

КРИТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЧТИ АДИАБАТИЧЕСКОЙ КОНВЕКЦИИ В БЫСТРОВРАЩАЮЩЕМСЯ И ШИРОКОМ СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ

С. В. Старченко^{a}, М. С. Котельникова^b*

*^a Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н. В. Пушкова
142190, Троицк, Москва, Россия*

*^b Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 28 июня 2012 г.

Исследуются уравнения конвекции в почти адиабатическом приближении, для которых выбор физических параметров обусловлен возможными приложениями к описанию гидродинамики глубинных недр Земли, а также планет и лун земной группы. Для исследования линейной устойчивости в пределе быстрого вращения исходная система уравнений в частных производных впервые сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для давления и проекции скорости на ось вращения. Критические частоты, числа Рэлея и решения, описывающие возникающую конвекцию, получены асимптотически и численно при наиболее интересных для практических приложений числах Прандтля и толщинах сферических слоев. Впервые получено полностью аналитическое решение типа ВКБ в пределе, когда радиус внутренней границы рассматриваемого сферического слоя мал по сравнению с внешним радиусом и источники конвективной неустойчивости концентрируются у внутренней границы.

DOI: 10.7868/S0044451013020168

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является продолжением исследования конвекции в почти адиабатическом приближении, начатого ранее [1]. Основным приложением изучения конвекции в быстровращающемся сферическом слое является теория генерации планетарных магнитных полей. Проводящая жидкость в глубинных недрах планет находится в состоянии близком к адиабатическому с высокой точностью. Например, для внешнего ядра Земли отличие основных физических параметров от адиабатических значений составляет всего 10^{-3} %. Поэтому выбор почти адиабатического приближения для построения моделей генерации магнитного поля представляется наиболее естественным. Все планеты и луны, обладающие собственным магнитным полем, находятся в состоянии быстрого вращения. Это означает, что движение жидкости в глубинных недрах харак-

теризуется малыми значениями числа Экмана (для Земли его величина порядка 10^{-15}). Присутствие в задаче такого малого параметра дает возможность применения асимптотических подходов для исследования уравнений конвекции.

Стандартным и широко распространенным методом приведения исходной системы уравнений к удобной для анализа форме является двойное действие оператора ротора на уравнение моментов и применение полоидально-тороидального разложения для скорости [1–5]. Эти действия приводят к повышению порядка уравнений и возможному появлению дополнительных решений, не соответствующих исходной задаче. Для того чтобы исключить такую возможность, в разд. 2 настоящей работы из исходной линейной системы уравнений почти адиабатической конвекции получена упрощенная система обыкновенных дифференциальных уравнений для определения z -компоненты (вдоль оси вращения) скорости, давления и вариаций энтропии с использованием асимптотических подходов, но без повышения порядка уравнений. Таким образом, задача на собственные значения, возникающая при опреде-

*E-mail: sstarchenko@mail.ru

лении критических параметров конвекции, решается для уравнений, в которые в качестве неизвестных функций входят непосредственно давление либо z -компонента скорости, а не производные скорости, фигурировавшие в классическом методе. Это изменение дает дополнительную физическую ясность при интерпретации результатов решения.

Первые аналитические исследования тепловой конвекции в быстровращающемся сферическом слое были основаны на локальном асимптотическом анализе, т. е. решение задачи на собственные значения для определения критических параметров проводилось только в области, ограниченной предположением о существовании наиболее быстрорастущего решения [2, 3]. Полученные в результате критические значения отличались от значений, определенных численным решением исходной системы, на величину порядка единицы. Исследование почти адиабатической конвекции в глубинных недрах планет, начатое в работе [1], также частично было проведено в рамках локальной асимптотической теории, разработанной в работах [2, 3], в частности, было рассмотрено локальное возникновение конвекции в случае однородного распределения источников тепла. В случае неоднородного распределения источников конвекции в работе [1] критические параметры были получены с помощью численного решения для некоторых чисел Прандтля, а в результате локального асимптотического анализа — при малых и больших числах Прандтля. В разд. 3 полученные критические параметры возникновения конвекции для предельных значений чисел Прандтля существенно откорректированы за счет построения глобального решения типа ВКБ [4, 5] вместо локального решения из работы [1].

Полученные с помощью асимптотического анализа критические значения частоты и чисел Рэлея с хорошей точностью соответствуют результатам численного решения исходной системы уравнений в частных производных [4–7]. Асимптотические результаты становятся незаменимыми при рассмотрении решений в диапазоне чисел Экмана, соответствующих реальным параметрам в глубинных недрах планет, поскольку численные решения на данный момент доступны только до значений числа Экмана порядка 10^{-7} , что на несколько порядков превышает реальные [8, 9]. Также при проведении асимптотического анализа нет ограничений на количество и величину прочих варьируемых параметров, что дает возможность рассмотреть более широкий диапазон физических картин конвекции по сравнению с прямым численным моделированием.

В разд. 4 построено полностью аналитическое решение, описывающее почти адиабатическую конвекцию в достаточно широком сферическом слое для различных значений числа Прандтля. Под достаточно широким сферическим слоем понимается конфигурация, когда внутренний радиус r_i сферического слоя можно считать значительно меньше внешнего радиуса r_o . Таким образом, в системе возникает дополнительный малый параметр — отношение радиусов $b = r_i/r_o$, наличие которого позволяет применить ВКБ-подход и получить аналитическое решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений для вертикальной компоненты скорости и давления. В настоящей работе при получении решения предполагалось, что источники тепла неоднородны и максимум тепловыделения приходится на внутреннюю границу. Такая модель, например, соответствует случаю, когда температурный градиент поддерживается за счет разницы температур внутренней и внешней границ или же, что более естественно, за счет разницы в величине тепловых потоков на границах при условии, что тепловой поток, создаваемый внутренними источниками тепла, пренебрежимо мал. Описанное распределение источников тепловой и/или композиционной конвекции наиболее вероятно для глубинных недр большинства планет и лун в случае, когда есть основания пренебречь радиоактивным нагревом [10].

В Заключении приведены основные результаты и комментарии к возможностям их применения для построения достоверных моделей гидродинамических течений в недрах планет и лун. Подобные течения могут поддерживать наблюдаемое магнитное поле, наличие либо отсутствие которого, в свою очередь, служит индикатором активности движений в жидких ядрах наблюдаемых объектов.

2. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ДЛЯ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СКОРОСТИ И ДАВЛЕНИЯ

Рассмотрим сферический слой, вращающийся с постоянной угловой скоростью Ω . Слой заполнен жидкостью плотности ρ с коэффициентом термического расширения α , кинематической вязкостью ν , температуропроводностью K и коэффициентом теплопроводности κ . Для последующего сравнения результатов с уже имеющимися в аналогичных работах [3–5] используем внешний радиус r_o слоя в качестве меры длины, а характерное «вязкое» время r_o^2/ν как меру времени. Тогда скорость жидкости

\mathbf{V} будет измеряться в единицах ν/r_o . Эффективное давление p измеряем отношением $2\Omega/\nu$, поскольку его градиент определяется ускорением Кориолиса. В качестве единицы температуры используем среднюю температуру T слоя и отношение $r_o^2 K T'' \nu / T \rho \kappa^2$ как единицу для измерения удельной энтропии, а единицей теплового потока будет адиабатический поток из сферического слоя. Здесь штрихами обозначены обыкновенные производные по радиусу r . В результате получим безразмерную линеаризованную систему уравнений для возмущений почти адиабатического состояния, состоящую из уравнений моментов и переноса тепла, в форме, подобной полученной в работе [1]:

$$\begin{aligned} E \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{e}_z \times \mathbf{V} + \nabla p &= E R_a \theta \mathbf{r} - E \nabla \times \nabla \times \mathbf{V}, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0, \\ \text{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \nabla^2 \theta - s'_0 V_r. \end{aligned} \quad (1)$$

На производные сверхадиабатической энтропии θ накладываются однородные граничные условия и дополнительное интегральное условие:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_{r=b} &= 0, \\ \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_{r=1} &= 0, \\ \int_{b \leq r \leq 1} \theta d^3 r &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь Pr — число Прандтля, b — отношение радиусов слоя, R_a — модифицированное адиабатическое число Рэлея и E — асимптотически малое число Экмана:

$$\begin{aligned} \text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}, \quad b = \frac{r_i}{r_o}, \quad R_a = \frac{\alpha K T'' g_o r_o^5}{\rho C_p \nu \kappa^2}, \\ E = \frac{\nu}{2\Omega r_o^2} \ll 1. \end{aligned}$$

Замыкают задачу на устойчивость (1), (2) граничные условия для скорости \mathbf{V} (например, в случае рассмотрения твердых границ внешнего ядра в планетах Земного типа можно использовать условие прилипания). Безразмерный источник конвективной неустойчивости определяется тепловыми потоками по формуле [1]

$$s'_0 = -\frac{Q_o - 1 - Q_i + b^3}{1 - b^3} r - \frac{Q_i - Q_o b^3}{1 - b^3} r^{-2}. \quad (3)$$

Здесь Q_i и Q_o — величины мощности тепловых потоков, которые соответственно заданы на внутренней

и внешней границах рассматриваемого сферического слоя.

Будем искать методом типа ВКБ решение системы (1), удовлетворяющее всем необходимым граничным условиям, в следующем виде:

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}, p, \theta) &= \exp \left[i \frac{m\varphi + \int k(s) ds}{E^{1/3}} - \frac{i\omega}{E^{2/3}} t \right] \times \\ &\times \sum_{n \geq 0} E^{n/3} \left(\mathbf{V}_n, E^{1/3} p_n, E^{2/3} \theta_n \right), \quad (4) \\ R_a &= E^{-4/3} \left(R + \sum_{n \geq 1} E^{n/3} \mathfrak{R}_n \right). \end{aligned}$$

Здесь $m/E^{1/3}$ — азимутальное волновое число, k — волновое число, являющееся функцией цилиндрического радиуса s , ω — комплексное собственное число, $\mathbf{V}_n, p_n, \theta_n$ — не зависящие от азимутального угла φ асимптотические коэффициенты разложения для соответствующих функций, а R и \mathfrak{R}_n — асимптотические коэффициенты ряда для адиабатического числа Рэлея. Используя цилиндрическую систему координат (z, s, φ) , подставим решение (4) в (1) и в главном порядке получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_0}{\partial z} &= \left(i\omega - \frac{m^2}{s^2} - k^2 \right) V_{0z} + R \theta_0 z, \\ ikp_0 &= V_{0\varphi}, \quad i \frac{m}{s} p_0 = -V_{0s}, \\ ikV_{0s} &= -i \frac{m}{s} V_{0\varphi}, \\ \left(i \text{Pr} \omega - \frac{m^2}{s^2} - k^2 \right) \theta_0 &= \frac{s'_0}{r} (zV_{0z} + sV_{0s}). \end{aligned} \quad (5)$$

Если сравнить второе и третье уравнения в (5) с четвертым, то видно, что система (5) является вырожденной и требуется рассмотреть уравнения для коэффициентов ряда следующего порядка. Они имеют вид

$$\begin{aligned} V_{1\varphi} &= ikp_1 - \left(i\omega - \frac{m^2}{s^2} - k^2 \right) V_{0s} - R \theta_0 s, \\ V_{1s} &= -i \frac{m}{s} p_1 - \left(i\omega - \frac{m^2}{s^2} - k^2 \right) V_{0\varphi}, \\ ikV_{1s} + i \frac{m}{s} V_{1\varphi} + \frac{\partial V_{0z}}{\partial z} + \frac{V_{0z}}{s} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставив выражения поправок первого порядка для азимутальной и радиальной компонент скорости из первых двух уравнений в (6) в третье уравнение и исключив поправку давления p_1 , получим

требуемую систему для компонент скорости и давления:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_0}{\partial z} &= R s'_0 \frac{z V_{0z} - i m p_0}{i \text{Pr} \omega - m^2/s^2 - k^2} \frac{z}{r} + \\ &\quad + \left(i \omega - \frac{m^2}{s^2} - k^2 \right) V_{0z}, \\ \frac{\partial V_{0z}}{\partial z} &= \frac{i m R s'_0}{i \text{Pr} \omega - m^2/s^2 - k^2} \frac{z V_{0z} - i m p_0}{r} + \\ &\quad + \left[i \frac{m}{s^2} + \left(\frac{m^2}{s^2} + k^2 \right) \left(i \omega - \frac{m^2}{s^2} - k^2 \right) \right] p_0, \\ V_{0\varphi} &= i k p_0, \quad V_{0s} = -i \frac{m}{s} p_0, \\ \theta_0 &= \frac{s'_0}{r} \frac{z V_{0z} - i m p_0}{i \text{Pr} \omega - m^2/s^2 - k^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

В свою очередь, полученная система (7) может быть сведена к одному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка (например, для давления p_0), которое далее может быть исследовано стандартными методами для определения пороговых параметров существования растущих решений. Из-за вырожденности системы (7) граничные условия для нее также вырождены. С физической точки зрения, это означает что решение системы (7) справедливо во всем объеме сферического слоя, за исключением тонких (порядка $E^{1/2}$) пограничных слоев Экмана, которые не оказывают существенного влияния на критические параметры конвекции [4, 5]. На систему (7) накладываются условия непроницаемости жидкости за границы, которые должны выполняться на внешних границах сферического слоя:

$$V_{0r}(r=1) = 0, \quad V_{0r}(r=b) = 0. \quad (8)$$

Таким образом, мы получаем упрощенную систему уравнений (7), (8) для исследования линейной устойчивости конвекции в почти адиабатическом приближении в пределе асимптотически малых значений числа Экмана E . Его величина для Земли составляет по самым максимальным оценкам 10^{-9} [9], что дает достаточно удовлетворительную точность для решения уравнений (7), (8) в главном порядке по $E^{1/3} = 10^{-3}$.

3. РЕШЕНИЯ ПРИ ВНУТРЕННЕМ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ НАГРЕВАХ, ВСЕВОЗМОЖНЫХ ЧИСЛАХ ПРАНДТЛЯ Pr И ФИКСИРОВАННЫХ ОТНОШЕНИЯХ b РАДИУСОВ СЛОЯ

Пограничные, т. е. нерастущие и неубывающие во времени и пространстве решения системы (7),

(8) определяют критические значения чисел Рэлея и пространственно-временные характеристики, характеризующие момент потери устойчивости и возникновение конвекции. Число Экмана — один из важнейших параметров, определяющих течение, — на этом этапе уже рассматривается как малый асимптотический параметр в решении (4). Определяют решение также число Прандтля Pr , отношение b радиусов сферического слоя, тепловые потоки на внешней Q_o и внутренней Q_i границах. В большинстве предыдущих работ рассматривалась лишь модель Буссинеска с однородным распределением источников тепла (см., например, работы [3–5] и ссылки в них). В наших обозначениях этот случай «внутреннего нагрева» соответствует ситуации, когда входящий тепловой поток равен $Q_i = Q_o b^3$. В результате источник (3) принимает форму

$$s'_0 = -(Q_o - 1)r.$$

Без потери общности выберем величину исходящего теплового потока на внешней границе, в два раза превышающую адиабатическое значение $Q_o = 2$. Тогда уравнения (7), (8) сводятся к уравнению (3.1-3) для вертикальной скорости из работы [4].

Линейный асимптотический анализ конвекции в приближении быстрого вращения впервые был проведен в работе [2] и подробно развит в работе [3]. Последняя работа продемонстрировала, что растущие моды в случае быстрого вращения не симметричны относительно оси вращения и движение жидкости при малых числах Экмана квазигеострофическое, т. е. почти не зависит от координаты, параллельной оси вращения. Тем не менее в работе Буссе [3] не были найдены зависимости растущих мод от радиальной координаты.

Первая попытка получить их была предпринята в работе [11]. Автор обнаружил, что существуют определенные сложности при определении точных значений критических чисел Рэлея в рамках теории Робертса–Буссе. Традиционный подход с использованием ВКБ-представления [3], рассматривающий локальные действительные собственные числа, не подходит в данном случае, поскольку наличие ненулевого радиального градиента частоты $\partial\omega/\partial s$ приводит к взрывному росту моды на более высоких порядках. Разложения в ряд по числу Экмана [12] наглядно продемонстрировали и разрешили похожую проблему в задаче об устойчивости сферического течения Куэтта. Критическое для возникновения неустойчивости число Тейлора, вычисленное в [12], оказалось на $O(1)$ больше, чем предсказанное локальной теорией.

Таблица 1. Критические параметры для источника $s'_0 = -r$

	Pr				
	0.01	0.1	1	10	100
R	0.4762	1.1295	4.1173	8.0470	8.5954
m	0.08536	0.1770	0.3029	0.4848	0.5363
Ω	2.6668	1.2386	0.4715	0.06638	0.006433
s_-	0.4042	0.3874	0.4634	0.6025	0.6286
s_M	0.8692	0.7131	0.5915	0.6922	0.7195

Позднее, в работе [13] было показано, что невозможно построить верное ВКБ-решение, затухающее экспоненциально в радиальном направлении s_L по обе стороны критического цилиндра. Трудность в построении корректного ВКБ-решения была преодолена с помощью введения виртуального центра возникновения конвекции на комплексной плоскости — точки, в которой дисперсия волны локально исчезает. Эта точка определяется как седловая точка критических значений числа Рэлея на комплексной плоскости. Как и в случае с устойчивостью течения Куэтта, вычисленные критические числа Рэлея оказались больше, чем полученные с применением традиционного подхода [3].

Точное асимптотическое решение для сферы было получено в работе [4]. Ее авторы указывают, что для построения верного решения необходимо не стандартное уравнение типа Эйри для амплитуды, а уравнение, имеющее две точки, в которых решение меняется с колебательного типа на экспоненциальный. Для построения решения ВКБ-типа, затухающего экспоненциально по обе стороны критического цилиндра, необходимо найти двойную точку поворота в комплексной s -плоскости. Критический рост возникает, когда обе точки поворота практически совпадают в некотором положении s_c , в котором комплексные групповая скорость и фазовая функция становятся равными нулю. Эти требования составляют так называемый глобальный критерий устойчивости. Важно отметить, что конвекция продолжает оставаться локализованной на поверхности некоторого цилиндра, чей радиус s_M , тем не менее, оказывается отличным от значения, предсказанного локальной теорией.

Критические параметры возникновения конвекции, приведенные в табл. 1, собраны из табл. 2 и 3 работы [4].

Чтобы получить абсолютные значения из приведенных в табл. 1 масштабированных значений, необходимо поделить критические числа Рэлея R на $E^{4/3}$, азимутальное волновое число m на $E^{1/3}$ и критические частоты ω на $E^{2/3}$. Значения цилиндрического радиуса s_- ограничивают [5] неравенством $b < s_-$ область, в которой приведенные решения применимы, а цилиндрический радиус s_M определяет местоположение, в котором критические собственные функции достигают абсолютного экстремума. Параметры s_- и s_M появляются только при использовании глобального подхода к исследованию конвективной устойчивости.

В работе [5] авторы исследовали конвекции при малых числах Экмана в слоях различной толщины, $b = 0.35$ и $b = 0.65$. Выбор значений обусловлен возможностью продемонстрировать и исследовать два различных типа мод конвекции, возникающих в каждом случае. Моды тангенциального цилиндра возникают в случае, когда отношение b радиусов слоя удовлетворяет условию $b > s_L/r_o$. Авторы работы [5] подчеркивают, что для этого типа мод применима традиционная локальная теория. Напротив, при относительно малых размерах внутреннего ядра возникают так называемые внутренние моды, и в этом случае должна применяться глобальная теория [4]. Также в работе [5] рассмотрены два различных режима нагрева. Первый — это традиционно рассматриваемый режим внутреннего нагрева, а второй, когда жестко заданы значения температур на внешней и внутренней границах слоя, — так называемый дифференциальный нагрев. Последний случай может быть формально воспроизведен в нашей постановке путем подбора определенных значений внешнего и внутреннего тепловых потоков. Мы использовали эту возможность для сравнения результатов и проверки точности наших численных решений.

Для определения промежуточных критических параметров, не представленных в табл. 1, непосредственно из уравнений (7) получим основные асимптотические соотношения, связывающие критические параметры и число Прандтля Pr.

3.1. «Композиционное» решение при $Pr \gg 1$

Начнем с наиболее простого и хорошо сходящегося решения при больших значениях числа Прандтля $Pr \gg 1$. Этот предел описывает возникновение неустойчивости в случае чисто композиционной конвекции. Из уравнений (7) получим соотношения по порядку величин:

$$V_{0z} \sim imp_0, \quad \frac{\partial p_0}{\partial z} \sim \frac{R}{i\omega \text{Pr}} \sim i\omega V_{0z},$$

$$\frac{\partial V_{0z}}{\partial z} \sim \frac{R}{i\omega \text{Pr}} \sim p_0 i\omega m^2 \sim p_0 m.$$

Чтобы значения из табл. 1 (для $\text{Pr} = 10$ и $\text{Pr} = 100$) соответствовали этим соотношениям, связь параметров и числа Прандтля должна иметь вид

$$R = R_0 + \frac{R_1}{\text{Pr}}, \quad m = m_0 + \frac{m_1}{\text{Pr}}, \quad \omega = \frac{\omega_0}{\text{Pr}} + \frac{\omega_1}{\text{Pr}^2}. \quad (9)$$

Здесь мы пренебрегаем всеми слагаемыми порядка $O(1/\text{Pr}^2)$ и меньше в первых двух уравнениях и порядка $O(1/\text{Pr}^3)$ и меньше в третьем. Коэффициенты разложения (9) определены с использованием значений из табл. 1, соответствующих $\text{Pr} = 10$ и $\text{Pr} = 100$. Для больших чисел Прандтля окончательно получим

$$R = 8.656 - \frac{6.093}{\text{Pr}}, \quad m = 0.5420 - \frac{0.5722}{\text{Pr}}, \quad (10)$$

$$\omega = \frac{0.6410}{\text{Pr}} + \frac{0.2278}{\text{Pr}^2}.$$

Важно отметить, что при достаточно больших числах Прандтля решение (10) становится практически стационарным и не зависит от Pr .

До сих пор мы рассматривали источник конвекции, соответствующий однородному нагреву, который определяется первым слагаемым, пропорциональным r в выражении (3). Теперь рассмотрим второе слагаемое в (3), которое пропорционально r^{-2} и соответствует дифференциальному нагреву сферического слоя с максимальной неоднородностью на внутренней границе $r = b$. В рамках приближения Буссинеска такой режим получается путем установки изотермических границ. Чтобы сравнить результаты с полученными в работе [5], рассмотрим внутренний и внешний тепловые потоки со значениями, ровно на единицу превышающими значения соответствующих адиабатических потоков, т. е. $Q_i = 1 + b^3$ и $Q_o = 2$. В этом случае конвективный источник $s'_0 = 1/r^2$ и мы можем непосредственно использовать критические параметры, полученные в [5] для $\text{Pr} = 1$ и $b = 0.35$, соответствующие современной Земле:

$$R = 0.285933, \quad m = 0.179715, \quad \omega = 0.337014. \quad (11)$$

Значения (11) позволяют с использованием коэффициентов главного порядка из (9) грубо оценить динамику зависимости критических параметров от числа Прандтля:

$$(R, m, \omega) = (0.3, 0.2, 0.3/\text{Pr}). \quad (12)$$

Таблица 2. Критические параметры для источника $s'_0 = r^{-2}$

	Pr				
	0.01	0.1	1	10	100
R	0.04708	0.08576	0.285933	0.583779	0.66922
m	0.06054	0.1060	0.179715	0.27863	0.35183
Ω	1.709006	0.98531	0.337014	0.07444	0.005498

Значительно более точно, но лишь для отдельных фиксированных значений критические параметры получаются с помощью численного решения системы (7), результаты которого приведены в табл. 2.

3.2. «Термические» решения при $\text{Pr} \ll 1$

В случае чисто тепловой конвекции мы можем выбрать предел малых чисел Прандтля, поскольку характерный коэффициент тепловой диффузии κ больше вязкости ν . В случае $\text{Pr} \ll 1$ мы подставляем в уравнения (7) разложение по степеням числа Прандтля, аналогичное (9), но в общей форме с произвольными степенями чисел Прандтля Pr . Степени и общая форма разложения могут быть определены из линейной системы уравнений, которая получается из условий баланса слагаемых по порядку величины в выражениях (7). Предполагая

$$k \sim m \sim \text{Pr}^a, \quad \omega \sim \text{Pr}^b, \quad R \sim \text{Pr}^c, \quad p_0 \sim \text{Pr}^d$$

и используя условия баланса, получим основные критические параметры:

$$R = R_0 \text{Pr}^{1/3} + R_1 \text{Pr}^{2/3},$$

$$m = m_0 \text{Pr}^{1/3} + m_1 \text{Pr}^{2/3}, \quad (13)$$

$$\omega = \omega_0 \text{Pr}^{-1/3} + \omega_1.$$

Здесь мы пренебрегли членами порядка $O(1/\text{Pr})$ и меньше в первых двух уравнениях и порядка $O(1/\text{Pr}^{1/3})$ и меньше в третьем. Таким образом, выражение для частоты имеет наименьшую точность и стремится к бесконечности, демонстрируя неприменимость данного решения для малых чисел Прандтля. Тем не менее зависимости (13) становятся неверными только для $\text{Pr} < E$, что физически нереально. Коэффициенты разложения (13) определяются значениями, соответствующими малым числам $\text{Pr} = 0.1$

и $Pr = 0.01$ в табл. 1. Окончательно для малых чисел Прандтля получаем

$$\begin{aligned} R &= 1.7940 Pr^{1/3} + 1.9326 Pr^{2/3}, \\ m &= 0.4240 Pr^{1/3} - 0.1288 Pr^{2/3}, \\ \omega &= 0.5739 Pr^{-1/3} + 0.003141. \end{aligned} \quad (14)$$

Для конвективного источника, соответствующего дифференциальному нагреву сферического слоя, используя (11), получим следующие соотношения при малых числах Прандтля:

$$(R, m, \omega) = (0.3 Pr^{1/3}, 0.2 Pr^{1/3}, 0.3 Pr^{1/3}). \quad (15)$$

4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРИ КОНЦЕНТРАЦИИ КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ У ВНУТРЕННЕЙ ГРАНИЦЫ В ПРЕДЕЛЕ МАЛОГО ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАДИУСА $b \ll 1$

Следуя работам [3–5], для построения главного порядка решения типа ВКБ и соответствующего дисперсионного соотношения приравняем искомое критическое радиальное волновое число k к нулю. Это можно сделать, поскольку оно входит в исходные уравнения (7) только как k^2 и, следовательно, в экстремуме $k = 0$. Представив решение в виде разложения по степеням b , попытаемся сохранить максимальное количество слагаемых в главном порядке (7). Для этого необходимо следующим образом сбалансировать по порядку величины значимые члены в первых двух уравнениях системы (7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{0z}}{\partial z} \sim \frac{z V_{0z}}{r} \sim \frac{m R s'_0}{\omega r} \sim \frac{m^2}{s^2} \omega p_0, \\ \frac{\partial p_0}{\partial z} \sim \frac{R s'_0 z V_{0z}}{\omega r} \sim \omega V_{0z}. \end{aligned} \quad (16)$$

Такой баланс достигается оптимальным выбором новых переменных и соответствующих степеней b , позволяющих исключить b из уравнений (7):

$$\begin{aligned} s = b, \quad \omega = b^{-2/3} \bar{\omega}, \quad m = b^{2/3} \mu, \\ R = b^{-1/3} \rho, \quad z = b Z, \quad s'_0 = -\frac{b^{-2}}{1 + Z^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

ВКБ-решение имеет вид

$$\{V_{0z}, p_0\} = \{Y(Z), b^{1/3} \Pi(Z)\} \exp[-i\Lambda(Z)], \quad (18)$$

где Y и Π определяют регулярную часть решения, а Λ — сингулярную. Мы использовали только второе слагаемое конвективного источника (3), пропорциональное r^{-2} , соответствующее дифференциальному

нагреву сферического слоя с максимальной неоднородностью на внутренней границе $r = b \ll 1$. Без потери общности значение внутреннего потока может быть выбрано равным единице, $Q_i = 1$. Таким образом, ВКБ-решение (18) сконцентрировано на расстоянии порядка b в окрестности $z = 0$. Подставляя (17) и (18) в первые два уравнения системы (7), получим требуемые уравнения в главном порядке:

$$\begin{aligned} \left[i\bar{\omega} - \mu^2 - \frac{\rho Z^2}{(i Pr \bar{\omega} - \mu^2)(1 + Z^2)^{3/2}} \right] Y + \\ + \left[i\Lambda' + \frac{i\mu\rho Z}{(i Pr \bar{\omega} - \mu^2)(1 + Z^2)^{3/2}} \right] \Pi = 0, \\ \left[i\Lambda' - \frac{i\mu\rho Z}{(i Pr \bar{\omega} - \mu^2)(1 + Z^2)^{3/2}} \right] Y + \\ + \left[i\bar{\omega}\mu^2 - \mu^4 - i\mu + \frac{\mu^2\rho}{(i Pr \bar{\omega} - \mu^2)(1 + Z^2)^{3/2}} \right] \Pi = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Линейная система уравнений (19) однородна, поэтому для существования нетривиальных решений необходимо чтобы ее детерминант был равен нулю. Приравняв детерминант нулю, получим уравнение типа Гамильтона–Якоби для аналога действия Λ :

$$\begin{aligned} \Lambda'^2 = \frac{i\bar{\omega}\mu^2 - \mu^4 + (i\mu + i\bar{\omega}\mu^2 - \mu^4)Z^2}{(i Pr \bar{\omega} - \mu^2)(1 + Z^2)^{3/2}} \rho - \\ - (i\bar{\omega} - \mu^2)(i\bar{\omega}\mu^2 - \mu^4 + i\mu). \end{aligned} \quad (20)$$

Для определения комплексного положения стационарной точки Гамильтона или ВКБ-точки поворота, приравняем нулю производную по Z от правой части уравнения (20):

$$Z^2 = \frac{2 - \bar{\omega}\mu - i\mu^3}{1 + \bar{\omega}\mu + i\mu^3}. \quad (21)$$

Выбор комплексных точек поворота приводит к таким решениям, которые не концентрируются около точки $Z = 0$, как это необходимо. Для получения решения требуемого вида следует использовать точку $Z = 0$, что позволяет нам рассматривать как симметричные, так и антисимметричные моды в силу ее вырожденности. Приравняв правую часть выражения (20) нулю и подставляя $Z = 0$, получим дисперсионное соотношение

$$\rho = \frac{(i\bar{\omega}\mu - \mu^3 + i)(i Pr \bar{\omega} - \mu^2)}{\mu} \quad (22)$$

и, применяя требования

$$\text{Im } \rho = 0, \quad \text{Im}(\partial\rho/\partial\mu) = 0, \quad (23)$$

получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\text{Pr}^{1/3}}{2^{1/6}} (1 + \text{Pr})^{1/3}, \quad \bar{\omega} = \frac{1}{\mu(1 + \text{Pr})}, \\ \rho &= \mu^4 + \frac{\text{Pr}^2}{\mu^2(1 + \text{Pr})^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Окончательно получаем выражения для критических параметров почти адиабатической конвекции в пределе малого внутреннего ядра в виде

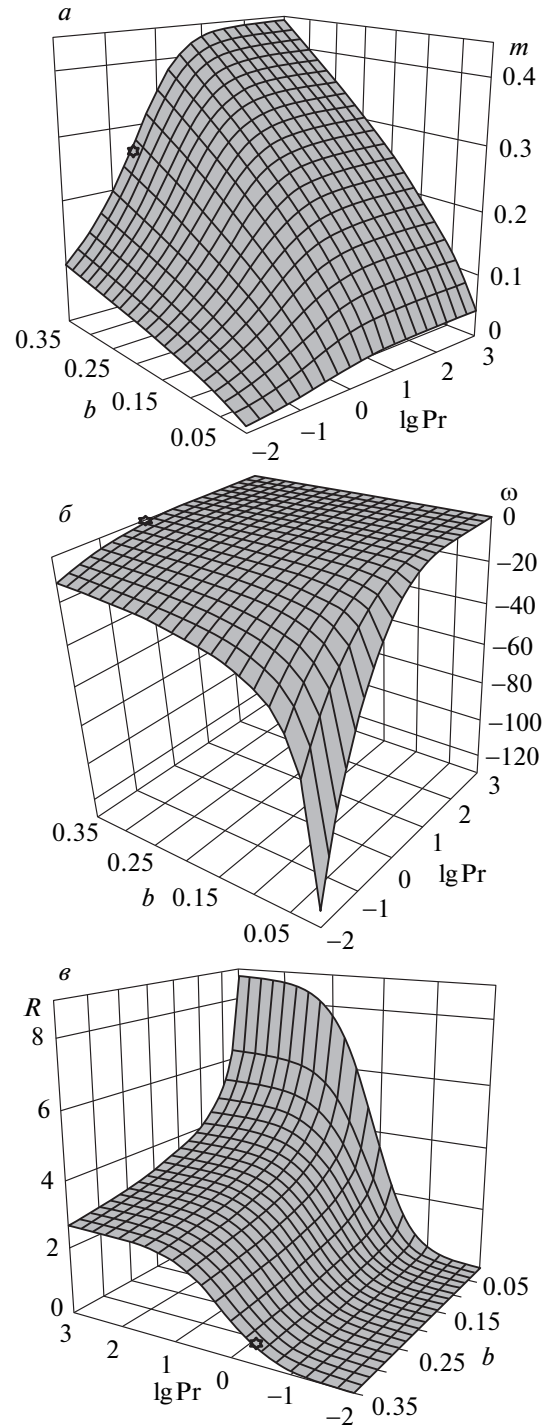
$$\begin{aligned} m(b, \text{Pr}) &= b^{2/3} \frac{\text{Pr}^{1/3}}{2^{1/6}} (1 + \text{Pr})^{1/3}, \\ \omega(b, \text{Pr}) &= b^{-2/3} \frac{2^{1/6}}{\text{Pr}^{1/3} (1 + \text{Pr})^{2/3}}, \\ R(b, \text{Pr}) &= b^{-1/3} \frac{3 \text{Pr}^{4/3}}{2^{2/3} (1 + \text{Pr})^{4/3}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Соответствующие графики представлены на рисунке. Сравнение с численными результатами авторов работы [4] демонстрирует качественное совпадение, принимая во внимание, что знак частоты не имеет значения.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Для описания возникновения почти адиабатической конвекции мы использовали исходную систему уравнений в приближении быстрого вращения или в пределе малых чисел Экмана $E \ll 1$. Оказывается возможным упростить исходную систему и получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений и далее систему алгебраических уравнений для давления, компонент скорости и вариаций энтропии. При условии, что конвекция порождается за счет внутренних объемных источников тепла, на основе результатов работ [3, 4] были получены обобщенные зависимости для критических чисел Рэлея и частот при всевозможных значениях числа Прандтля. Более реалистичный для астрофизических приложений дифференциальный нагрев до настоящего времени рассматривался только при $\text{Pr} = 1$ и $b = 0.35$ в работе [5]. В настоящей работе проведены значительно более детальные исследования при различных числах Прандтля, в результате которых определены критические частоты и числа Рэлея.

Наиболее интересным результатом данной работы, по нашему мнению, являются полученные зависимости критических чисел Рэлея, частот и распределений почти адиабатической тепловой конвекции для всех возможных диапазонов значений числа



Азимутальное число (а), частота (б), критическое число Рэлея (в) в случае почти адиабатической конвекции в пределе малого внутреннего ядра. Звездочки на графиках отмечают точки, соответствующие данным работы [4] для фиксированных значений $b = 0.35$ и $\text{Pr} = 1$

Прандтля в приближении малого отношения радиусов внутренней и внешней границы слоя. При этом источник конвективной неустойчивости концентрируется у внутренней границы. Похожее распределение тепловых и/или композиционных конвективных источников с большой вероятностью является характерным для глубинных недр планет и лун в случаях, когда радиоактивным нагревом их недр можно пренебречь [10].

Выбор физических параметров в этой работе определяется, в первую очередь, возможными приложениями к гидродинамике глубинных недр Земли, планет и лун Земной группы [14], таких как Венера, Марс, Меркурий, Луна и гигантские луны Юпитера и Сатурна. Результаты для больших чисел Прандтля могут быть интерпретированы в рамках теории композиционной или гравитационно-химической планетарной конвекции [9, 14–16]. Такой тип конвекции также может быть описан уравнениями из разд. 2 этой работы с заменой энтропии на соответствующим образом нормированную концентрацию легкой компоненты расплава внешнего ядра, высвобождающуюся при кристаллизации внутреннего ядра. Соответствующие такой концентрационной конвекции критические частоты получаются практически стационарными.

Практически без потерь вся гравитационная энергия, поддерживающая концентрационную конвекцию, преобразуется в кинетическую и магнитную энергию. Напротив, на это идет лишь малая доля (порядка 10% для ядра Земли) тепловой энергии. Поэтому тепловая конвекция менее эффективна по сравнению с концентрационной конвекцией для генерации магнитного поля [9, 15–17]. По-видимому, концентрационная конвекция практически отсутствует в недрах Венеры, Марса, Луны и большинства других крупных лун [14], а неэффективной и маломощной тепловой конвекции недостаточно для возбуждения там магнитного поля. При этом малое собственное магнитное поле Меркурия [14] и луны Юпитера — Ганимеда [18] — создается, возможно, относительно более мощной тепловой конвекцией, которая дополнительно поддерживается приливными воздействиями. Эти предположения согласуются с результатами настоящей работы для малых чисел Прандтля, соответствующих тепловой конвекции [5, 6] и приводящих к более высоким значениям критических частот.

Авторы признательны рецензенту за полезные замечания, способствовавшие улучшению этой работы. Один из авторов (С. В. С.) выражает благодарность Президиуму РАН за частичную поддержку этой работы грантом по Программе № 22 для проекта 3.6.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. V. Starchenko, M. S. Kotelnikova, and I. V. Maslov, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* **100**, 397 (2006).
2. P. H. Roberts, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* **263**, 93 (1968).
3. F. H. Busse, *Fluid Mech.* **44**, 441 (1970).
4. C. A. Jones, A. M. Soward, and A. I. Mussa, *J. Fluid Mech.* **405**, 157 (2000).
5. E. Dormy, A. M. Soward, C. A. Jones et al., *J. Fluid Mech.* **501**, 43 (2004).
6. F. H. Busse, *Phys. Fluids* **14**, 1301 (2002).
7. K.-K. Zhang, *J. Fluid Mech.* **236**, 535 (1992).
8. D. Alfe, G. Kresse, and M. J. Gillan, *Phys. Rev. B* **61**, 132 (2000).
9. S. I. Braginsky and P. H. Roberts, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* **79**, 1 (1995).
10. P. H. Roberts and G. A. Glatzmaier, *Rev. Mod. Phys.* **A 72**, 1081 (2000).
11. A. M. Soward, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* **9**, 19 (1977).
12. A. M. Soward and C. A. Jones, *Q. J. Mech. Appl. Math.* **36**, 19 (1983).
13. J.-I. Yano, *J. Fluid Mech.* **243**, 103 (1992).
14. D. J. Stevenson, T. Spohn, and G. Schubert, *Icarus* **54**, 466 (1983).
15. G. A. Glatzmaier and P. H. Roberts, *Cont. Phys.* **38**, 269 (1997).
16. С. В. Старченко, В. В. Ботвиновский, *Физика Земли* вып. 5, 85 (2003).
17. S. V. Starchenko and C. A. Jones, *Icarus* **157**, 426 (2002).
18. O. L. Kuskov and V. A. Kronrod, *Icarus* **151**, 204 (2001).