

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ЗАПУТАННЫХ МНОГОФОТОННЫХ СОСТОЯНИЙ И ПАРАДОКС БЕРНШТЕЙНА

А. С. Чиркин^{}, О. В. Беляева^{**}, А. В. Белинский^{***}*

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119992, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 21 июля 2012 г.

Для ряда запутанных квантовых состояний с дискретными переменными (кубитовые состояния Гринбергера–Хорна–Цайлингера, Вернера и кластерное состояние) выполнены расчеты нормально-упорядоченной характеристической функции (НУХФ) бозе-операторов. Показано, что такие НУХФ содержат наглядную информацию о корреляциях двух типов: псевдоклассических и квантовых. Последние проявляются в интерференционных членах НУХФ и приводят к квантовым парадоксам, а псевдоклассические корреляции фотонов и их кумулянты удовлетворяют соотношениям для классических случайных переменных. Подробно исследованы трех- и четырехкубитовые состояния. Обсуждается реализация на дискретных квантовых переменных аналога классического парадокса Бернштейна. Введена мера квантовости запутанного состояния, не связанная с энтропийным подходом. Установлено, что максимум меры квантовости обосновывает численные значения коэффициентов в векторе многокубитовых состояний, записываемых из интуитивных соображений.

DOI: 10.7868/S0044451013010048

1. ВВЕДЕНИЕ

Запутанные (перепутанные) квантовые состояния играют чрезвычайно важную роль для выявления смысла квантовой механики [1–3] и во многих приложениях: квантовое изображение [4]; а также квантовая информация и квантовые вычисления [3, 5–7] (квантовая телепортация, квантовое плотное кодирование, квантовая криптография и т. п.). Сказанное в равной мере относится к квантовым состояниям как с дискретными, так и непрерывными переменными. При этом многофотонные (многомодовые) запутанные квантовые состояния обладают рядом достоинств по сравнению с бифотонными ЭПР-состояниями (двухкубитовыми), подробно исследованными теоретически и экспериментально. В связи с этим в последнее время многофотонные запутанные состояния вызывают значительный интерес. Помимо исследования собственно запутанности квантовых систем, изучают их корреляционные

свойства, используя квантово-информационный подход, вводя разные характеристики: согласованность (conspirence), различие (discord) и т. п. (см. [8–14], а также обзоры [15, 16] и цитируемую там литературу).

Вместе с тем наиболее ярким доказательством неклассичности корреляций в запутанных состояниях является нарушение соотношений, связанных с классическим модельным подходом. К ним следует отнести ЭПР-парадокс (парадокс Эйнштейна–Подольского–Розена), неравенства Белла, парадокс Гринбергера–Хорна–Цайлингера, многофотонную интерференцию и другие (см., например, [1, 2, 16, 17]).

В настоящей работе показано, что последовательный анализ запутанных многофотонных состояний, основанный на нормально-упорядоченной характеристической функции (НУХФ) бозе-операторов, позволяет изучить структуру корреляций таких состояний, выявляя как истинно квантовые, так и псевдоклассические корреляции. Следует отметить, что в работах [18, 19] для описания поляризации многофотонных состояний разработан подход, использующий понятие поляризационного квазиспина.

В квантовой оптике из-за некоммутируемости бо-

^{*}E-mail: aschirkin@rambler.ru

^{**}E-mail: lisenok.msu@gmail.com

^{***}E-mail: belinsky@inbox.ru

зе-операторов существуют три характеристические функции, которые определяют соответствующие функции квазираспределения, связанные между собой [20]. Обычно имеют дело с функциями квазираспределения Вигнера или Глаубера–Сударшана, последняя является фурье-образом НУХФ. Ранее НУХФ использовалась лишь для решения конкретных задач (см., например, [21]), а ее систематический анализ, насколько нам известно, для дискретных квантовых переменных отсутствует. В настоящей работе этот пробел восполняется.

Наш анализ НУХФ выполнен для трех- и четырехкубитовых состояний: ГХЦ-состояний (состояний Гринбергера–Хорна–Цайлингера), W-состояний (состояний Вернера) и кластерного состояния; обнаружена общность структур их НУХФ. Показано, что с истинно квантовыми корреляциями многокубитовых состояний, помимо известных парадоксов, можно реализовать новые варианты классического парадокса Бернштейна. На основе кумулянтного анализа изучены статистические связи второго и более высокого порядка псевдоклассических корреляций, в то время как корреляционные функции учитывают статистическую связь только первого порядка.

Работа построена следующим образом. Сначала в разд. 2 приведены рассматриваемые в работе многокубитовые состояния. В разд. 3 дано определение НУХФ бозе-операторов и на ее основе смешанных моментов и кумулянтов, представлены выражения для кумулянтов третьего и четвертого порядка для классических случайных переменных. Раздел 4 содержит расчеты НУХФ для трех- и четырехкубитовых ГХЦ- и W-состояний, а также для кластерного четырехкубитового состояния. В разд. 5 подробно обсуждаются смешанные моменты и кумулянты фотонов ГХЦ-состояния. Раздел 6 посвящен анализу чисто квантовых свойств многокубитовых состояний, связанных с интерференционными слагаемыми в НУХФ, и демонстрации квантового аналога классического парадокса Бернштейна. В разд. 7 введена мера квантовости многокубитового состояния и приведены ее значения для исследуемых состояний. Основные результаты работы кратко подытожены в Заключение.

2. ТРЕХКУБИТОВЫЕ И ЧЕТЫРЕХКУБИТОВЫЕ СОСТОЯНИЯ

Мы будем изучать корреляционные свойства трех- и четырехкубитовых состояний, принадлежа-

щих различным классам: ГХЦ-состояние, W-состояние и кластерное состояние. С методами получения таких состояний можно познакомиться по литературе (см. недавний обзор [16]).

Трехкубитовые ГХЦ- и W-состояния записываются соответственно в виде:

$$|GHZ_3\rangle = \alpha|HHH\rangle + \beta|VVV\rangle, \quad (1)$$

$$|W_3\rangle = \alpha|HHV\rangle + \beta|HVV\rangle + \gamma|VHH\rangle. \quad (2)$$

Здесь использовано краткое обозначение фотонных состояний поля, например,

$$|HVV\rangle = |H\rangle_1|V\rangle_2|H\rangle_3,$$

где

$$|H\rangle_j = |1\rangle_j^{(H)} = a_j^{(H)+}|0\rangle$$

означает однофотонное состояние с горизонтальной поляризацией j -й моды, а

$$|V\rangle_j = |1\rangle_j^{(V)} = a_j^{(V)+}|0\rangle$$

— однофотонное состояние с вертикальной поляризацией ($|0\rangle$ — вакуумное состояние). Операторы рождения a_j^+ и эрмитово сопряженные операторы уничтожения a_j ($j = 1, 2, \dots, N$) для одинаково поляризованных состояний подчиняются коммутационным соотношениям

$$[a_j, a_k^+] = \delta_{jk},$$

где δ_{jk} — символ Кронекера, причем

$$[a_j^{(H)+}, a_j^{(V)}] = 0.$$

Четырехкубитовые состояния имеют вид

$$|GHZ_4\rangle = \alpha|HHHH\rangle + \beta|VVVV\rangle, \quad (3)$$

$$|W_4\rangle = \alpha|HHHV\rangle + \beta|HHVH\rangle + \gamma|HVHH\rangle + \delta|VHHH\rangle. \quad (4)$$

Рассмотрим также кластерное четырехкубитовое состояние

$$|C\rangle = \alpha|VVVV\rangle + \beta|VVHH\rangle + \gamma|HHVV\rangle + \delta|HHHH\rangle. \quad (5)$$

Состояния (1)–(5) записаны в обобщенном виде, причем коэффициенты α, β, γ и δ удовлетворяют условию нормировки состояний (см. ниже формулу (6)). Векторами (1)–(5) можно описывать как поляризационное состояние фотонов, так и спиновое состояние частиц. Для определенности речь идет о фотонных кубитовых состояниях.

3. НОРМАЛЬНО-УПОРЯДОЧЕННАЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ БОЗЕ-ОПЕРАТОРОВ; СМЕШАННЫЕ МОМЕНТЫ И КУМУЛЯНТЫ

Таким образом, мы имеем дело с запутанными чистыми состояниями, оператор плотности которых $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, где вектор состояния

$$|\psi\rangle = \sum_{l=1}^M A_l |\psi_1^{(l)}\rangle |\psi_2^{(l)}\rangle \dots |\psi_N^{(l)}\rangle, \quad \sum_{l=1}^M |A_l|^2 = 1. \quad (6)$$

Сопоставим оператору плотности ρ многомодовой физической системы нормально-упорядоченную характеристическую функцию [20]:

$$C(\eta) = C(\eta_1, \eta_1^*, \dots, \eta_N, \eta_N^*) = \text{Tr} \left(\rho \prod_{j=1}^N Q_j \right), \quad (7)$$

$$Q_j = e^{\eta_j a_j^\dagger} e^{-\eta_j^* a_j},$$

где η_j — комплексное число.

В соответствии с (7) операторная корреляционная функция в общем случае имеет вид

$$\Gamma^{(M+N)} = \langle a_1^+ \dots a_M^+ a_1 \dots a_N \rangle = (-1)^N \frac{\partial^{(M+N)} C(\eta)}{\partial \eta_1 \dots \partial \eta_M \partial \eta_1^* \dots \partial \eta_N^*}. \quad (8)$$

При $M = N$ имеем корреляционную функцию (смешанный момент) N -го порядка для N одностепенных чисел фотонов ($n_j = \hat{n}_j = a_j^\dagger a_j$)

$$G_{12\dots N}^{(N)} = \langle \hat{n}_1 \hat{n}_2 \dots \hat{n}_N \rangle = (-1)^N \frac{\partial^{2N} C(\eta)}{\partial \eta_1 \partial \eta_1^* \dots \partial \eta_N \partial \eta_N^*}. \quad (9)$$

Производные в (8), (9) берутся при

$$\eta_1 = \dots = \eta_N = \eta_1^* = \dots = \eta_N^* = 0.$$

Такая же производная от логарифма НУХФ

$$K_{12\dots N}^{(N)} = \langle \langle \hat{n}_1 \hat{n}_2 \dots \hat{n}_N \rangle \rangle = (-1)^N \frac{\partial^{2N} \ln C(\eta)}{\partial \eta_1 \partial \eta_1^* \dots \partial \eta_N \partial \eta_N^*} \quad (10)$$

дает значение совместного кумулянта для чисел фотонов. Для обозначения кумулянта использованы двойные угловые скобки.

Для выявления характера связей между моментами наблюдаемых нам понадобятся в дальнейшем

соотношения между смешанными моментами и кумулянтами для классических величин [22, 23]. Так, совместный кумулянт третьего порядка равен

$$K_{123}^{(3)} = G_{123}^{(3)} - 3(\langle n_1 \rangle G_{23}^{(2)})_s + 2\langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle \langle n_3 \rangle. \quad (11)$$

Здесь и далее для сокращения записи использована скобка симметризации, т. е.

$$3(\langle n_1 \rangle G_{23}^{(2)})_s = \langle n_1 \rangle G_{23}^{(2)} + \langle n_2 \rangle G_{13}^{(2)} + \langle n_3 \rangle G_{12}^{(2)}. \quad (12)$$

Совместный кумулянт четвертого порядка имеет вид

$$K_{1234}^{(4)} = G_{1234}^{(4)} - 4(\langle n_1 \rangle G_{234}^{(3)})_s - 3(G_{12}^{(2)} G_{34}^{(2)})_s + 2 \cdot 6(\langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle G_{34}^{(2)})_s - 6\langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle \langle n_3 \rangle \langle n_4 \rangle. \quad (13)$$

Ниже показано, что соотношения (11), (13) могут быть справедливы для чисел фотонов, т. е. значения кумулянтов, рассчитанных по формуле (10), совпадает со значением, определенным по моментам (9). Поэтому свойства кумулянтов будем рассматривать в терминах операторов. Если в совместные кумулянты (11) и (13) входит оператор числа фотонов статистически независимый от остальных, то кумулянты равны нулю:

$$K_{123}^{(3)} = K_{1234}^{(4)} = 0.$$

Кумулянт $K_{1234}^{(4)} = 0$ и в случае двух взаимно-независимых совокупностей операторов чисел фотонов. Рассмотренные кумулянты оказываются равными нулю, если статистическая связь между операторами обусловлена корреляциями второго порядка. Иначе говоря, имеется только статистическая связь первого порядка. Однако даже если кумулянт третьего порядка в четырехкомпонентном состоянии отличен от нуля, т. е. существует статистическая связь второго порядка, кумулянт четвертого порядка будет равен нулю, если один из операторов статистически не зависит от других. Таким образом, в совместных кумулянтах статистическая связь высокого порядка содержится в «чистом» виде [22]. Следует подчеркнуть, что в отличие от совместных кумулянтов, смешанные моменты высокого порядка зависят от всех статистических связей более низкого порядка.

4. НОРМАЛЬНО-УПОРЯДОЧЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КУБИТОВЫХ СОСТОЯНИЙ

В этом разделе мы приведем результаты расчетов НУХФ для рассматриваемых трех- и четырехкубитовых состояний. Расчет НУХФ (7) включает вычисление средних, соответствующих оператору \hat{Q}_j ,

по однофотонному $|1\rangle$ и вакуумному $|0\rangle$ состояниям. Используя общую формулу

$$\langle m|\hat{Q}_j|n\rangle = \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^n \frac{1}{l!k!} \eta_j^l (-\eta_j^*)^k \times \left[\frac{m!n!}{(m-l)!(n-k)!} \right]^{1/2} \delta_{n-k, m-l}, \quad (14)$$

получаем следующие выражения для НУХФ.

Для трехкубитовых GHZ-состояния (1)

$$C_{GHZ_3} = |\alpha|^2 H_1 H_2 H_3 + |\beta|^2 V_1 V_2 V_3 + (\alpha^* \beta \eta_1 \eta_2 \eta_3 \xi_1^* \xi_2^* \xi_3^* + \text{с.с.}) \quad (15)$$

(с.с. означает комплексное сопряжение) и $|W_3\rangle$ -состояния (2)

$$C_{W_3} = \alpha^2 H_1 H_2 V_3 + \beta^2 H_1 V_2 H_3 + \gamma^2 V_1 V_2 H_3 + \alpha \beta H_1 S_{23} + \alpha \gamma H_3 S_{12} + \beta \gamma H_2 S_{13}. \quad (16)$$

Для четырехкубитовых GHZ-состояния (3)

$$C_{GHZ_4} = |\alpha|^2 H_1 H_2 H_3 H_4 + |\beta|^2 V_1 V_2 V_3 V_4 + (\alpha^* \beta \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 \xi_1^* \xi_2^* \xi_3^* \xi_4^* + \text{с.с.}) \quad (17)$$

и $|W_4\rangle$ -состояния (4)

$$C_{W_4} = \alpha^2 H_1 H_2 H_3 V_4 + \beta^2 H_1 H_2 V_3 H_4 + \gamma^2 H_1 V_2 H_3 H_4 + \delta^2 V_1 H_2 H_3 H_4 + \alpha \beta H_1 H_2 S_{34} + \alpha \gamma H_1 H_3 S_{24} + \alpha \delta H_2 H_3 S_{14} + \beta \gamma H_1 H_4 S_{23} + \delta \gamma H_3 H_4 S_{12}. \quad (18)$$

Для кластерного $|C\rangle$ -состояния (5) имеем

$$C_c = \alpha^2 V_1 V_2 V_3 V_4 + \beta^2 V_1 V_2 H_3 H_4 + \gamma^2 H_1 H_2 V_3 V_4 + \delta^2 H_1 H_2 H_3 H_4 + \alpha \beta V_1 V_2 P_{34} + \alpha \gamma V_3 H_4 P_{12} + \beta \gamma H_1 H_2 P_{34} + \beta \gamma H_3 H_4 P_{12} + \alpha \delta P_{1234} + \beta \gamma Q_{1234}. \quad (19)$$

В выражениях (15)–(19) введены обозначения

$$\begin{aligned} H_j &= H(|\eta_j|) = 1 - |\eta_j|^2, \\ V_j &= V(|\xi_j|) = 1 - |\xi_j|^2, \\ S_{jk} &= \eta_j \eta_k^* \xi_j^* \xi_k + \text{с.с.}, \quad P_{jk} = \eta_j \eta_k \xi_j^* \xi_k^* + \text{с.с.}, \\ P_{jklm} &= \eta_j \eta_k \eta_l \eta_m \xi_j^* \xi_k^* \xi_l^* \xi_m^* + \text{с.с.}, \\ Q_{jklm} &= \eta_j \eta_k \eta_l^* \eta_m^* \xi_j^* \xi_k^* \xi_l \xi_m + \text{с.с.}, \end{aligned} \quad (20)$$

а для упрощения записи коэффициенты α, β, γ и δ считались действительными везде, кроме выражений (15), (17). Параметр η_j относится к фотонам с горизонтальной поляризацией, а параметр ξ_j — с вертикальной.

Выражения (15)–(19) имеют одинаковую структуру. Они содержат как слагаемые, зависящие только от модулей $|\eta_j|^2$ и $|\xi_j|^2$, так и слагаемые или множители (S, P, Q) , содержащие интерференционные члены.

Для сравнения результатов приведем также НУХФ

$$C_{EPR} = |\alpha|^2 H_1 V_2 + |\beta|^2 V_1 H_2 + (\alpha^* \beta \eta_1 \eta_2^* \xi_1^* \xi_2 + \text{с.с.}), \quad (21)$$

соответствующую ЭПР-состоянию:

$$|EPR\rangle = \alpha|HV\rangle + \beta|VH\rangle. \quad (22)$$

5. СМЕШАННЫЕ МОМЕНТЫ И КУМУЛЯНТЫ ГХЦ-СОСТОЯНИЙ

Изложим подробно развиваемый нами анализ НУХФ на примере хорошо изученных ГХЦ-состояний. Согласно (9) с $|\eta_j|^2$ и $|\xi_j|^2$ связаны средние числа фотонов и их корреляции. Для их измерения фотоны с выхода источника излучения следует непосредственно подавать на фотодетекторы (см. рис. 1) (квантовые эффективности детекторов считаем идеальными, т.е. равными единице). Для выделения фотонов с определенной поляризацией перед фотодетекторами располагаются анализаторы (на рис. 1 не показаны). Импульсы с фотодетекторов подаются в схему совпадений, появление импульса на выходе которой свидетельствует о наличии корреляции зарегистрированных фотонов.

В трехкубитовом ГХЦ-состоянии для фотонов, например, с горизонтальной поляризацией имеем следующие значения для средних чисел фотонов и смешанных моментов второго и третьего порядков:

$$\begin{aligned} \langle n_j^{(H)} \rangle &= |\alpha|^2 (j = 1, 2, 3), \\ G_{jk}^{(2,H)} &= \langle n_j^{(H)} n_k^{(H)} \rangle = |\alpha|^2 (j > k), \\ G_{123}^{(3,H)} &= \langle n_1^{(H)} n_2^{(H)} n_3^{(H)} \rangle = |\alpha|^2. \end{aligned} \quad (23)$$

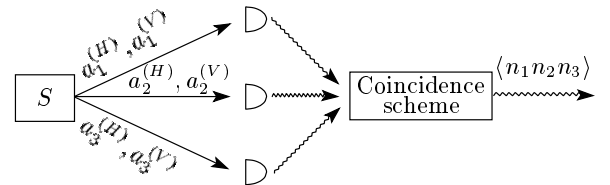


Рис. 1. Схема измерения псевдоклассических фотонных корреляций в трехкубитовых состояниях: S — источник запутанных состояний

Статистические характеристики для фотонов с вертикальной поляризацией получаются из (23) при замене H на V и α на β . С учетом приведенных результатов НУХФ (15) можно переписать так

$$C_{GHZ_3} = 1 - \sum_{j=1}^3 [\langle n_j^{(H)} \rangle |\eta_j|^2 + \langle n_j^{(V)} \rangle |\xi_j|^2] + \sum_{j,k=1; j>k}^3 [G_{jk}^{(2,H)} |\eta_j \eta_k|^2 + G_{jk}^{(2,V)} |\xi_j \xi_k|^2] + \alpha^* \beta \eta_1 \eta_2 \eta_3 \xi_1^* \xi_2^* \xi_3^* + \text{с.с.} \quad (24)$$

В ГХЦ-состоянии корреляции между числами фотонов с ортогональными поляризациями отсутствуют. Вместе с тем интерференционные слагаемые в (24) согласно (8) приводят к коррелятору вида

$$\Gamma_{GHZ_3}^{(6)} = \langle a_1^{(H)+} a_2^{(H)+} a_3^{(H)+} a_1^{(V)} a_2^{(V)} a_3^{(V)} \rangle + \text{с.с.} = \alpha^* \beta + \text{с.с.} \quad (25)$$

Такую же структуру имеет коррелятор для ЭПР-состояния (22)

$$\Gamma_{EPR}^{(4)} = \langle a_1^{(H)+} a_2^{(H)+} a_1^{(V)} a_2^{(V)} \rangle + \text{с.с.} = \alpha^* \beta + \text{с.с.}, \quad (26)$$

который связан с интерференционными членами в (21). Корреляции (25), (26) являются истинно квантовыми, и именно с ними связаны упомянутые в Введении парадоксы. Как показано в следующем разделе, с истинно квантовыми корреляциями можно также наблюдать парадокс Бернштейна.

При нахождении совместного кумулянта для состояния фотонов с определенной поляризацией будем иметь в виду поляризационную структуру кумулянта. В соответствии с (24) совместный кумулянт третьего порядка в базисе ГХЦ-состояний имеет вид

$$K_{GHZ}^{(3,P)} = G_{123}^{(3,P)} - 3(\langle n_1^{(P)} \rangle G_{23}^{(2,P)})_s + 2\langle n_1^{(P)} \rangle \langle n_2^{(P)} \rangle \langle n_3^{(P)} \rangle = G_{123}^{(3,P)} - 3(\langle n_1^{(P)} \rangle K_{23}^{(2,P)})_s - \langle n_1^{(P)} \rangle \langle n_2^{(P)} \rangle \langle n_3^{(P)} \rangle, \quad (27)$$

где

$$K_{jk}^{(2,P)} = G_{jk}^{(2,P)} - \langle n_j^{(P)} \rangle \langle n_k^{(P)} \rangle, \quad P = H, V. \quad (28)$$

В рассматриваемом случае связь между смешанными моментами (корреляциями) и кумулянтами для чисел фотонов такая же, как в классической теории случайных процессов [22, 23]. Такие статистические связи в квантовой системе разумно называть,

следуя В. И. Манько, псевдоклассическими. В последней строке выражения (27) видно, что из корреляции 3-го порядка вычитаются статистические связи 1-го порядка, определяемые кумулянтом 2-го порядка $K_{jk}^{(2,P)}$. Поэтому кумулянт (27), как уже отмечалось, учитывает статистическую связь 2-го порядка.

Принимая во внимание (23) для кумулянтов (27), получаем выражения

$$K_{GHZ}^{(3,H)} = |\alpha|^2 - 3|\alpha|^4 + 2|\alpha|^6, \quad (29)$$

$$K_{GHZ}^{(3,V)} = |\beta|^2 - 3|\beta|^4 + 2|\beta|^6.$$

Заметим, что

$$K_{GHZ}^{(3,H)} + K_{GHZ}^{(3,V)} = 0, \quad G_{123}^{(3,H)} + G_{123}^{(3,V)} = 1, \quad (30)$$

т. е. кумулянты 3-го порядка в базисе ГХЦ-состояний имеют разные знаки, тогда как сумма корреляций 3-го порядка равна единице. Интересно, что при

$$|\alpha|^2 = |\beta|^2 = 0.5$$

кумулянты

$$K_{GHZ}^{(3,H)} = K_{GHZ}^{(3,V)} = 0,$$

и псевдоклассическая статистическая связь 2-го порядка отсутствует. Экстремальные значения кумулянтов

$$K_{GHZ}^{(3,H)} = \pm \frac{1}{6\sqrt{3}}, \quad K_{GHZ}^{(3,V)} = \mp \frac{1}{6\sqrt{3}} \quad (31)$$

достигаются при

$$|\alpha|^2 = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Для ГХЦ-состояния (1), когда поляризация одного фотона отличается от поляризации двух других фотонов, корреляция числа фотонов третьего порядка равна нулю, тогда как кумулянты равны

$$K_{GHZ}^{(3)}(n_1^{(H)}, n_2^{(H)}, n_3^{(V)}) = -K_{GHZ}^{(3)}(n_1^{(V)}, n_2^{(V)}, n_3^{(H)}) = |\alpha|^2 |\beta|^2 (2|\alpha|^2 - 1). \quad (32)$$

Как и в случае (31), изменение поляризации фотонов на ортогональную поляризацию приводит к изменению знака совместного кумулянта. Здесь также при $|\alpha|^2 = 0.5$ кумулянт равен нулю. Экстремальные значения кумулянтов (32) достигаются при тех же значениях параметров $|\alpha|^2$ и $|\beta|^2$, что и для кумулянтов (31), например,

$$K_{GHZ}^{(3)}(n_1^{(H)}, n_2^{(H)}, n_3^{(V)}) = \pm \frac{1}{12\sqrt{3}}. \quad (33)$$

Рассмотренные характеристики квантовой системы, относящиеся к псевдоклассическим корреляциям, имеют точно такие значения, как если бы мы имели дело не с ГХЦ-состоянием, а с смешанным (сепарабельным) состоянием, описываемым оператором плотности

$$\rho_m = |\alpha|^2 |HHH\rangle\langle HHH| + |\beta|^2 |VVV\rangle\langle VVV|. \quad (34)$$

Аналогичное рассмотрение можно выполнить и для четырехкубитового ГХЦ-состояния. При этом из анализа выражений для смешанных моментов и кумулянтов вплоть до четвертого порядка следует, что здесь опять оказывается, что статистические связи 2-го и 3-го порядка отсутствуют, когда

$$|\alpha| = |\beta| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Как отмечалось, структура НУХФ изучаемых состояний во многом аналогична; в (15)–(19), (21) содержится информация как о псевдоклассических, так и квантовых корреляциях. Изложенный в этом разделе подход к рассмотрению ГХЦ-состояния можно, разумеется, перенести и на W-состояния и кластерное состояние. Однако в общем случае получающиеся при этом выражения имеют ненаглядный громоздкий вид. Поэтому для последних состояний в настоящей работе мы ограничимся определением меры квантовости в разд. 7.

6. ПАРАДОКС БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ГХЦ-СОСТОЯНИЙ И КЛАСТЕРНОГО СОСТОЯНИЯ

Необычное поведение квантовых систем в запутанных состояниях наиболее ярко проявляется в квантовых парадоксах. Интерференционные слагаемые в НУХФ ГХЦ-состояний, порождающие корреляции вида (25), (38), (41), позволяют выявить новый квантовый парадокс — квантовую иллюстрацию парадокса Бернштейна из теории вероятностей [24, 25]. В случае трех переменных он состоит в том, что попарная независимость событий не влечет их независимости в совокупности. Примечательно, что измерение корреляторов (25), (38), (41) с помощью линейного преобразования можно свести к определению корреляции числа фотонов [1, 16].

Обратимся опять к трехкубитовому ГХЦ-состоянию. Подадим ортогонально поляризованные фотоны с одинаковой частотой на симметричный поля-

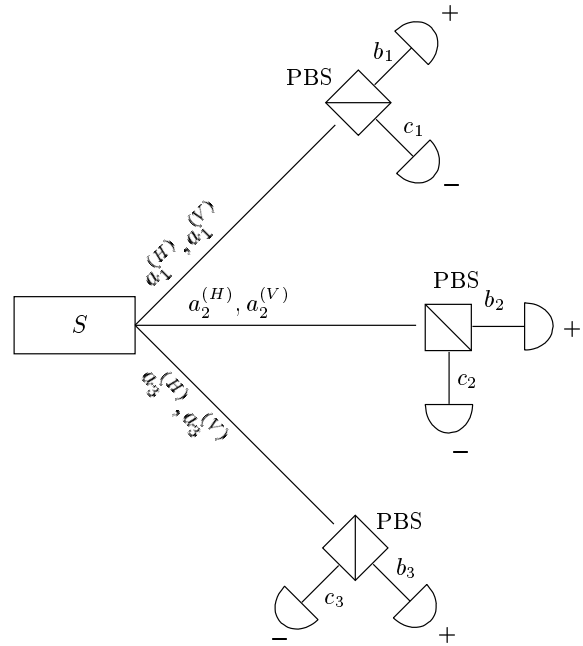


Рис. 2. Схема наблюдения парадокса Бернштейна в ГХЦ-состоянии: S — источник запутанных состояний, PBS — поляризационный светоделитель

ризационный светоделитель (PBS) (см. рис. 2, ср. с рис. 1); на его выходе имеем

$$\begin{aligned} b_j &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_j^{(V)} + e^{i\varphi_j} a_j^{(H)} \right), \\ c_j &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_j^{(V)} - e^{i\varphi_j} a_j^{(H)} \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь φ_j — относительная фазовая задержка между ортогонально поляризованными фотонами в j -ом канале. Разность операторов чисел фотонов в каналах после PBS равна

$$\hat{N}_j = \hat{n}_j^{(b)} - \hat{n}_j^{(c)} = a_j^{(V)\dagger} a_j^{(H)} e^{i\varphi_j} + \text{h.c.} \quad (36)$$

Здесь h.c. означает эрмитово сопряженную часть. При этом

$$\langle \hat{N}_1 \hat{N}_2 \hat{N}_3 \rangle = \Gamma_{GHZ_3}^{(6)} = 2|\alpha\beta^*| \cos \Phi, \quad (37)$$

где

$$\Phi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \arg(\alpha\beta^*).$$

Видно, что тройная корреляционная функция чисел фотонов периодически зависит от фазовых задержек [16], имея максимальное и минимальное значения соответственно при $\cos \Phi = 1$ и $\cos \Phi = -1$. Учитывая условие нормировки состояния (6), найдем экстремальные значения $\Gamma_{GHZ_3}^{(6)} = \pm 1$, которые достигаются при

$$\Phi = m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Таблица 1. Знаки множителей в (37) при $\Gamma_{GHZ_3}^{(6)} = 1$; N — номер канала

N	1	+	−	−	+
	2	+	+	−	−
	3	+	−	+	−

и

$$\alpha = \pm\beta = 1/\sqrt{2}.$$

Пусть имеем значение $\Gamma_{GHZ_3}^{(6)} = 1$ (37) и фотоны после *PBS* регистрируются идеальными фотодетекторами. Регистрация в j -ом канале фотона, порождаемого оператором $\hat{n}_j^{(b)}$, дает в выражениях (37), (36) множитель $+1$, а оператором $\hat{n}_j^{(c)}$ — множитель -1 . Приписывая факту детектирования фотона знаки множителей, приходим к выводу, что реализуются лишь экспериментальные ситуации, приведенные в табл. 1.

Согласно табл. 1, из возможных $2^3 = 8$ исходов осуществляются лишь 4. В каждом из каналов вклады со знаками «+» или «−» равновероятны $1/2$. Парная вероятность знаков «+» в любых двух выбранных каналах равна $1/4$. Казалось бы, процессы в каналах независимы, однако вероятность всех трех «+» также равна $1/4$.

Еще более поразительный результат получается с вкладами со знаком «−». В каждом из каналов они также имеют вероятность $1/2$ и парную вероятность $1/4$. Вероятность же появления одновременно трех вкладов со знаком «−» равна нулю. Такое поведение рассмотренных вероятностей обусловлено квантовой спецификой фотонных корреляций вследствие запутанности (нефакторизуемости) исходного состояния.

В случае четырехкубитового ГХЦ-состояния интерференционное слагаемое в (17) приводит к коррелятору вида

$$\begin{aligned} \Gamma_{GHZ_4}^{(8)} &= \\ &= \langle a_1^{(H)+} a_2^{(H)+} a_3^{(H)+} a_4^{(H)+} a_1^{(V)} a_2^{(V)} a_3^{(V)} a_4^{(V)} \rangle + c.c. = \\ &= \alpha^* \beta + c.c., \end{aligned} \quad (38)$$

которое отличается от (25) количеством множителей в усредняемом операторе. В схеме эксперимента, аналогичной схеме рис. 2, но с четырьмя светоделителями, коррелятор (38) можно преобразовать к виду

$$\Gamma_{GHZ_4}^{(8)} = \langle \hat{N}_1 \hat{N}_2 \hat{N}_3 \hat{N}_4 \rangle = 2|\alpha\beta^*| = 1 \quad (39)$$

Таблица 2. Знаки множителей в (39) при $\Gamma_{GHZ_4}^{(8)} = 1$; N — номер канала

N	1	+	+	−	−
	2	+	+	−	−
	3	+	−	+	−
	4	+	−	+	−

при соответствующем выборе фазовых задержек до светоделителей (ср. с (37)).

Возможные экспериментальные результаты в данном случае приведены в табл. 2. Здесь из возможных $2^4 = 16$ исходов реализуется только 8. Знаки «+» и «−» в каждом канале опять равновероятны ($1/2$), попарная же вероятность «+» или «−» в любых двух каналах равна $1/4$. Вероятность появления трех «+» в любых трех выбранных каналах равна $1/8$, но вероятность трех «−» нулевая. Однако вероятность появления только четырех «+» и только четырех «−» равна ($1/8$). Налицо парадоксальная ситуация, когда статистическая независимость во всевозможных тройных корреляциях приводит к статистической зависимости в корреляциях четвертого порядка.

Для общего случая N -кубитового ГХЦ-состояния

$$|GHZ_N\rangle = \alpha|H\rangle_1 \dots |H\rangle_N + \beta|V\rangle_1 \dots |V\rangle_N, \quad (40)$$

коррелятор, связанный с истинно квантовыми корреляциями, имеет, очевидно, вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{GHZ_N}^{(2N)} &= \left\langle \prod_{j=1}^N a_j^{(H)+} a_j^{(V)} \right\rangle + c.c. = \\ &= \left\langle \prod_{j=1}^N \hat{N}_j \right\rangle = 2|\alpha^* \beta|. \end{aligned} \quad (41)$$

В общем случае для N -кубитового ГХЦ-состояния парадокс можно сформулировать следующим образом. Вероятности одновременной регистрации после светоделителей $N-1$ и N фотонов, вклад которых в коррелятор числа фотонов отмечается знаком «+», равны $(1/2)^{(N-1)}$, хотя вероятность появления отдельных таких фотонов равна $1/2$, и они оказываются статистически независимыми вплоть до корреляторов $(N-1)$ -го порядка. Совместная же вероятность регистрации нечетного числа фотонов, вклад которых отмечается знаком «−», всегда оказывается равной нулю, тогда как вероятности одновременной регистрации N фотонов со знаком только «+» и со

знаком только « $-$ » одинаковы, если N — четное число. Напомним, что такой вывод относится к случаю, когда корреляторы вида (46) равны единице. Если реализовать условия, когда многофотонный коррелятор (46) равен -1 , то ситуация меняется на противоположную.

Квантовый аналог парадокса Бернштейна можно наблюдать и для других кубитовых состояний. Так, в НУХФ (19) кластерного состояния он связан с интерференционными слагаемыми P_{1234} и S_{1234} . Эти слагаемые в схеме эксперимента с четырьмя светоделителями, смешивающими ортогонально поляризованные поля с одинаковыми частотами, как и в случае четырехкубитового ГХЦ-состояния, порождают коррелятор

$$\begin{aligned} \Gamma_C^{(8)} &= \left\langle \prod_{j=1}^4 \hat{N}_j \right\rangle = \\ &= \langle a_1^{(H)+} a_2^{(H)+} a_3^{(H)+} a_4^{(H)+} a_1^{(V)} a_2^{(V)} a_3^{(V)} a_4^{(V)} \rangle + \\ &+ \langle a_1^{(H)+} a_2^{(H)+} a_3^{(H)} a_4^{(H)} a_1^{(V)} a_2^{(V)} a_3^{(V)+} a_4^{(V)+} \rangle + \text{c.c.} = \\ &= 2[\alpha\delta \cos(\Phi_{12} + \Phi_{34}) + \beta\gamma \cos(\Phi_{12} - \Phi_{34})], \quad (42) \end{aligned}$$

где

$$\Phi_{jk} = \varphi_j + \varphi_k.$$

Если выполняется условие

$$\alpha\delta = \beta\gamma,$$

то получим

$$\Gamma_C^{(8)} = 4\alpha\delta \cos \Phi_{12} \cos \Phi_{34}. \quad (43)$$

При условии

$$\alpha\delta = 1/4$$

и оптимальных значениях фазовых задержек,

$$\cos \Phi_{12} = \cos \Phi_{34} = 1,$$

получаем результат, аналогичный результату для четырехкубитового ГХЦ-состояния.

Другого рода парадоксы обусловлены в (16)–(19) слагаемыми, содержащими множители H_j или V_j и множители P_{jk} или S_{jk} , являющимися интерференционными слагаемыми (ср. с последними слагаемыми в НУХФ (21) для ЭПР-состояния). Слагаемые вида $H_j S_{kl}$ в (16) означают, что при регистрации в j -ом канале фотона в исходном состоянии с горизонтальной поляризацией фотоны в других двух каналах будут в ЭПР-состоянии (ср. [26]).

В $|W_4\rangle$ - и $|C\rangle$ -состояниях из структур НУХФ (18) и (19) следует, что ЭПР-состояния могут формироваться при регистрации двух любых фотонов с горизонтальной (вертикальной) поляризацией или одного фотона с горизонтальной поляризацией, а второго с вертикальной.

7. МЕРА КВАНТОВОСТИ МНОГОКУБИТОВЫХ СОСТОЯНИЙ

Проведенный выше анализ НУХФ показал, что они содержат информацию как об истинных квантовых корреляциях, так и псевдоклассических. Последние имеют такие же значения, как если бы наша система находилась в смешанном состоянии, построенном на ортогональных «слагаемых» исследуемого многокубитового состояния. Для случая трехкубитового ГХЦ-состояния конструируемое смешанное состояние дается выражением (34).

Оператор плотности ГХЦ-состояния (1) можно представить как

$$\rho_{GHZ_3} = \rho_m + \hat{q}, \quad (44)$$

где ρ_m — оператор плотности смешанного состояния (34), а оператор \hat{q} имеет вид

$$\hat{q} = \alpha\beta^* |HHH\rangle\langle VVV| + \alpha^*\beta |VVV\rangle\langle HHH|. \quad (45)$$

Именно с оператором \hat{q} связано появление интерференционных слагаемых в НУХФ (15) и корреляций вида (25). В матричном представлении у оператора \hat{q} отсутствуют диагональные элементы; недиагональные элементы оператора (45) можно условно трактовать как операторы преобразования поляризации фотонов.

Поскольку мы рассматриваем чистое состояние,

$$\text{Tr}(\rho_{GHZ_3}) = \text{Tr}(\rho_{GHZ_3}^2) = 1.$$

Кроме того,

$$\text{Tr}(\rho_m) = 1,$$

тогда как

$$\text{Tr}(\rho_m^2) = \mu$$

и является, как известно, параметром чистоты смешанного состояния. Нетрудно показать, что выполняется соотношение

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{q}^2) &= \text{Tr}((\rho_{GHZ_3} - \rho_m)^2) = \\ &= 1 - \text{Tr}(\rho_m^2) = 1 - \mu. \end{aligned} \quad (46)$$

Таким образом, след от квадрата разности полного оператора плотности системы ρ_{GHZ_3} и оператора ρ_m , отвечающего за смешанную часть ρ_{GHZ_3} , дает кумулятивную количественную оценку истинной квантовости состояния. Эта мера похожа на геометрическую меру [15]. При этом отношение

$$Q = \frac{\text{Tr}(\hat{q}^2)}{\text{Tr}(\rho_m^2)} = \frac{1}{\mu} - 1 \quad (47)$$

можно рассматривать как степень квантовости запутанного состояния. Для исходного смешанного состояния ($\hat{q} = 0$) параметр $Q = 0$.

В соответствии с (34), (45) для ГХЦ-состояния, учитывая условие нормировки (6), получаем

$$Q_{GHZ} = \left(\frac{1}{2|\alpha\beta|^2} - 1 \right)^{-1}. \quad (48)$$

Максимальное значение $Q_{GHZ} = 1$ достигается при

$$|\alpha| = |\beta| = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

т. е. при тех же значениях, при которых отсутствуют псевдоклассические корреляции 2-го порядка. Заметим, что формула (48) справедлива и для ЭПР-состояния.

В других изучаемых состояниях псевдоклассические корреляции чисел фотонов в соответствии с (16)–(19) обусловлены следующими смешанными состояниями.

Для $|W_3\rangle$ -состояния (2)

$$\begin{aligned} \rho_{m,3} &= |\alpha|^2 |HHV\rangle\langle VHH| + |\beta|^2 |HVN\rangle\langle HVN| + \\ &+ |\gamma|^2 |VHN\rangle\langle HNV|; \end{aligned} \quad (49)$$

для $|W_4\rangle$ -состояния (4)

$$\begin{aligned} \rho_{m,4} &= |\alpha|^2 |HHHV\rangle\langle VHHH| + \\ &+ |\beta|^2 |HHVN\rangle\langle HHVN| + \\ &+ |\gamma|^2 |HVVH\rangle\langle HVVH| + \\ &+ |\delta|^2 |VHHH\rangle\langle HHHV|; \end{aligned} \quad (50)$$

для кластерного состояния

$$\begin{aligned} \rho_{m,c} &= |\alpha|^2 |VVVV\rangle\langle VVVV| + \\ &+ |\beta|^2 |VVHH\rangle\langle HHVV| + \\ &+ |\gamma|^2 |HHVV\rangle\langle VVHH| + \\ &+ |\delta|^2 |HHHH\rangle\langle HHHH|. \end{aligned} \quad (51)$$

Далее, пользуясь соотношением (47), мы найдем выражения для степени квантовости Q этих состояний. Для $|W_3\rangle$ -состояния получаем

$$Q_3 = \frac{1}{|\alpha|^4 + |\beta|^4 + |\gamma|^4} - 1, \quad (52)$$

а для $|W_4\rangle$ -состояния и кластерного состояния имеем один и тот же результат:

$$Q_{4,c} = \frac{1}{|\alpha|^4 + |\beta|^4 + |\gamma|^4 + |\delta|^4} - 1. \quad (53)$$

Максимальные значения $Q_3, Q_{4,c}$ можно определить с помощью метода Лагранжа. Учитывая условия нормировки состояний, получаем

$$Q_3^{(max)} = 2, \quad Q_{4,c}^{(max)} = 3. \quad (54)$$

Для $|W_3\rangle$ -состояния максимальное значение Q достигается при

$$|\alpha|^2 = |\beta|^2 = |\gamma|^2 = 1/3,$$

а для $|W_4\rangle$ -состояния и кластерного состояния — при

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1/2. \quad (55)$$

Из полученных результатов ясно следует, что значение параметра Q увеличивается с ростом числа слагаемых n в векторе многокубитового состояния, фактически

$$Q^{(max)} = n - 1.$$

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе выполнен систематический анализ фотонных многокубитовых состояний на основе НУХФ бозе-операторов. Такой подход наглядно показывает наличие у многокубитовых состояний псевдоклассических и истинных квантовых корреляций; эти корреляции можно измерить в экспериментах со счетом фотонов. Расчеты проведены для ГХЦ- и W -состояний и кластерного состояния. Псевдоклассические корреляции (смешанные моменты) числа фотонов подчиняются соотношениям для случайных классических величин. Истинные квантовые корреляции связаны с интерференционными слагаемыми в НУХФ и проявляются в квантовых парадоксах.

Впервые показано, что в многокубитовых состояниях, наряду с уже известными парадоксами, можно наблюдать аналог парадокса Бернштейна для классических случайных величин, в котором отображается, разумеется, специфика корреляций запутанных состояний. Так, например, в трехкубитовом ГХЦ-состоянии при определенной постановке и обработке результатов счета фотонов попарная независимость регистрации фотонов не приводит к независимости в тройных корреляциях (табл. 1). В случае

N -кубитового ГХЦ-состояния такая независимость нарушается в фотонных корреляциях N -го порядка.

Выявление истинных квантовых корреляций многокубитовых состояний позволило ввести меру квантовости (46), определяемую следом от квадрата разности полного оператора плотности системы и оператора плотности смешанного состояния, входящего в состав полного оператора плотности многофотонного состояния. Такое определение меры квантовости дает кумулятивную количественную оценку. Введенная при этом степень квантовости состояния (47) может быть определена из измерений статистики фотонов. Заметим, что чаще всего для определения квантовости системы используется энтропийный подход.

Найдены значения коэффициентов в векторах многофотонных состояний, отвечающих их максимальной истинной квантовости, которые обосновывают максимальную запутанность. Значения этих коэффициентов обычно записывают из интуитивных соображений. Для ЭПР-состояния значения найденных коэффициентов совпадают с определенными разложением Шмидта.

Мы полагаем, что анализ характера корреляций запутанных многофотонных состояний на основе расчета нормально-упорядоченной характеристической функции, кроме многокубитовых состояний, может быть также плодотворным, например, для кутритов, куквартов и частиц, подчиняющихся фермионной статистике.

Авторы благодарят за полезные обсуждения работы В. И. Манько и М. Ю. Сайгина.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-02-00610).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Белинский, Д. Н. Клышко, *УФН* **163**, 1 (1993).
2. Дж. Гринштейн, А. Зайонц, *Квантовый вызов. Современные исследования оснований квантовой механики*, Изд-во Интеллект, Москва (2008).
3. Дж. Прескилл, *Квантовая информация и квантовые вычисления*, ИКИ, Москва–Ижевск (2008).
4. *Квантовое изображение*, под ред. М. И. Колобова, Физматлит, Москва (2009).
5. *Quantum Information with Continuous Variables of Atoms and Light*, ed. by N. J. Cerf, G. Leuchs, and E. S. Polzik, Imperial College Press, London (2007).
6. Н. М. Wiseman and G. J. Milburn, *Quantum Measurement and Control*, Cambridge University Press, Cambridge (2010).
7. A. Furusawa and P. van Loock, *Quantum Teleportation and Entanglement*, WILEY-VCH Verlag, Weinheim (2011).
8. L. Henderson and V. Vedral, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, 6899 (2001).
9. H. Ollivier and W. H. Zurek, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 017901 (2002).
10. V. Vedral, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 050401 (2003).
11. C. Yu and H. Song, *Phys. Rev. A* **73**, 022325 (2006).
12. D. L. Zhou, B. Zeng, Z. Xu, and L. You, *Phys. Rev. A* **74**, 052110 (2006).
13. D. Kazlikowski, A. Sen(De), U. Sen, V. Vedral, and A. Winter, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 070502 (2008).
14. A. Streltsov, H. Kampermann, and D. Bruss, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 170502 (2011).
15. K. Modi, A. Brodutch, H. Cable, T. Paterek, and V. Vedral, arXiv:quant-ph1112.6238v1.
16. J.-W. Pan, Z.-B. Chen, C.-Y. Lu, H. Weifurter, A. Zeilinger, and M. Zukovski, *Rev. Mod. Phys.* **84**, 777 (2012).
17. А. В. Белинский, Д. Н. Клышко, *ЖЭТФ* **102**, 1116 (1994).
18. В. П. Карасёв, *Письма в ЖЭТФ* **84**, 759 (2006).
19. В. П. Карасёв, С. П. Кулик, *ЖЭТФ* **131**, 37 (2007).
20. D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics*, Springer, Berlin (2008).
21. В. Н. Горбачев, С. П. Кулик, А. И. Трубилко, *ЖЭТФ* **134**, 457 (2008).
22. А. Н. Малахов, *Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований*, Сов. радио, Москва (1978).
23. С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, А. С. Чиркин, *Статистическая радиофизика и оптика. Случайные колебания и волны в линейных системах*, Физматлит, Москва (2010).
24. Й. Стоянов, *Контрпримеры в теории вероятностей*, Факториал, Москва (1999).
25. И. С. Жукова, Г. А. Малиновская, А. И. Саичев, *Современные методы анализа случайных процессов и полей*, Нижегородский ун-т, Нижний Новгород (2006).
26. А. В. Белинский, *Письма в ЖЭТФ* **54**, 13 (1991).