\frac{n_{opt}\omega}{c|k_2|}} \tau_p R_0. \quad (60)$$

Отсюда и из (45) видно, что длина самофокусировки пропорциональна длительности солитона или обратно пропорциональна амплитудам оптических компонент. Из выражения для k_2 следует, что самофокусировка происходит при отрицательных отстройках Δ , т. е., если $\omega_{31} > \omega_{310}$, $\omega_{21} > \omega_{210}$. В противном случае имеем эффект дефокусировки. Аналогичная ситуация имеет место в случае эффекта самоиндуцированной прозрачности в двухуровневой среде [43].

Используя выражение для k_2 , перепишем (60) в виде

$$y_f = 0.6 n_{opt} R_0 |\Delta| \tau_p \sqrt{\frac{|\Delta|}{\omega_c}}.$$

Подставив $d \sim 10^{-18}$ СГСЭ, $n \sim 10^{19} \text{ см}^{-3}$ в (43), найдем $\omega_c \sim 10^{11} \text{ с}^{-1}$. Пусть, кроме того, $n_{opt} \sim 1$, $|\Delta| \sim 10^{13} \text{ с}^{-1}$, $\tau_p \sim 10^{-12} \text{ с}$, $R_0 \sim 1 \text{ мм}$. Тогда $y_f \sim 10^2 R_0 \sim 10 \text{ см}$.

Солитоны формируются на дистанции порядка дисперсионной длины $l_d = 2\tau_p^2/|k_2|$. В рассматриваемой задаче

$$l_d = \frac{2n_{opt}c|\Delta|(\tau_p\Delta)^2}{\omega_c\omega}.$$

Выбирая пробные решения, мы отталкивались от одномерных солитонов, поэтому используемый здесь подход усредненного лагранжиана справедлив, если $l_d/y_f \ll 1$. В нашем случае

$$\frac{l_d}{y_f} \sim \frac{c\tau_p}{R_0} \frac{|\Delta|}{\omega} \sqrt{\frac{|\Delta|}{\omega_c}}.$$

Взяв приведенные выше оценки характерных величин и полагая также $\omega \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$, найдем $l_d/y_f \sim 10^{-2}$. Следовательно, $l_d \sim 1 \text{ мм}$ и можно считать, что солитоны формируются практически на самом входе в протяженную квазирезонансную среду НКО, обеспечивая хорошую применимость метода усредненного лагранжиана.

Из формулы (57) легко видеть, что вблизи фокуса апертура солитона $R \sim (y - y_f)^{1/3}$. Тогда, как следует из (55) и (56), в этой же области

$$\varphi_2 \sim -(y - y_f)^{-1}, \quad a \sim (y - y_f)^{-2/3},$$

$$\varphi_1 \sim -(y - y_f)^{-1/3}.$$

Качественно причины возникновения самофокусировки и дефокусировки в нашем случае можно понять из следующих рассуждений. Из формул (7), (45) и выражений для $\Phi_{e,o}$ следует, что фазу оптических компонент можно записать как $\varphi_{opt} = (\omega - \Omega)\tau_\Sigma$. Из определений τ_Σ , n_Σ и n_{non} следует, что характер поперечной динамики определяется последним слагаемым в фигурных скобках в правой части (42). Это слагаемое пропорционально суммарной интенсивности оптических компонент и дает положительный вклад в n_Σ при $\Delta < 0$. Следовательно, в центральной части поперечных сечений солитона, где его интенсивность максимальна, суммарный показатель преломления выше, чем в периферийных

участках сечений. Согласно принципу Ферма, световые лучи устремляются туда, где значение показателя преломления выше, т. е. в данном случае к центральным участкам поперечных сечений солитона. Это и приводит к самофокусировке. Аналогичные рассуждения показывают, что при $\Delta > 0$ имеем режим дефокусировки.

Дифракция, которая описывается правой частью уравнения (52), должна препятствовать самофокусировке. Ее учет проведем следующим образом. Можно показать, что система (51), (52) эквивалентна НУШ с нелинейностью пятого порядка:

$$i \frac{\partial G}{\partial y} = g \Delta_{\perp} G - \frac{ck_2}{2gn_{opt}\omega} |G|^4 G, \quad (61)$$

где комплексная функция G связана с ρ и φ преобразованием

$$G = \sqrt{\rho} \exp \left[\frac{i}{2g} \left(\varphi + \frac{ck_2}{n_{opt}\omega} \Omega^2 y \right) \right]. \quad (62)$$

В результате вопрос о влиянии поперечных возмущений свелся к анализу устойчивости нелинейного пространственного пучка, подчиняющегося (61). Таким образом, на следующей стадии исследования можно использовать богатый накопленный материал, касающийся монохроматических пучков (пространственных солитонов).

Вначале рассмотрим случай планарной дифракции, когда $\Delta_{\perp} = \partial^2 / \partial z^2$. Будем искать решение уравнения (61) в виде

$$G(y, z) = F(z) \exp(-i\mu y),$$

где μ — постоянная величина. Подстановка этого выражения дает в случае самофокусировки ($k_2 < 0$) уравнение

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{\mu}{g} F - \frac{c|k_2|}{2g^2 n_{opt}\omega} F^5.$$

Дополним его условиями на бесконечности: $F \rightarrow 0$, $dF/dz \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \pm\infty$. Тогда решение полученного уравнения определяется соотношениями

$$F^2 = \rho = \rho_0 \operatorname{sch} \frac{z}{l_{\perp}}, \quad \mu = \frac{g}{4l_{\perp}^2}, \quad (63)$$

в которых обратная длительность ρ_0 солитона в центре его поперечных сечений (при $z = 0$) есть

$$\rho_0 = \frac{g}{2l_{\perp}} \sqrt{\frac{6n_{opt}\omega}{c|k_2|}},$$

а l_{\perp} имеет смысл поперечного размера оптических компонент солитона в установившемся режиме самоканализирования при компенсации самофокусировки

планарной дифракцией. Сужение солитона (уменьшение его поперечного размера l_{\perp}) сопровождается, согласно (63), увеличением его амплитуды и продольным самосжатием. Воспользовавшись выражениями для g и k_2 , запишем

$$\rho_0 = 1.35 \frac{c|\Delta|}{l_{\perp}\omega} \sqrt{\frac{|\Delta|}{\omega_c} \left(1 + 0.177 \frac{n_{opt}\omega}{n_T \Omega} \frac{\eta}{1 + \eta} \right)}. \quad (64)$$

Взяв, как и прежде, $|\Delta| \sim 10^{13} \text{ с}^{-1}$, $\omega \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$, $\Omega, \omega_c \sim 10^{11} \text{ с}^{-1}$ и приняв $l_{\perp} \sim 0.1 \text{ мм}$, найдем для солитонов системы Манакова ($\eta = 0$) $\rho_0 \sim 10^{12} \text{ с}^{-1}$. В случае же солитонов системы ЯО ($\eta \gg 1$) значение ρ_0 может быть на порядок выше. Следовательно, в процессе самофокусировки при планарной дифракции солитоны системы ЯО испытывают значительно большее продольное самосжатие, нежели солитоны системы Манакова.

Учет влияния дифракции в общем случае проведем, используя метод моментов [44]. Вначале заметим, что уравнение (61) имеет гамильтоново представление

$$i \frac{\partial G}{\partial y} = -\frac{1}{g} \frac{\delta H}{\delta G^*}$$

с сохраняющимся гамильтонианом

$$H = \int \left(g^2 |\nabla_{\perp} G|^2 + \frac{ck_2}{6n_{opt}\omega} |G|^6 \right) dS, \quad (65)$$

где $dS = dx dz$. Кроме того, данное уравнение обладает интегралом движения вида $N = \int |G|^2 dS$.

Введем поперечный размер солитона (его апертуру) как момент второго порядка по интенсивности поля:

$$R^2 = \frac{1}{N} \int r_{\perp}^2 |G|^2 dS.$$

Дифференцируя это соотношение по y и используя (61), получим

$$\frac{\partial R^2}{\partial y} = \frac{2}{N} \int (\mathbf{j}, \mathbf{r}_{\perp}) dS, \quad (66)$$

где

$$\mathbf{j} = ig \left[G(\nabla_{\perp} G^*) - G^*(\nabla_{\perp} G) \right] = \rho \nabla_{\perp} \varphi$$

(см. (62)). Дифференцирование (66) по y , дает

$$\frac{\partial^2 R^2}{\partial y^2} = \frac{16}{N} = \text{const.} \quad (67)$$

Будем считать, что при $y = 0$ волновые фронты солитона плоские, т. е. $\nabla_{\perp} \varphi|_{y=0} = 0$, а $R(0) = R_0$. Из (66) и выражения для \mathbf{j} следует, что

$(dR^2/dy)|_{y=0} = 0$. Решение уравнения (67) с такими начальными условиями имеет вид

$$R^2 = R_0^2 + \frac{8H}{N} y^2. \quad (68)$$

Отсюда видно, что при $H > 0$ солитон дефокусируется, а при $H < 0$ испытывает самофокусировку. Как и следовало ожидать, при нормальной дисперсии групповых скоростей ($k_2 > 0$) возможен только режим дефокусировки. В противном случае возникает конкуренция между нелинейной рефракцией и дифракцией, описываемыми соответственно вторым и первым слагаемыми под интегралом в правой части (65).

Оценим критическую мощность P_c оптических компонент солитона, выше которой должен наблюдаться режим самофокусировки. Ясно, что это обязательно произойдет, если подынтегральное выражение в (65) всюду отрицательно (для этого требуется $k_2 < 0$). Полагая $|\nabla_{\perp} G|^2 \sim |G|^2/R^2 = \rho/R^2$, запишем это условие в виде

$$\rho^2 R^2 > \frac{6n_{opt}\omega}{c|k_2|} g^2.$$

Выразив затем ρ^2 через сумму квадратов оптических компонент $|\Phi_e|^2 + |\Phi_o|^2$, получим

$$(|\Phi_e|^2 + |\Phi_o|^2)R^2 > \frac{3n_{opt}\omega}{ca(1+\eta)} g^2.$$

Учитывая это неравенство и выражение для суммарной оптической интенсивности

$$I = I_e + I_o = \frac{c(|\psi_e|^2 + |\psi_o|^2)}{4\pi n_{opt}},$$

для импульсной мощности $P = \pi R^2 I$ получим условие $P > P_c$, в котором критическая мощность равна

$$P_c = 1.82 \frac{c^3}{n_{opt}(1+\eta)} \left(\frac{\hbar|\Delta|}{d\omega} \right)^2 \frac{|\Delta|}{\omega} \times \left(1 + 0.177 \frac{n_{opt}\omega}{n_T \Omega} \frac{\eta}{1+\eta} \right). \quad (69)$$

Взяв приведенные выше числовые оценки для фигурирующих в этом выражении параметров среды и солитонов, найдем для солитонов системы Манакова ($\eta = 0$) $P_c \sim 10^4$ Вт. Полагая в случае солитонов системы ЯО $\eta \sim (D/d)^2 \sim 10^2$, будем иметь $P_c \sim 10^5$ Вт.

Отдельного внимания здесь заслуживает вопрос о возможности самоканалирования в режиме компенсации дифракцией процесса самофокусировки.

Как известно [2], в случае солитонов системы Манакова такой стационарный режим невозможен. Используемый здесь единый подход к исследованию влияния поперечной динамики на солитоны систем Манакова и ЯО позволяет высказать предположение о том, что стационарное самоканалирование солитонов системы ЯО тоже вряд ли возможно.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе подробно исследован процесс распространения векторных квазирезонансных импульсов в среде НКО со штарковской деформацией квантовых состояний. При выполнении условия РЗБ (2) выведена векторная система волновых уравнений типа Манакова–Ядзими–Ойкавы (23)–(25). Если НКО обладают сильной анизотропией, то эта система переходит в одномерном случае в векторное обобщение (27)–(29) системы ЯО, описывающей совместное распространение коротковолновых оптических импульсов и длинноволнового электромагнитного всплеска, спектр которого захватывает терагерцевый диапазон.

Показана интегрируемость векторного обобщения системы ЯО взаимодействия длинных и коротких волн, вообще говоря, на многокомпонентный случай. Детально разобранная здесь ситуация двухкомпонентного коротковолнового поля соответствует квазирезонансному распространению оптического импульса в системе s – p -переходов, образуемых штарковским расщеплением p -состояния. Не исключено, что интегрируемое обобщение системы ЯО на многокомпонентный случай можно получить, рассматривая взаимодействие многочастотного оптического импульса с квазирезонансными переходами в условиях более сложных штарковских или зеемановских расщеплений.

Приближенное равенство $\alpha_e = \alpha_o$, использованное при переходе от уравнений (19) и (20) к уравнениям (23) и (24), можно трактовать как равенство сил осцилляторов переходов $1 \leftrightarrow 2$ и $1 \leftrightarrow 3$ в рассмотренной здесь V -схеме. Известно, что в этих условиях уравнения, описывающие эффект самоиндуцированной прозрачности в трехуровневой среде в отсутствие постоянного дипольного момента, оказываются интегрируемыми МОЗР [45–49]. Представляет несомненный интерес исследование интегрируемости системы волновых и материальных уравнений, описывающих распространение векторных резонансных импульсов в трехуровневой среде при равенстве сил осцилляторов разрешенных переходов и в присутствии постоянного дипольного момента.

Как следует из разд. 4 настоящей работы, эффективность генерации по интенсивности терагерцевого излучения при квазирезонансном взаимодействии оптических импульсов со средой может быть на два порядка выше соответствующей эффективности в случае нерезонансного взаимодействия.

Вообще говоря, влияние постоянного дипольного момента на резонансные и квазирезонансные квантовые переходы, помимо генерации рассмотренных здесь полуволновых электромагнитных всплесков типа (39), приводит к порождению компонент на вторых гармониках и разностных частотах [23]. Однако здесь необходимо выполнение соответствующих условий синхронизма, подобно тому, как при генерации полуволновых широкополосных всплесков выполнялось условие РЗБ (2). Нетрудно видеть, что в рамках поставленной в настоящей статье задачи одновременное выполнение всех условий синхронизма наряду с условием РЗБ невозможно.

Использованный здесь метод усредненного лагранжиана исследования влияния поперечных возмущений на распространение векторных длинно-коротковолновых солитонов, хотя и является достаточно грубым, приводит к физически разумным результатам. Это касается выяснения условий возникновения процессов самофокусировки, дефокусировки, а также влияния дифракционного расплывания. За рамками нашего рассмотрения остался вопрос реализации режима стационарного самоканалирования при точной взаимной компенсации самофокусировки и дифракции. Известно, что для формирования соответствующих такому импульсному режиму «световых пульс», кроме фокусирующей кубической нелинейности, необходимо присутствие высших дефокусирующих нелинейностей или (в общем случае) насыщающей нелинейности [2]. Скорее всего, для достижения импульсного режима самоканалирования в случае векторных длинно-коротковолновых солитонов тоже необходимо вводить дополнительные нелинейные слагаемые к присутствующим в уравнениях (23)–(25) нелинейностям. Определенную роль при этом может сыграть нерезонансная квадратичная нелинейность в уравнении для длинноволновой компоненты, как это имеет место в случае обобщенной скалярной системы ЯО [50]. Другая возможность состоит в учете нелинейности пятого порядка для квазирезонансных оптических компонент в системе (9), (10).

Не исключено, что в рамках системы (23)–(25) возможна реализация периодического процесса сжатия, сменяющегося дифракционным расплыванием, в докритическом по мощности режиме (см. (69)).

Этот вопрос требует отдельного обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Агравал, *Нелинейная волоконная оптика*, Мир, Москва (1996).
2. Ю. С. Кившарь, Г. П. Агравал, *Оптические солитоны*, Физматлит, Москва (2005).
3. Н. Н. Ахмедиев, А. Анкевич, *Солитоны*, Физматлит, Москва (2003).
4. A. I. Maimistov, *Pramana — J. Phys. (Indian Acad. Sci.)* **57**, 953 (2001).
5. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов*, Наука, Москва (1988).
6. А. М. Башаров, А. И. Маймистов, *Опт. и спектр.* **88**, 428 (2000).
7. А. И. Маймистов, *КЭ* **22**, 936 (1995).
8. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Наука, Москва (1980).
9. Дж. Л. Лэм, *Введение в теорию солитонов*, Мир, Москва (1983).
10. Р. Буллаф, Ф. Кодри (ред.), *Солитоны*, Мир, Москва (1983).
11. Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, Мир, Москва (1988).
12. С. В. Манаков, *ЖЭТФ* **67**, 543 (1974).
13. Д. А. Багдасарян, А. О. Макарян, П. С. Погосян, *Письма в ЖЭТФ* **37**, 498 (1983).
14. D. H. Auston, K. P. Cheung, J. A. Valdmanis, and D. A. Kleinman, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1555 (1984).
15. П. Г. Крюков, *Фемтосекундные импульсы*, Физматлит, Москва (2008).
16. У. А. Абдуллин, Г. А. Ляхов, О. В. Руденко, А. С. Чиркин, *ЖЭТФ* **66**, 1295 (1974).
17. С. В. Сазонов, А. Ф. Соболевский, *Письма в ЖЭТФ* **75**, 746 (2002).
18. С. В. Сазонов, А. Ф. Соболевский, *ЖЭТФ* **123**, 1160 (2003).
19. С. В. Сазонов, А. Ф. Соболевский, *КЭ* **35**, 1019 (2005).

20. N. Yajima and M. Oikawa, *Progr. Theor. Phys.* **56**, 1719 (1976).
21. Y. C. Ma, *Stud. Appl. Math.* **59**, 201 (1978).
22. В. Е. Захаров, *ЖЭТФ* **62**, 1745 (1972).
23. S. Kočinac, Z. Ikonjić, and V. Milanović, *Opt. Comm.* **140**, 89 (1997).
24. L. W. Casperson, *Phys. Rev. A.* **57**, 609 (1998).
25. M. Agrotis, N. M. Ercolani, S. V. Glasgow, and G. V. Moloney, *Physica D* **138**, 134 (2000).
26. А. А. Заболотский, *ЖЭТФ* **121**, 1012 (2002).
27. А. И. Маймистов, Дж.-Ги. Капуто, *Опт. и спектр.* **94**, 275 (2003).
28. С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **124**, 803 (2003).
29. H. Vogt, *Phys. Rev. B* **58**, 9916 (1998).
30. W. Yang, S. Gong, R. Li, and Z. Xu, *Phys. Rev. A* **74**, 013407 (2006).
31. И. И. Собельман, *Введение в теорию атомных спектров*, Наука, Москва (1977).
32. Л. Аллен, Дж. Эберли, *Оптический резонанс и двухуровневые атомы*, Мир, Москва (1978).
33. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *ЖЭТФ* **127**, 289 (2005).
34. J. D. Gibbon, P. J. Caudrey, J. C. Eilbeck, and R. K. Bullough, *J. Phys. A: Math. Gen.* **6**, 1237 (1973).
35. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, *Теория волн*, Наука, Москва (1990).
36. V. B. Matveev and M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (1991).
37. А. Г. Степанов, А. А. Мельников, В. О. Компанец, С. В. Чекалин, *Письма в ЖЭТФ* **85**, 279 (2007).
38. А. Н. Бугай, С. В. Сазонов, *Письма в ЖЭТФ* **87**, 470 (2008).
39. С. К. Жданов, Б. А. Трубников, *ЖЭТФ* **92**, 1612 (1987).
40. С. К. Жданов, Б. А. Трубников, *Квазигазовые неустойчивые среды*, Наука, Москва (1991).
41. С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **125**, 1409 (2004).
42. Н. В. Карлов, Н. А. Кириченко, *Колебания, волны, структуры*, Наука, Москва (2001).
43. R. E. Slusher and H. H. Gibbs, *Phys. Rev. Lett.* **24**, 638 (1970).
44. С. Н. Власов, В. И. Таланов, В. А. Петрищев, *Изв. вузов. Радиофизика* **14**, 1353 (1971).
45. Л. А. Большов, В. В. Лиханский, М. И. Персианцев, *ЖЭТФ* **84**, 903 (1983).
46. А. И. Маймистов, *КЭ* **11**, 567 (1984).
47. Л. А. Большов, В. В. Лиханский, *КЭ* **12**, 1339 (1985).
48. А. М. Башаров, А. И. Маймистов, *ЖЭТФ* **94**, 61 (1988).
49. H. Steudel, *J. Mod. Opt.* **35**, 693 (1988).
50. A. N. Bugay and S. V. Sazonov, *Phys. Rev. E* **74**, 066608 (2006).