

СТОЯЧИЕ СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ И СОЛИТОНЫ В КВАЗИОДНОМЕРНОЙ СПИРАЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ

В. В. Киселев, А. А. Расковалов*

*Институт физики металлов Уральского отделения Российской академии наук
620991, Екатеринбург, Россия*

Поступила в редакцию 3 июля 2012 г.

В рамках модели синус-Гордона вычислен спектр поглощения мощности внешней накачки в квазиодномерной спиральной структуре легкоплоскостных магнетиков без центра инверсии при наличии постоянного магнитного поля, перпендикулярного оси магнитной спирали. Показано, что эти данные можно использовать для определения материальных констант магнетика, диагностики спиновых волн и солитонов в его спиральной структуре. Обсуждается возможность использования магнитооптических методов для наблюдения локальных трансляций спиральной структуры при образовании и движении в ней солитонов.

DOI: 10.7868/S0044451013020107

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время активно изучаются хиральные (в том числе молекулярные) магнетики, в которых формирование спиральных структур обусловлено значительным взаимодействием Дзялошинского–Мории [1, 2]. Повышенный интерес к таким материалам объясняется тем, что они обычно прозрачны в видимой части спектра, что позволяет использовать их при создании магнитооптических приборов и устройств. Кроме того, изменяя химический состав соединений, можно в широких пределах менять спин-спиновые взаимодействия и энергию магнитной анизотропии. Это позволяет создавать условия, подходящие для формирования солитонов в геликоидальных структурах.

Теоретическое описание солитонов и нелинейных волн в спиральных структурах осложнено необходимостью учета изначально нелинейного, неоднородного основного состояния среды. Модель синус-Гордона наиболее популярна при изучении всевозможных несоизмеримых магнитных и кристаллических структур. В контексте разных физических задач спектр линейных мод этой модели подробно исследован в работах [3–5]. Установлено, что учет квантовых поправок мало изменяет результаты классической теории [3], а учет дискретности сре-

ды существен только вблизи точки фазового перехода из несоизмеримой фазы в соизмеримую [5]. Насколько хорошо модель синус-Гордона соответствует реальным гелимагнетикам, можно судить только после сопоставления следствий теории с экспериментальными данными. Приведем примеры синтезированных в последние годы соединений, для которых ее анализ может оказаться полезным.

В кристаллах метабората меди (CuB_2O_4) при температуре ниже $T_c = 10$ К реализуется спиральная магнитная структура [6–9]. Это подтверждается нейтронографическими исследованиями [6, 7].

Квазиодномерная спиральная структура обнаружена в гексагональных кристаллах $\text{Cr}_{1/3}\text{NbS}_2$. Об этом свидетельствуют магнитные измерения [10, 11] и данные по рассеянию нейтронов [12]. Для соединения $\text{Cr}_{1/3}\text{NbS}_2$ модель синус-Гордона верно описывает магнитооптические данные [13] о зависимости периода спиральной структуры от внешнего магнитного поля, перпендикулярного оси магнитной спирали. В данной работе мы обращаем внимание на то, что такие эксперименты могут дать дополнительную информацию о материальных параметрах кристалла. Кроме того, магнитооптическими методами можно визуализировать особые солитоны [14–16], которые являются «лишними доменными стенками» в спиральной (полосовой доменной) структуре.

Для диагностики магнитной структуры в хиральных органических гелимагнетиках «желтая игла» («yellow needle», YN) ($T_c = 53$ К) и «зеленая

*E-mail: kiseliev@imp.uran.ru

игла» («green needle», GN) ($T_c = 38$ К) в работах [17, 18] использованы данные по резонансному поглощению мощности периодической накачки. При интерпретации измерений предполагалось, что поглощение мощности происходит на частотах двух типов спиновых волн в образце, который имел форму пластины. Первый тип — это стоячие волны вдоль нормали к пластине, а второй — спиновые возбуждения в самой спиральной (полосовой доменной) структуре, которая трактовалась как решетка солитонов (доменных границ). Частоты первых волн в работах [17, 18] названы спин-волновыми, а вторых — спин-солитонными. В работе [19] модель синус-Гордона использовалась для качественного объяснения спектров электронного спинового резонанса в квазиодномерных несоизмеримых структурах шестиподрешеточных неколлинеарных антиферромагнетиков PbMnVr_3 и $\text{RbFe}(\text{MoCo}_4)_2$ с сильной легкоплоскостной анизотропией. Между тем, вопросы о форме линии поглощения, о частотах поглощаемой мощности, о возможности формирования солитонов в геликоидальной структуре (т. е. солитонов в решетке солитонов) требуют более детального теоретического анализа. Предложенная в работе [20] теория поглощения СВЧ-мощности в квазиодномерной спиральной структуре дает форму линии в виде суммы дельта-функций и содержит неточности в определении частот поглощения.

В данной работе в рамках модели синус-Гордона (с учетом затухания) проведен расчет поглощения мощности однородной накачки в спиральной структуре квазиодномерных легкоплоскостных магнетиков без центра инверсии при наличии постоянно магнитного поля, перпендикулярного оси магнитной спирали. В модели синус-Гордона спектр спин-волновых мод на фоне спиральной (полосовой доменной) структуры имеет две ветви — квазиоптическую и квазиакустическую. Квазиакустическая ветвь характеризует внутрigrаничные колебания намагниченности в полосовой структуре, а квазиоптическая — внутримоментные [21]. При однородной накачке возбуждаются только бегущие в противоположных направлениях вдоль структуры квазиоптические моды. В результате их интерференции образуются стоячие волны с частотами $\tilde{\Omega}_n \approx 2\pi n/\tilde{L}$, где \tilde{L} — период спиральной структуры, n — натуральные числа. Когда частота накачки совпадает с одной из частот стоячих волн, энергия поля накачки резонансно поглощается. Измерения формы линии поглощаемой мощности дают информацию о материальных параметрах спиральной структуры и временах релаксации в ней спиновых волн. преимуще-

ство таких измерений в их достаточной простоте и точности. Кроме того, полученные результаты полезны для планирования экспериментов по обнаружению пульсирующих солитонов (бризеров) в геликоидальной структуре.

2. ТРАНСЛЯЦИИ СПИРАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ И СОЛИТОНЫ

Рассмотрим квазиодномерную (вдоль оси z) спиральную структуру. Будем описывать распределение намагниченности в структуре векторным полем $\mathbf{M}(z, t) = (M_1, M_2, M_3)$, где $\mathbf{M}^2 = M_0^2 = \text{const}$; z, t — пространственная координата и время. Для квазиодномерного ферромагнетика без центра инверсии с анизотропией типа «легкая плоскость» (плоскость xy) плотность энергии в постоянном внешнем магнитном поле $\mathbf{H} = (H, 0, 0)$, $H > 0$, записывается в виде

$$\tilde{w} = \frac{\alpha}{2} (\partial_z \mathbf{M})^2 + \kappa (M_1 \partial_z M_2 - M_2 \partial_z M_1) + \frac{\beta}{2} M_3^2 - M_1 H.$$

Здесь $\alpha, \beta > 0$ и κ — постоянные соответственно обменного взаимодействия, магнитной анизотропии и взаимодействия Дзялошинского. При преобладающей легкоплоскостной анизотропии в параметризации поля \mathbf{M} углами Θ, Φ ,

$$\mathbf{M} = M_0 (\sin \Theta \cos \Phi, \sin \Theta \sin \Phi, \cos \Theta), \quad (2.1)$$

даже в возбужденных состояниях геликоидальной структуры угол Θ близок к значению $\Theta = \pi/2$. Для реальных гелимагнетиков в приближении [14, 16]

$$\frac{\kappa^2}{\alpha} < \frac{H}{M_0} \ll \beta \quad (2.2)$$

угол Θ выражается через Φ как

$$\Theta = \pi/2 + (\gamma M_0 \beta)^{-1} \partial_t \Phi,$$

где γ — магнитомеханическое отношение. Угол Φ определяется уравнением синус-Гордона

$$\alpha \partial_z^2 \Phi - \frac{1}{(\gamma M_0)^2 \beta} \partial_t^2 \Phi - \frac{H}{M_0} \sin \Phi = 0,$$

которое в безразмерных переменных $z' = z \sqrt{H/(\alpha M_0)}$, $t' = \gamma \sqrt{\beta H M_0} t$ принимает вид

$$\partial_{z'}^2 \Phi - \partial_{t'}^2 \Phi + \sin \Phi = 0.$$

Безразмерная плотность энергии ферромагнетика $w = \dot{w}/M_0H$ описывается выражением

$$w = \frac{1}{2} \left[(\partial_{z'} \Phi)^2 + (\partial_{t'} \Phi)^2 \right] + q \partial_{z'} \Phi + (1 - \cos \Phi),$$

где $q = \kappa \sqrt{M_0/\alpha H}$. При $q < 4/\pi$ реализуется однородное распределение намагниченности $\Phi = 0 \pmod{2\pi}$ — соизмеримая фаза, а при $q > 4/\pi$ — несоизмеримая структура в виде одномерной решетки 2π -кинков поля Φ :

$$\Phi \equiv \varphi_0 = \pi - 2\text{am}(\chi, k),$$

где $\chi = z'/k$, $\text{am}(\chi, k)$ — эллиптическая амплитуда Якоби с модулем k ($k^2 \leq 1$) и периодом $L = 2Kk$. Зависимость k от поля H определяется трансцендентным уравнением: $k\pi q - 4E(k) = 0$; $K = K(k)$, $E = E(k)$ — полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода [22].

Реальное значение периода геликоидальной структуры \tilde{L} отличается от L множителем $\sqrt{\alpha M_0/H}$. График зависимости $\tilde{L}(H)$ приведен на рис. 1а, где

$$\tilde{L}|_{H=0} = \frac{\pi^2 \sqrt{\alpha M_0}}{2\sqrt{H_c}}. \quad (2.3)$$

Вблизи точки H_c перехода из несоизмеримой фазы в соизмеримую

$$\tilde{L}(H) \approx \sqrt{\frac{\alpha M_0}{H_c}} \ln \frac{1}{\sqrt{H_c/H} - 1},$$

$$H < H_c = \left(\frac{\kappa\pi}{4}\right)^2 \frac{M_0}{\alpha}.$$

В работе [13] в соединении $\text{Cr}_{1/3}\text{NbS}_2$ зависимость $\tilde{L}(H)$ измерена экспериментально магнитооптическими методами. Обращаем внимание, что, используя (2.3), из этих данных можно найти обменную постоянную. Используя численные оценки работы [13]: $\tilde{L}|_{H=0} = 48$ нм, $M_0 = \mu_B S/a_0^3$, $S = 3/2$, $\mu_B = 9.27 \cdot 10^{-21}$ эрг/Гс, $a_0 = 1.21$ нм, $H_c \approx 0.23$ Тл (где S — величина спина, a_0 — постоянная решетки), находим

$$\alpha = 4H_c \tilde{L}^2|_{H=0} (M_0 \pi^4)^{-1} = 2.78 \cdot 10^{-10} \text{ см}^2.$$

В работах [14–16] установлено, что в рамках модели синус-Гордона нелинейные возбуждения геликоидальной магнитной структуры делятся на два принципиально разных класса: спиновые волны и солитоны. В отличие от спиновых волн, образование и движение солитонов всегда сопровождается локальными трансляциями спиральной (полосовой

доменной) структуры. Вычислены энергии солитонов в спиральной структуре. Расчет не подтвердил гипотезу [17, 18] о «квантовании» энергии солитонов в магнитном поле. В модели синус-Гордона возможны только два типа солитонов: «лишние» доменные стенки (кинки) в геликоидальной структуре и бризеры. Кинки, в отличие от бризеров, не имеют внутренних колебательных степеней свободы и не бывают покоящимися. Наименьшей энергией обладают «лишние» доменные стенки, хиральность которых совпадает с хиральностями доменных стенок спиральной структуры. Анализ показывает, что их энергия слабо зависит от магнитного поля в диапазоне $0 < H \lesssim 0.6H_c$. В этом диапазоне есть выделенные солитоны с наименьшей энергией. Для них поле Φ имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(z', t) = 4 \arg \left(\sqrt{p} \exp \frac{i\varphi_0(\chi)}{4} + \frac{i}{\sqrt{p}} \exp \frac{i\varphi_0(\chi + K)}{4} \right), \quad (2.4) \\ p = \frac{1}{\sqrt{\text{dn}\chi}} \exp \left[\frac{(1+k')\chi}{2} - \varepsilon \sqrt{k'} t \right] c. \end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon = \pm 1$, $c = \text{const} > 0$, $\text{dn}(\chi, k)$ — эллиптическая функция Якоби от модуля k , $k' = \sqrt{1-k^2}$ — дополнительный модуль. В безразмерных переменных ширина солитона (2.4) $d \sim 2k/(1+k')$, а средняя скорость V его движения в структуре зависит от знака ε : $V = 2\varepsilon \sqrt{k'}/(1+k')$.

Реальные ширина и скорость солитона получаются умножением безразмерных значений этих величин соответственно на множители $\sqrt{\alpha M_0/H}$ и $\gamma M_0 \sqrt{\alpha \beta}$. В размерных переменных ширина солитона (2.4) в диапазоне $0 < H \lesssim 0.6H_c$ слабо зависит от внешнего магнитного поля и для параметров соединения $\text{Cr}_{1/3}\text{NbS}_2$ составляет величину порядка $\pi \sqrt{\alpha M_0/H_c} \approx 30.5$ нм. Размерная скорость солитона (см. рис. 1б) заметно меняется только вблизи точки фазового перехода, где она уменьшается по закону

$$\tilde{V} \approx \gamma M_0 \sqrt{\alpha \beta} \left[\sqrt{H_c/H} - 1 \right]^{1/4}, \quad H < H_c.$$

Используя для оценки данные для $\text{Cr}_{1/3}\text{NbS}_2$ и полагая $\beta \sim 1-10$, находим значение $\gamma M_0 \sqrt{\alpha \beta} \approx 13-40$ м/с. Малые значения скорости солитона благоприятны для его наблюдения.

Спиральная структура локально сжата в области солитона. После прохождения солитона (2.4) она сдвигается на полпериода в направлении, противоположном скорости солитона, и восстанавливает

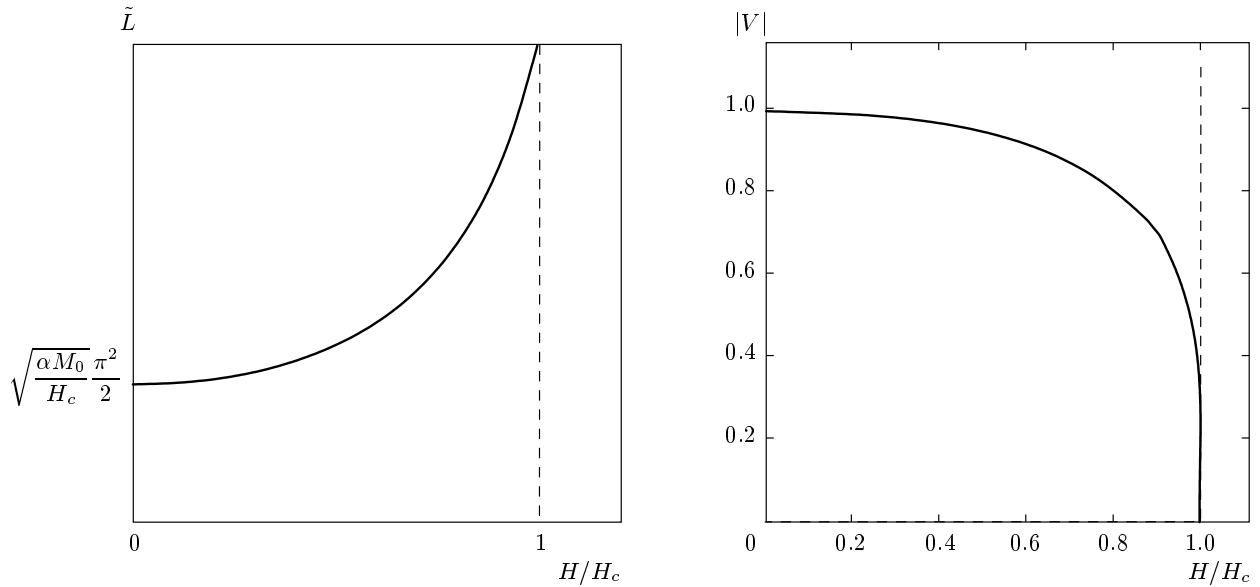


Рис. 1. Зависимости периода решетки кинков \tilde{L} и скорости V «лишнего» кинка в решетке, обладающего наименьшей энергией, от внешнего поля $0 \leq H < H_c$

свою периодичность. Макроскопические локальные трансляции геликоидальной структуры при движении в ней «лишних» доменных границ — кинков поля Φ — можно наблюдать магнитооптическими методами. Похожие эксперименты использованы в работах [23, 24] для визуализации дрейфа полосовых доменов в кристаллах ферритов-гранатов. Второй тип солитонов — бризеры — легче обнаружить по резонансному поглощению мощности периодической внешней накачки. В следующем разделе обсудим эту возможность.

3. ПОГЛОЩЕНИЕ СВЧ-МОЩНОСТИ СПИНОВЫМИ ВОЛНАМИ И БРИЗЕРАМИ

При сравнительно малых внешних воздействиях геликоидальная структура не испытывает локальных трансляций и не содержит солитонов. При таких условиях вдоль магнитной спирали распространяются линейные [3–5, 25] и слабонелинейные [15, 16] спиновые волны с колебаниями намагниченности около равновесных положений в геликоидальной структуре. Рассмотрим задачу о поглощении мощности однородной накачки на стоячих спиновых волнах в спиральной структуре. Когда магнитное поле накачки $h = h(t)$ направлено вдоль оси спиральной структуры, плотность энергии ферромагнетика имеет вид

$$\tilde{w} = \frac{\alpha}{2} (\partial_z \mathbf{M})^2 + \kappa (M_1 \partial_z M_2 - M_2 \partial_z M_1) + \frac{\beta}{2} M_3^2 - M_1 H - M_3 h.$$

В параметризации (2.1) решение уравнений Ландау–Лифшица будем искать в виде

$$\Theta = \frac{\pi}{2} + u(z, t), \quad \Phi = \varphi_0(z) + v(z, t),$$

$$|u(z, t)|, |v(z, t)| \ll 1.$$

Предполагая справедливость оценки (2.2) и малость накачки: $|h|/(M_0 \beta) \ll 1$, из уравнений Ландау–Лифшица получаем линейную систему для расчета спин-волновых полей u, v :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\gamma M_0} \partial_t u + \left[\alpha \partial_z^2 - \frac{H}{M_0} \cos \varphi_0 \right] v &\approx 0, \\ \frac{1}{\gamma M_0} \partial_t v - \beta u - \frac{h}{M_0} &\approx 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Отсюда следует замкнутое уравнение для v :

$$-\partial_t^2 v - \nu \partial_t v + (\partial_z^2 - \cos \varphi_0) v + \frac{\partial_t h}{\sqrt{M_0 \beta H}} \approx 0. \quad (3.2)$$

Слагаемое $-\nu \partial_t v$ ($\nu > 0$) введено в левую часть (3.2) для того, чтобы учесть релаксацию спиновых волн. При переходе от (3.1) к (3.2) введены прежние безразмерные переменные.

В том же приближении выражение для изменения энергии единицы длины спиральной структуры за единицу времени имеет вид

$$\partial_t \tilde{w} = \frac{\gamma M_0 H}{2K} \int_0^{2K} d\chi \left(\partial_{\nu} v \partial_{\nu} h - \nu \sqrt{M_0 \beta H} (\partial_{\nu} v)^2 - \frac{\partial_{\nu} h^2}{2\sqrt{M_0 \beta H}} \right). \quad (3.3)$$

В левой части (3.3) используются размерные переменные \tilde{w}, t , а в правой — безразмерные t', χ . Как будет показано ниже, функция $v = v(\chi)$ имеет период $2K$. Поэтому граничные вклады от v , возникающие от интегрирования по частям при получении (3.3), оказываются равными нулю.

В случае периодического поля $h = \text{Re}[h_0 \exp(i\omega_0 t')]$ усреднение $\partial_t \tilde{w}$ по периоду накачки $T = 2\pi/\omega_0$ дает поглощаемую мощность:

$$\tilde{Q} = \frac{\gamma M_0 H}{2KT} \int_0^T dt' \int_0^{2K} d\chi \left(\partial_{\nu} v \partial_{\nu} h - \nu \sqrt{M_0 \beta H} (\partial_{\nu} v)^2 \right).$$

Будем искать поле v в виде

$$v(\chi) = \text{Re}[f(\chi) \exp(i\omega_0 t')].$$

Тогда для расчета амплитуды $f(\chi)$ получаем уравнение

$$\left(\omega_0^2 - i\omega_0 \nu + \frac{1}{k^2} [\partial_{\chi}^2 - 2k^2 \text{sn}^2(\chi, k) + k^2] \right) f(\chi) = -\frac{i\omega_0 h_0}{\sqrt{M_0 \beta H}}. \quad (3.4)$$

Покажем, что функция $f(\chi)$ выражается через решения уравнения Ламе. Линейно независимыми решениями уравнения Ламе

$$[-\partial_{\chi}^2 + 2G(\chi + iK')] \Psi = E \Psi, \quad (3.5)$$

отвечающими собственному значению $E = -G(\lambda)$, являются функции $\Psi(\chi, \pm\lambda)$, где

$$\Psi(\chi, \lambda) = A(\chi, \lambda) \exp(ip(\lambda)\chi), \quad (3.6)$$

$$A(\chi, \lambda) = \frac{\sigma(\chi + iK' + \lambda)}{\sigma(\chi + iK')\sigma(\lambda)} \times \exp\left(-\frac{\eta_1 \lambda}{K} \chi - \eta_3 \lambda\right), \quad (3.7)$$

$$p(\lambda) = \frac{i}{K} [K\zeta(\lambda) - \eta_1 \lambda] = iZ(\lambda + iK') - \frac{\pi}{2K}. \quad (3.8)$$

Здесь $\sigma(\lambda), \zeta(\lambda), G(\lambda)$ — функции Вейерштрасса с периодами $[2K, 2iK']$, $\eta_1 = \zeta(K), \eta_3 = \zeta(iK'), K' = K(k')$ — полный эллиптический интеграл первого рода от дополнительного модуля k' .

Параметр $p(\lambda)$ (3.8) для функции $\Psi(\chi, \lambda)$ играет роль блоховского квазиимпульса. Квазиимпульс веществен на отрезках $\Gamma_1 = \{iv : |v| \leq K'\}$ и $\Gamma_2 = \{iv + K : |v| \leq K'\}$, которые определены по $\text{mod}(2K, 2iK')$. Эти отрезки соответствуют квазиоптической и квазиакустической ветвям спин-волнового спектра.

Модулирующий множитель $A(\chi, \lambda)$ (3.7) периодичен по χ с периодом $2K$, и потому допускает разложение в ряд Фурье [25]:

$$A(\chi, \lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m(\lambda) \exp\left(\frac{i\pi m}{K} \chi\right). \quad (3.9)$$

Коэффициенты Фурье найдем, вычисляя интеграл от $B = A(\chi, \lambda) \exp(-i\pi n \chi / K)$ по контуру C , изображенному на рис. 2а. С одной стороны, в силу квазипериодичности функции $A(\chi)$,

$$A(\chi \pm 2K) = A(\chi), \quad A(\chi - 2iK') = A(\chi) \exp\left(\frac{i\pi \lambda}{K}\right),$$

имеем

$$\oint_C d\chi B(\chi) = \int_{-K}^K d\chi B(\chi) \left[1 - \exp\left(\frac{i\pi \lambda}{K} - \frac{\pi n}{K} 2K'\right) \right].$$

С другой стороны, подынтегральная функция внутри контура C аналитична по χ всюду, за исключением простого полюса в точке $u = -iK'$. Напомним, что $\sigma(s)$ — целая функция с нулями в вершинах сетки периодов: $s = 2Kl + 2iK'm$, где l, m — целые числа. Учитывая, что $\partial_s \sigma(s)|_{s=0} = 1$, по теореме Коши о вычетах находим, что

$$\oint_C d\chi B(\chi, \lambda) = -2\pi i \exp\left(\frac{i\pi \lambda}{2K} - \frac{\pi n K'}{K}\right).$$

Отсюда имеем

$$A_n(\lambda) = \frac{1}{2K} \int_{-K}^K d\chi B(\chi, \lambda) = \frac{\pi}{2K} \sin^{-1} \left[\frac{\pi}{2K} (\lambda + 2iK'n) \right],$$

где $|\text{Im } \lambda| \leq K'$.

Интегрирование уравнения (3.4) нетрудно выполнить, если заметить, что на контуре $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ функции Ламе удовлетворяют условию замкнутости:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} d\mu \Psi(\chi, \mu) \Psi(\chi', -\mu) = \delta(\chi - \chi'). \quad (3.10)$$

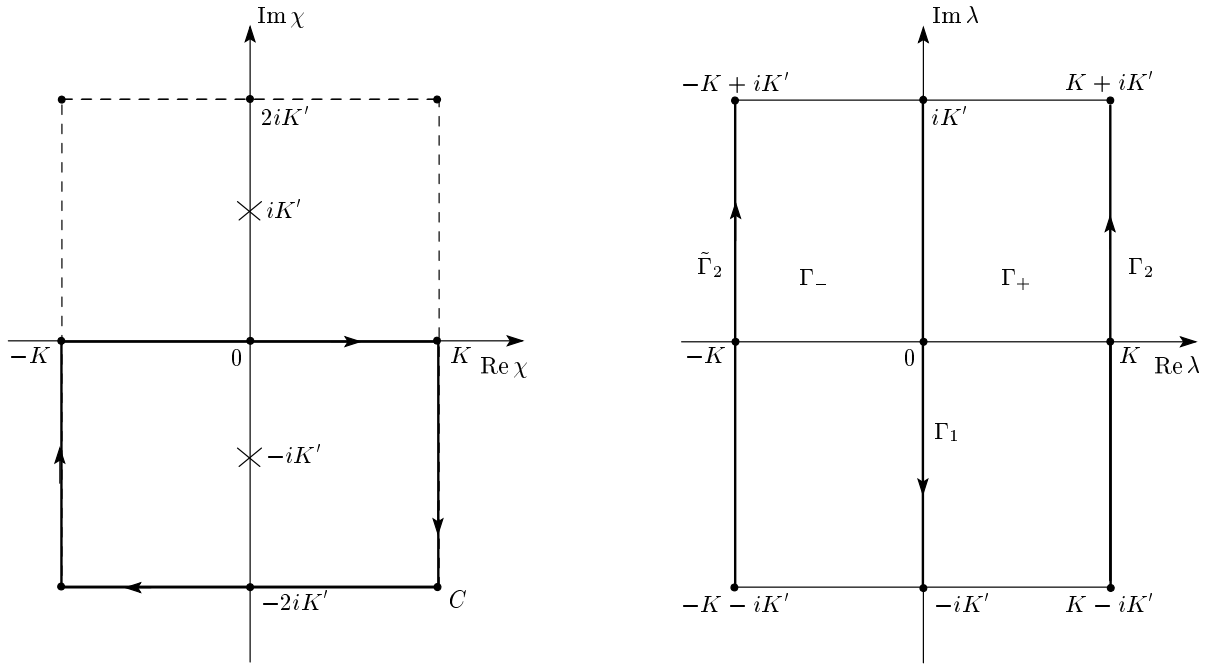


Рис. 2. Контур C в комплексной χ -плоскости (а) и области Γ_{\pm} в λ -плоскости (б)

Для доказательства соотношения (3.10), найдем резольвенту $R(\chi, \chi', \lambda)$ уравнения Ламе, т. е. решение сингулярного уравнения

$$[-\partial_{\chi}^2 + 2G(\chi + iK') + G(\lambda)]R(\chi, \chi', \lambda) = \delta(\chi - \chi') \quad (3.11)$$

с граничными условиями

$$\partial_{\chi}R(\chi, \chi', \lambda)|_{\chi=\chi'+\varepsilon} - \partial_{\chi}R(\chi, \chi', \lambda)|_{\chi=\chi'-\varepsilon} = 1, \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Учитывая тождество

$$\Psi(\mu)\partial_{\chi}\Psi(-\mu) - \Psi(-\mu)\partial_{\chi}\Psi(\mu) = \partial_{\mu}G(\mu),$$

выразим резольвенту в терминах функций Ламе:

$$R(\chi, \chi', \lambda) = -\frac{\Psi(\chi, \lambda)\Psi(\chi', -\lambda)}{\partial_{\lambda}G(\lambda)} \text{ при } \chi > \chi',$$

$$R(\chi, \chi', \lambda) = -\frac{\Psi(\chi, -\lambda)\Psi(\chi', \lambda)}{\partial_{\lambda}G(\lambda)} \text{ при } \chi < \chi'. \quad (3.12)$$

Полезно представить (3.12) в виде контурного интеграла:

$$R(\chi, \chi', \lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \frac{d\mu \Psi(\chi, \mu)\Psi(\chi', -\mu)}{G(\mu) - G(\lambda)}. \quad (3.13)$$

Убедимся в эквивалентности формул (3.12), (3.13). Возможность (или невозможность) аналитического продолжения функций Ламе $\Psi(\chi, \lambda)$ по параметру λ обуславливают неравенства:

$$\begin{aligned} \text{Im } p(\lambda) < 0 & \text{ при} \\ \lambda \in \Gamma_- = \{\lambda : -K \leq \text{Re } \lambda \leq 0, |\text{Im } \lambda| \leq K'\}, & \quad (3.14) \\ \text{Im } p(\lambda) > 0 & \text{ при} \\ \lambda \in \Gamma_+ = \{\lambda : 0 \leq \text{Re } \lambda \leq K, |\text{Im } \lambda| \leq K'\}, & \end{aligned}$$

которые определены по $\text{mod}(2K, 2iK')$. Подынтегральное выражение (3.13) является двоякопериодической функцией параметра μ с периодами $[2K, 2iK']$. Согласно формулам (3.6)–(3.8), (3.14), при $\chi > \chi'$ она аналитически продолжается с контура $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ в область Γ_+ , где имеет простой полюс в точке $\mu = \lambda$. Ввиду периодичности подынтегрального выражения (3.13) при сдвигах аргумента μ на $\pm 2iK'$, интегрирование по отрезкам Γ_1 и Γ_2 в (3.13) можно заменить интегрированием по замкнутому контуру $\tilde{\Gamma}$, ограничивающему область Γ_+ (см. рис. 2б). При обходе $\tilde{\Gamma}$ область Γ_+ остается слева. Интегрирование по контуру Γ осуществляется с помощью теоремы Коши о вычетах и дает следующий результат:

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{d\mu \Psi(\chi, \mu)\Psi(\chi', -\mu)}{G(\mu) - G(\lambda)} = -\frac{\Psi(\chi, \lambda)\Psi(\chi', -\lambda)}{\partial_{\lambda}G(\lambda)},$$

который согласуется с (3.12) при $\chi > \chi'$.

При $\chi < \chi'$ подынтегральное выражение (3.13) аналитично в области Γ_- всюду, за исключением простого полюса в точке $\lambda = -\mu$. Интегрирование по отрезкам $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ можно заменить интегрированием по замкнутому контуру $\tilde{\Gamma}$, который охватывает область Γ_- (напомним, что все контуры определены по $\text{mod}(2K, 2iK')$). При обходе контура $\tilde{\Gamma}$ область Γ_- остается справа от него. Применение теоремы Коши при вычислении интеграла по контуру $\tilde{\Gamma}$ снова приводит к верному результату:

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{\Gamma}} \frac{d\mu \Psi(\chi, \mu) \Psi(\chi', -\mu)}{G(\mu) - G(\lambda)} = -\frac{\Psi(\chi, -\lambda) \Psi(\chi', \lambda)}{\partial_\lambda G(\lambda)}.$$

Здесь мы учли, что изменение знака правой части равенства, связанное с отрицательным направлением обхода $\tilde{\Gamma}$, компенсируется нечетностью производной:

$$\partial_\mu G(\mu)|_{\mu=-\lambda} = -\partial_\lambda G(\lambda).$$

Таким образом, представление (3.13) обосновано. Условие замкнутости (3.10) следует из формул (3.11), (3.13).

Для дальнейшего анализа полезно разложение единицы:

$$1 = \int_{-K'}^{K'} ds \Psi(\chi, K + is) \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(-K - is) \delta\left(p(K + is) - \frac{\pi n}{K}\right) - \\ - \int_{-K'}^{K'} ds \Psi(\chi, is) \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(-is) \delta\left(p(is) - \frac{\pi n}{K}\right), \quad (3.15)$$

которое получается в результате интегрирования равенства (3.10) по переменной χ' при использовании разложения (3.9). На контуре Γ_2 уравнения $p(K + is) = \pi n/K$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, имеют единственное решение: $s = 0$ при $n = 0$. На контуре Γ_1 уравнения $p(is) = \pi n/K$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, имеют парные корни $s = v_m$ и $s = v_{-m} = -v_m$, где $m = 1, 2, \dots$, причем при $m \gg 1$ имеем $v_m \approx K/\pi m$.

Применим формулу

$$\delta[\varphi(x)] = \sum_i \delta(x - x_i) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=x_i}^{-1},$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, x_i — корни уравнения $\varphi(x) = 0$, и распишем тождество (3.15) подробнее:

$$1 = \Psi(\chi, K) \frac{A_0(-K)K}{E} - \sum_{n=1}^{\infty} [\Psi(\chi, iv_n) A_n(-iv_n) + \\ + \Psi(\chi, -iv_n) A_{-n}(iv_n)] \times \\ \times \left(\frac{1}{\text{sn}^2(v_n, k')} - \frac{E}{K} \right)^{-1}. \quad (3.16)$$

Здесь

$$A_0(-K) = -\frac{\pi}{2K} = -A_0(K),$$

$$A_n(-iv_n) = \frac{\pi i}{2K} \text{sh}^{-1} \left[\frac{\pi}{2K} (-v_n + 2K'n) \right].$$

С целью записать окончательные формулы в терминах более популярных функций Якоби воспользуемся тождеством [22]

$$G(\lambda) = -(1 + k^2)/3 + \text{sn}^{-2}(\lambda, k)$$

и перепишем уравнение Ламе (3.5) в виде

$$[\partial_\chi^2 - 2k^2 \text{sn}^2(\chi, k) + k^2] \Psi = -\kappa^2(\lambda, k) \Psi, \\ \kappa^2(\lambda, k) = k'^2 - \frac{\text{dn}^2(\lambda, k)}{\text{sn}^2(\lambda, k)}. \quad (3.17)$$

Тогда соотношения (3.16), (3.17) сразу приводят к решению уравнения (3.4) для амплитуды спиновых волн:

$$f(\chi) = -\frac{i\omega_0 h_0}{\sqrt{M_0 \beta H}} \left(\frac{K A_0(-K)}{(\omega_0^2 - i\omega_0 \nu - \Omega_0^2) E} \Psi(\chi, K) - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\text{sn}^{-2}(v_n, k') - \frac{E}{K} \right]^{-1} \times \right. \\ \times \frac{1}{(\omega_0^2 - i\omega_0 \nu - \Omega_n^2)} [A_n(-iv_n) \Psi(\chi, iv_n) + \\ \left. + A_{-n}(iv_n) \Psi(\chi, -iv_n)] \right). \quad (3.18)$$

Здесь

$$\Omega_0^2 = \frac{\kappa^2(\lambda = K, k)}{k^2} = 0,$$

$$\Omega_n^2 = \frac{\kappa^2(\lambda = iv_n, k)}{k^2} = \frac{1}{k^2 \text{sn}^2(v_n, k')}.$$

С помощью (3.3), (3.18) вычисляем резонансную часть поглощаемой мощности в единице длины геликоидальной структуры:

$$\tilde{Q}_{rez} = \frac{\gamma M_0 H}{2KT} \int_0^T dt' \int_0^{2K} d\chi \partial_{t'} v \partial_{t'} h = \\ = -2h_0^2 \tilde{\omega}_0 \chi''_{33}(\tilde{\omega}_0) < 0.$$

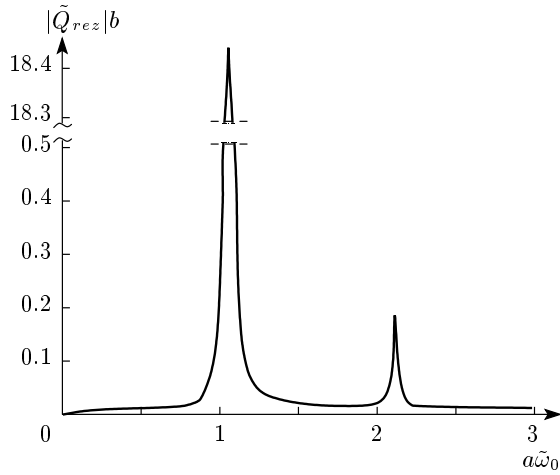


Рис. 3. Пики резонансного поглощения мощности геликоидальной структуры при $H = 0.8H_c$, $\tilde{\nu}/\tilde{\Omega}_1 = 0.01$

Окончательный результат приведен в исходных (размерных) переменных $\tilde{\omega}_0$, $\tilde{\nu} = \text{const}$, $\tilde{\Omega}_n = \gamma\Omega_n\sqrt{\beta M_0 H}$, $\chi''_{33}(\tilde{\omega}_0)$ — мнимая часть продольной магнитной восприимчивости единицы длины среды:

$$\chi''_{33} = \frac{\tilde{\omega}_0^3 \tilde{\nu}}{\beta} \left(\frac{KA_0^2(K)}{\tilde{\omega}_0^2(\tilde{\omega}_0^2 + \tilde{\nu}^2)E} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A_n(-i\nu_n)|^2}{(\text{sn}^{-2}(\nu_n, k') - E/K) \left((\tilde{\omega}_0^2 - \tilde{\Omega}_n^2)^2 + \tilde{\omega}_0^2 \tilde{\nu}^2 \right)} \right).$$

Приведенные расчеты последовательнее, а полученные результаты полнее по сравнению с выполненными в работе [20], где рассматривалась близкая модель кирального магнетика. Отметим также, что в [20] в формулах для частот Ω_n утерян множитель $1/k$.

Измерение формы линии поглощаемой мощности позволяет оценить частоту релаксации спиновых волн в спиральной структуре. Амплитуды пиков поглощаемой мощности возрастают с увеличением поля H и экспоненциально убывают с ростом n (см. рис. 3; на рисунке $a^{-1} = \gamma\sqrt{\beta M_0 H_c}$, $b = \sqrt{\beta} \times (2h_0^2\gamma\sqrt{M_0 H_c})^{-1}$).

Резонансные частоты Ω_n связаны с полем H и величиной k сложными трансцендентными соотношениями. Численный счет показывает, что приведенная ранее оценка $\Omega_n \approx \pi n/kK = 2\pi n/L$ на самом деле с точностью до нескольких процентов пригодна для любых $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Размерные частоты $\tilde{\Omega}_n$ поглощаемой мощности в интервале магнитных полей $0 < H < 0.8H_c$ почти не меняются (см.

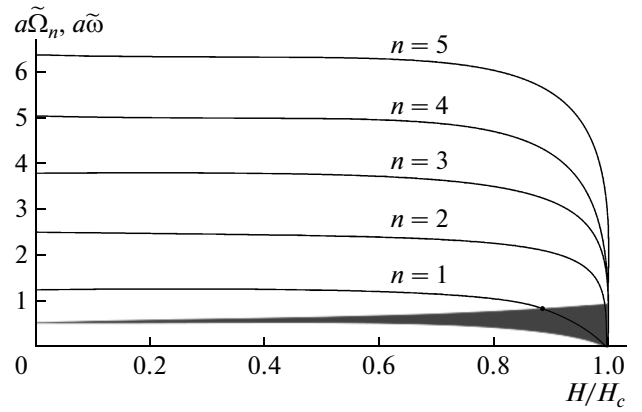


Рис. 4. Полоса частот неподвижного бризера и спектр резонансных частот стоячих спиновых волн в геликоидальной структуре

рис. 4): $\tilde{\Omega}_n \approx 4n\gamma\sqrt{\beta H_c M_0}/\pi$. Поэтому их измерение, в принципе, позволяет достаточно точно определить постоянную анизотропии β гелимагнетика. Используя для оценки приведенные ранее параметры соединения $\text{Cr}_{1/3}\text{NbS}_2$ и полагая $\beta \sim 1-10$, получаем $\gamma\sqrt{\beta H_c M_0} \approx 1.3-4.2 \cdot 10^9$ Гц, т. е. частоты стоячих спиновых волн лежат в СВЧ-диапазоне. Вблизи перехода несоизмеримость/соизмеримость зависимость частот поглощаемой мощности от внешнего магнитного поля имеет вид

$$\tilde{\Omega}_n \approx -2\pi n\gamma\sqrt{\beta H_c M_0}/\ln\left(\sqrt{H_c/H} - 1\right), \quad H < H_c.$$

Когда спиральная структура содержит пульсирующие солитоны — бризеры, возможно поглощение мощности накачки на частотах внутренних колебаний бризеров. В отличие от кинков, бризеры могут быть как движущимися, так и неподвижными. Наиболее удобны для наблюдений неподвижные бризеры. Размерная частота внутренних колебаний неподвижного бризера определяется формулой [15, 16]

$$\tilde{\omega}(\rho) = \gamma\sqrt{\beta H_c M_0} \text{dn}(\rho, k)/E(k).$$

Здесь параметр ρ в безразмерных переменных характеризует локальный сдвиг $4k\rho$ спиральной структуры при образовании в ней бризера. Допустимые частоты пульсаций бризера непрерывно заполняют полосу, заштрихованную на рис. 4. Примечательно, что они почти всюду лежат ниже спектра частот стоячих спиновых волн в спиральной структуре. Возможно лишь незначительное перекрытие солитонных и спин-волновых частот вблизи точки фазового перехода по полю из несоизмеримой фазы в соизмеримую. Этот факт можно использовать для обнаружения бризеров в спиральной структуре.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда «Династия» в рамках программы Президиума РАН «Фундаментальные проблемы нелинейной динамики».

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Kishine, K. Inoue, and Y. Yoshida, *Progr. Theor. Phys. Suppl.* **159**, 82 (2005).
2. *Magnetism: Molecules to Materials*, ed. by J. S. Miller and M. Drillon, Wiley-VCH Verlag, Weinheim (2005).
3. A. Fetter and M. J. Stephen, *Phys. Rev.* **168**, 475 (1968).
4. W. L. McMillan, *Phys. Rev. B* **16**, 4655 (1977).
5. В. Л. Покровский, А. Л. Талапов, *ЖЭТФ* **75**, 1151 (1978).
6. B. Roessli, J. Schefer, G. A. Petrakovskii et al., *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1885 (2001).
7. Г. А. Петраковский, А. И. Панкрац, М. А. Попов и др., *ФНТ* **28**, 840 (2002).
8. Y. Kousaka, J. Kishine, S. Jano, and J. Akimitsu, *J. Magn. Magn. Mater.* **310**, 463 (2007).
9. T. Fujita, Y. Fujimoto, S. Mitsudo et al., *J. Phys. Soc. Jpn.* **77**, 053702 (2008).
10. T. Moriya and T. Miyadai, *Sol. St. Comm.* **42**, 209 (1982).
11. Y. Kousaka, Y. Nakao, J. Kishine et al., *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. Sec. A* **600**, 250 (2009).
12. T. Miyadai, K. Kikuchi, H. Kondo et al., *J. Phys. Soc. Jpn.* **52**, 1394 (1983).
13. Y. Togawa, T. Koyama, K. Takayangi et al., *Phys. Rev. Lett.* **108**, 107202(1-5) (2012).
14. A. V. Borisov, J. Kishine, Y. G. Bostrem, and A. S. Ovchinnikov, *Phys. Rev. B* **79**, 134436 (2009).
15. В. В. Киселев, А. А. Расковалов, *ТМФ* **173**, 268 (2012).
16. В. В. Киселев, А. А. Расковалов, *ФММ* **113**, 1180 (2012).
17. Р. Б. Моргунов, М. В. Кирман, В. Л. Бердинский, К. Иное, Ж. Кишине, *ЖЭТФ* **134**, 95 (2008).
18. R. Morgunov, M. V. Kirman, K. Inoue et al., *Phys. Rev. B* **77**, 184419 (2008).
19. S. S. Sosin, L. A. Prozorova, and M. E. Zhitomirsky, *Письма в ЖЭТФ* **79**, 104 (2004).
20. J. Kishine and A. S. Ovchinnikov, *Phys. Rev. B* **79**, 220405 (2009).
21. Б. Н. Филипов, А. П. Танкеев, *Динамические эффекты в ферромагнетиках с доменной структурой*, Наука, Москва (1987).
22. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матъе*, Наука, Москва (1967).
23. Л. А. Памятных, М. С. Лысов, Г. С. Кандаурова, *Изв. РАН, сер. физ.* **71**, 1542 (2007).
24. Л. А. Памятных, М. С. Лысов, Г. А. Шматов, Г. С. Кандаурова, А. В. Дружинин, *Изв. РАН, сер. физ.* **74**, 1478 (2010).
25. Ю. А. Изюмов, *УФН* **114**, 439 (1984).