

ВОЗБУЖДЕНИЕ АВТОИОНИЗАЦИОННЫХ СОСТОЯНИЙ ГЕЛИЕПОДОБНЫХ ИОНОВ ПРИ РАССЕЯНИИ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

А. И. Михайлов^а, И. А. Михайлов^а, А. В. Нефёдов^{а*}, Г. Плуниен^{б**}

^а Петербургский институт ядерной физики им. Б. П. Константинова
188300, Гатчина, Ленинградская обл., Россия

^б Institut für Theoretische Physik, Technische Universität Dresden
D-01062, Dresden, Germany

Поступила в редакцию 20 июля 2012 г.

Выведены сечения двухэлектронных возбуждений гелиеподобных атомных систем в автоионизационные состояния $2s^2 (^1S)$ и $2p^2 (^1S)$ при столкновении с высокоэнергетическими электронами и фотонами. Вычисления выполнены в лидирующем порядке нерелятивистской теории возмущений. Аналитические формулы для сечений получены в форме универсальных скейлинговых функций. Дается сравнение теоретических предсказаний с существующими теоретическими и экспериментальными результатами для атома гелия.

DOI: 10.7868/S0044451013030024

1. ВВЕДЕНИЕ

Двухэлектронные возбуждения атомов и ионов, вызванные столкновениями с заряженными частицами и фотонами, являются фундаментальными процессами, которые изучаются на протяжении десятилетий [1–9]. Наряду с двойной ионизацией и ионизацией, сопровождаемой одновременным возбуждением, двойное возбуждение обусловлено межэлектронным взаимодействием. Соответственно, дифференциальное и полное сечения оказываются чрезвычайно чувствительными к качеству учета эффектов динамической корреляции, что позволяет тестировать различные теоретические подходы. В качестве мишени обычно используют нейтральный атом гелия, являющийся простейшей многоэлектронной системой [10].

Гелиеподобные ионы с умеренными значениями заряда ядра Z еще более привлекательны для исследования коррелированных процессов, поскольку соответствующие сечения проявляют универсальное скейлинговое поведение. Кроме того, теоретические

расчеты могут быть выполнены аналитически в рамках теории возмущений по межэлектронному взаимодействию путем разложения в ряд по малому параметру $1/Z \ll 1$. Однако коррелированные процессы довольно редки. Их сечения быстро уменьшаются с ростом значений Z . Благодаря современному развитию экспериментальной техники стали возможными измерения на многозарядных ионах, а не только на гелии. В работе [11] впервые сообщается об экспериментальном наблюдении процесса радиационного двухэлектронного захвата (обратной во времени двойной фотоионизации) ионами O^{8+} . Недавно ионы Ar^{16+} были селективно приготовлены в двукратно возбужденном $2p^2 (^1D)$ состоянии [12].

В данной работе изучаются гелиеподобные многозарядные ионы, которые испытывают двухэлектронные переходы в автоионизационные состояния $2s^2 (^1S)$ и $2p^2 (^1S)$ при неупругих высокоэнергетических столкновениях с электронами и фотонами. Основной целью нашего исследования является вывод универсальных скейлинговых функций для сечений двойного возбуждения. Применяется нерелятивистская теория возмущений по межэлектронному взаимодействию. Ядро иона рассматривается как внешний источник кулоновского поля (представление Фарри). Параметр αZ предполагается достаточно малым ($\alpha Z \ll 1$), где α — постоянная тон-

*E-mail: anef@thd.pnpi.spb.ru

**Günter Plunien

кой структуры; в то же время подразумевается, что $Z \gg 1$. В работе используются релятивистские единицы ($\hbar = 1, c = 1$).

В случае умеренных значений Z двукратно возбужденные атомные состояния распадаются преимущественно посредством автоионизации с излучением оже-электрона. Мы вычислим сечения возбуждения двух нижних автоионизационных состояний гелиеподобных ионов. Имеются две чистые электронные конфигурации, а именно $2s^2$ и $2p^2$, характеризующие полным орбитальным угловым моментом $L = 0$ и суммарным спином $S = 0$, которые принадлежат синглетному терму 1S . Пренебрежение межэлектронным взаимодействием приводит к вырождению, поскольку обе конфигурации имеют одинаковую энергию $E \approx E^{(0)} = 2E_{2s}$, где $E_{2s} = -I/4$, $I = m(\alpha Z)^2/2$ и m обозначает массу электрона. Учет взаимодействия расщепляет терм 1S на два синглетных уровня: нижний уровень (будем обозначать его номером 1) и верхний уровень (номер 2) [13, 14],

$$E_{1,2} = E^{(0)} + E_{1,2}^{(1)}, \quad (1)$$

$$E_{1,2}^{(1)} = \frac{(47 \mp \sqrt{241}) I}{128 Z}. \quad (2)$$

В нулевом приближении уровни энергии соответствуют правильным линейным комбинациям $2s^2$ - и $2p^2$ -волновых функций, которые даются выражениями

$$\Psi_1 = C_1 \Psi_{2s^2} + C_2 \Psi_{2p^2}, \quad (3)$$

$$\Psi_2 = C_1 \Psi_{2p^2} - C_2 \Psi_{2s^2}. \quad (4)$$

Функции чистых $2s^2$ - и $2p^2$ -конфигураций строятся как произведения одноэлектронных кулоновских волновых функций. В координатном представлении имеем

$$\begin{aligned} \Psi_{2s^2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \psi_{2s}(\mathbf{r}_1)\psi_{2s}(\mathbf{r}_2) = \\ &= N_{2s}^2 (1 - \eta_2 r_1)(1 - \eta_2 r_2) \exp(-\eta_2(r_1 + r_2)), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{2p^2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \sum_{\mu=\pm 1,0} C_{1\mu}^{00} \psi_{2p\mu}(\mathbf{r}_1)\psi_{2p-\mu}(\mathbf{r}_2) = \\ &= -N_{2p}^2 (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) \exp(-\eta_2(r_1 + r_2)). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $N_{2s}^2 = \eta_2^3/\pi$, $N_{2p}^2 = \eta_2^5/\pi\sqrt{3}$, $\eta_2 = \eta/2$, а $\eta = m\alpha Z$ обозначает средний импульс электрона на K -оболочке. Используются стандартные обозначения коэффициентов Клебша–Гордана. Коэффициенты смешивания C_1 и C_2 находятся из секулярного уравнения. Для базисных функций (5) и (6) получаем [13, 14]

$$C_1 = \frac{15}{2} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{482 - 17\sqrt{241}}} = 0.880, \quad (7)$$

$$C_2 = \sqrt{1 - C_1^2} = 0.476. \quad (8)$$

Оже-ширины автоионизационных состояний, описываемых волновыми функциями (3) и (4), даются выражениями [15]

$$\Gamma_1 = m\alpha^2 \pi \varkappa_1^2 = 0.226 \text{ эВ}, \quad (9)$$

$$\Gamma_2 = m\alpha^2 \pi \varkappa_2^2 = 0.011 \text{ эВ}, \quad (10)$$

где

$$\varkappa_1 = (C_1 + C_2 C) \varkappa_0 = 1.294 \varkappa_0, \quad (11)$$

$$\varkappa_2 = (C_1 C - C_2) \varkappa_0 = 0.290 \varkappa_0, \quad (12)$$

$$\varkappa_0 = \frac{2^{11}}{3^9} \exp\left(-2\sqrt{2} \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}\right), \quad (13)$$

$$C = \frac{1}{4\sqrt{3}} \left\{ \frac{31}{2} - 54 \frac{\exp(2\sqrt{2} \operatorname{arctg} 2\sqrt{2})}{\exp(2\sqrt{2} \operatorname{arctg} \sqrt{2})} \right\}. \quad (14)$$

Значения (9) и (10) превосходно согласуются с численными расчетами для He-подобных ионов с $Z \geq 6$, выполненными с учетом смешивания десяти конфигураций [16]. Состояния, описываемые волновыми функциями (3) и (4), часто классифицируют как $2s^2 (^1S)$ и $2p^2 (^1S)$ в соответствии с доминирующим весом чистых $2s^2$ - и $2p^2$ -конфигураций. Следует также упомянуть другую пару соседних автоионизационных уровней, а именно $2s2p (^1P)$ и $2p^2 (^1D)$, которые, однако, достаточно хорошо изолированы от резонансов $E_{1,2}$ и, следовательно, могут рассматриваться отдельно.

2. ДВОЙНЫЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ ПРИ РАССЕЯНИИ ЭЛЕКТРОНОВ

2.1. Амплитуды возбуждения

Двухэлектронные переходы в атомах, вызванные рассеянием электронов, могут происходить по двум каналам. В первом случае налетающий электрон взаимодействует с атомным электроном, который, в свою очередь, взаимодействует с другим связанным электроном. Во втором случае налетающий электрон взаимодействует последовательно с обоими атомными электронами. В лидирующем порядке нерелятивистской теории возмущений процесс двойного возбуждения описывается диаграммами Фейнмана, изображенными на рис. 1. Протекание процесса по первому каналу возможно только при учете электронных корреляций в атоме (см. рис. 1а,б). Во

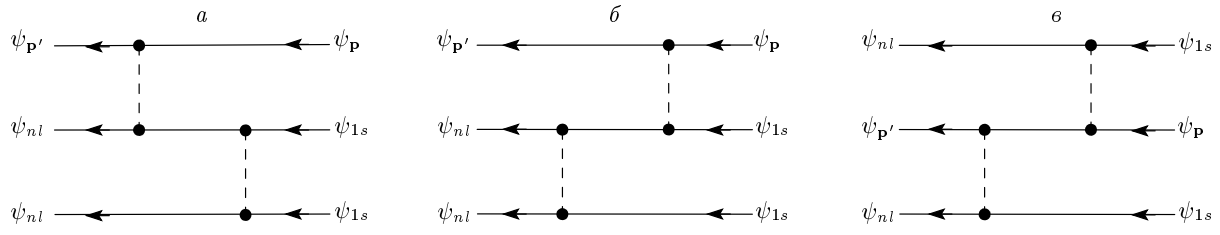


Рис. 1. Диаграммы Фейнмана для двухэлектронного возбуждения атома при рассеянии электрона. Сплошные линии обозначают электроны в кулоновском поле ядра, штриховые — межэлектронное взаимодействие. Одноэлектронное состояние ψ_{nl} обозначает одно из двух состояний ψ_{2s} или ψ_{2p}

втором канале электронными корреляциями можно пренебречь (см. рис. 1в). При низких энергиях оба канала неразличимы и интерферируют друг с другом. Однако для быстрых частиц, налетающих со скоростями $v \gg \alpha Z$, вклад диаграммы на рис. 1в подавлен множителем порядка $\alpha Z/v \ll 1$ и, следовательно, может не учитываться. Кроме того, в области высоких энергий обменные диаграммы также оказываются пренебрежимо малыми. Хотя оба канала возбуждения описываются графиками одного и того же второго порядка, они отличаются числом взаимодействий налетающей частицы с атомными электронами. Поэтому в случае высокоэнергетического рассеяния, когда налетающая частица аппроксимируется плоской волной, эти два канала иногда называют первым и вторым борновскими приближениями.

Предположим, что налетающий электрон имеет асимптотический импульс \mathbf{p} и энергию $E_p = p^2/2m$, а рассеянный электрон характеризуется асимптотическим импульсом \mathbf{p}' и энергией $E_{p'} = p'^2/2m$. Если выполняется условие $p \gg \eta$, волновая функция непрерывного спектра приближенно записывается как $\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \approx \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})$. Взаимодействие быстрой частицы с атомным электроном может быть записано в виде

$$\hat{V}_q(\mathbf{r}) = \int \psi_{\mathbf{p}'}^*(\mathbf{r}') V_C(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = D(\mathbf{q}) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}). \quad (15)$$

Здесь $V_C(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \alpha/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ — оператор межэлектронного кулоновского взаимодействия, $D(\mathbf{q}) = 4\pi\alpha/\mathbf{q}^2$, а $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$ — импульс отдачи, переданный атому.

Амплитуда двухэлектронного перехода есть

$$A = 2\langle \Psi_j | \hat{V}_q | \Psi_i \rangle, \quad (16)$$

где $\Psi_{i,j}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ — двухэлектронные волновые функции соответственно начального и конечного состо-

яний. Множитель 2 учитывает взаимодействие налетающего электрона с обоими атомными электронами. В нулевом приближении волновые функции $\Psi_{i,j} \approx \Psi_{i,j}^{(0)}$ выражаются через произведения одночастичных кулоновских волновых функций. Вследствие одночастичного характера оператора (15) и ортогональности кулоновского базиса, амплитуда A принимает нулевое значение. Нетривиальный результат получается только при учете поправок $\Psi_{i,j}^{(1)}$ первого порядка по межэлектронному взаимодействию к волновым функциям начального и конечного состояний, а именно

$$\Psi_{i,j} = \Psi_{i,j}^{(0)} + \Psi_{i,j}^{(1)}.$$

Отсюда следует, что

$$A = 2\langle \Psi_j^{(0)} | \hat{V}_q | \Psi_i^{(1)} \rangle + 2\langle \Psi_j^{(1)} | \hat{V}_q | \Psi_i^{(0)} \rangle. \quad (17)$$

Поправки $\Psi_{i,j}^{(1)}$ вычисляются с использованием двухэлектронных функций Грина [17]. Подстановка этих поправок в формулу (17) позволяет выразить двухчастичные функции Грина через одночастичные. Тогда получаем

$$A = 2\langle \Psi_j^{(0)} | \left(\hat{V}_q G_C(E_a) V_C + V_C G_C(E_b) \hat{V}_q \right) | \Psi_i^{(0)} \rangle. \quad (18)$$

Здесь G_C обозначает одноэлектронные кулоновские функции Грина с промежуточными энергиями, определяемыми законом сохранения энергии:

$$\begin{aligned} E_a &= 2E_{1s} - E_{2s} = -7I/4, \\ E_b &= 2E_{2s} - E_{1s} = I/2, \end{aligned} \quad (19)$$

где $I = \eta^2/2m$ — энергия связи K -электрона.

Волновая функция $\Psi_i^{(0)}$, описывающая основное состояние гелиеподобного иона, записывается как

$$\begin{aligned} \Psi_i^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \Psi_{1s^2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_{1s}(\mathbf{r}_1) \psi_{1s}(\mathbf{r}_2) = \\ &= N_{1s}^2 \exp(-\eta(r_1 + r_2)), \end{aligned} \quad (20)$$

где $N_{1s}^2 = \eta^3/\pi$. Выбирая функции (3) и (4) в качестве $\Psi_j^{(0)}$, получаем соответствующие амплитуды переходов в нижние автоионизационные 1S -состояния:

$$\mathcal{A}_1 = 2 \left[C_1(\mathcal{A}_a + \mathcal{A}_b) + C_2(\tilde{\mathcal{A}}_a + \tilde{\mathcal{A}}_b) \right], \quad (21)$$

$$\mathcal{A}_2 = 2 \left[C_1(\tilde{\mathcal{A}}_a + \tilde{\mathcal{A}}_b) - C_2(\mathcal{A}_a + \mathcal{A}_b) \right], \quad (22)$$

где

$$\mathcal{A}_a = \langle \Psi_{2s^2} | \hat{V}_q G_C(E_a) V_C | \Psi_{1s^2} \rangle, \quad (23)$$

$$\mathcal{A}_b = \langle \Psi_{2s^2} | V_C G_C(E_b) \hat{V}_q | \Psi_{1s^2} \rangle, \quad (24)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_a = \langle \Psi_{2p^2} | \hat{V}_q G_C(E_a) V_C | \Psi_{1s^2} \rangle, \quad (25)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_b = \langle \Psi_{2p^2} | V_C G_C(E_b) \hat{V}_q | \Psi_{1s^2} \rangle. \quad (26)$$

Матричные элементы \mathcal{A}_a и $\tilde{\mathcal{A}}_a$ учитывают корреляционное взаимодействие в начальном состоянии (см. рис. 1а), а \mathcal{A}_b и $\tilde{\mathcal{A}}_b$ — в конечном состоянии (см. рис. 1б).

2.2. Вычисление амплитуд \mathcal{A}_a и \mathcal{A}_b

В дальнейшем будем вычислять матричные элементы в импульсном представлении. Тогда операторам \hat{V}_q и V_C соответствуют фотонные пропагаторы $D(\mathbf{q}) = 4\pi\alpha/\mathbf{q}^2$ и $D(\mathbf{f}) = 4\pi\alpha/\mathbf{f}^2$, где \mathbf{q} обозначает импульс отдачи, переданный атомному электрону налетающей частицей, а \mathbf{f} — импульс, которым обмениваются атомные электроны при взаимодействии друг с другом. Аналитические выражения для матричных элементов (23) и (24) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_a &= D(\mathbf{q}) \int \langle \psi_{2s} | \mathbf{f}_1 + \mathbf{q} \rangle \langle \mathbf{f}_1 | G_C(E_a) | \mathbf{f}'_1 \rangle \langle \mathbf{f}'_1 + \mathbf{f} | \psi_{1s} \rangle \times \\ &\times F(\mathbf{f}) D(\mathbf{f}) \frac{d\mathbf{f}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{f}_1}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{f}'_1}{(2\pi)^3}, \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_b &= D(\mathbf{q}) \int \langle \psi_{2s} | \mathbf{f}_1 - \mathbf{f} \rangle \langle \mathbf{f}_1 | G_C(E_b) | \mathbf{f}'_1 \rangle \langle \mathbf{f}'_1 - \mathbf{q} | \psi_{1s} \rangle \times \\ &\times F(\mathbf{f}) D(\mathbf{f}) \frac{d\mathbf{f}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{f}_1}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{f}'_1}{(2\pi)^3}, \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(\mathbf{f}) &= \int \langle \psi_{2s} | \mathbf{f}_2 \rangle \langle \mathbf{f}_2 - \mathbf{f} | \psi_{1s} \rangle \frac{d\mathbf{f}_2}{(2\pi)^3} = \\ &= N_{1s} N_{2s} \hat{\Gamma}_\lambda \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \langle \mathbf{f} | V_{i\lambda} | 0 \rangle, \quad (29) \\ \hat{\Gamma}_\lambda &= 1 + \frac{\eta}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda}. \end{aligned}$$

После взятия производных в уравнении (29) следует положить $\lambda = 3\eta/2$.

Для простоты мы переопределим амплитуды в соответствии с соотношением $\mathcal{A}_l = 4\pi\alpha D(\mathbf{q}) \mathcal{U}_l$, $l = a, b$. В результате интегрирования в уравнениях (27) и (28) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_a &= N_{1s}^2 N_{2s}^2 \hat{D} \left(-\frac{\partial}{\partial \eta_2} \right) \frac{1}{\lambda^2} \times \\ &\times \langle \mathbf{q} | V_{i\eta_2} G_C(E_a) V_{i\mu} | 0 \rangle, \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_b &= N_{1s}^2 N_{2s}^2 \hat{D} \left(-\frac{\partial}{\partial \eta_1} \right) \frac{1}{\lambda^2} \times \\ &\times \langle \mathbf{q} | V_{i\eta_1} G_C(E_b) V_{i\nu} | 0 \rangle, \quad (31) \end{aligned}$$

$$\hat{D} = \hat{\Gamma}_{\eta_2} \hat{\Gamma}_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}, \quad \hat{\Gamma}_{\eta_2} = 1 + \frac{\eta}{2} \frac{\partial}{\partial \eta_2}, \quad (32)$$

где $\mu = \lambda + \eta_1$ и $\nu = \lambda + \eta_2$. После взятия производных следует положить $\eta_1 = \eta$, $\eta_2 = \eta/2$ и $\lambda = 3\eta/2$. Матричные элементы в уравнениях (30) и (31) сводятся к однократным интегралам [18]

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}_2 | V_{i\eta_2} G_C(E) V_{i\eta_1} | \mathbf{k}_1 \rangle &= \\ &= 16\pi i p m \int_0^1 \frac{t^{-i\xi} dt}{a - 2bt + at^2}, \quad (33) \end{aligned}$$

где

$$a = a_1 a_2, \quad \bar{a} = \bar{a}_1 \bar{a}_2, \quad b = b_1 b_2 - 4p^2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2), \quad (34)$$

$$\begin{aligned} a_l &= k_l^2 + (\eta_l - ip)^2, \quad \bar{a}_l = k_l^2 + (\eta_l + ip)^2, \\ l &= 1, 2, \quad (35) \end{aligned}$$

$$b_l = k_l^2 + \eta_l^2 + p^2, \quad \xi = \frac{\eta}{p}, \quad p = \sqrt{2mE + i0}. \quad (36)$$

В действительности, интеграл (33) также может быть выражен через гипергеометрические функции. Однако для вычисления производных по параметрам удобнее пользоваться интегральным представлением.

Выражая все импульсы в единицах характерного импульса η и подставляя интеграл (33) в уравнения (30) и (31), получаем

$$\alpha Z \mathcal{U}_a = \frac{2}{\pi} \hat{D} \frac{\partial}{\partial \eta_2} \frac{\beta}{\lambda^2} \int_0^1 dt \frac{t^{-\zeta}}{u}, \quad \zeta = \frac{1}{\beta} = \frac{2}{\sqrt{7}}, \quad (37)$$

$$\alpha Z \mathcal{U}_b = -\frac{2}{\pi} \hat{D} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \frac{i\gamma}{\lambda^2} \int_0^1 dt \frac{t^{-i\xi}}{u}, \quad \xi = \frac{1}{\gamma} = \sqrt{2}, \quad (38)$$

где $u = a - 2bt + \bar{a}t^2$, $a = a_1 a_2$, $\bar{a} = \bar{a}_1 \bar{a}_2$, $b = b_1 b_2$. После взятия производных следует вычислить выражения при $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 1/2$ и $\lambda = 3/2$. В уравнениях (37) и (38) коэффициенты для функций u разные. В уравнении (37) коэффициенты даются выражениями

$$a_1 = (\mu + \beta)^2, \quad a_2 = x + (\eta_2 + \beta)^2, \quad (39)$$

$$\bar{a}_1 = (\mu - \beta)^2, \quad \bar{a}_2 = x + (\eta_2 - \beta)^2, \quad (40)$$

$$b_1 = \mu^2 - \beta^2, \quad b_2 = x + \eta_2^2 - \beta^2, \quad (41)$$

где $\mu = \lambda + \eta_1$. В уравнении (38) коэффициенты записываются как

$$a_1 = (\nu - i\gamma)^2, \quad a_2 = x + (\eta_1 - i\gamma)^2, \quad (42)$$

$$\bar{a}_1 = (\nu + i\gamma)^2, \quad \bar{a}_2 = x + (\eta_1 + i\gamma)^2, \quad (43)$$

$$b_1 = \nu^2 + \gamma^2, \quad b_2 = x + \eta_1^2 + \gamma^2, \quad (44)$$

где $\nu = \lambda + \eta_2$. Заметим, что выражения (37) и (38), являясь функциями безразмерной переменной $x = (q/\eta)^2$, не зависят от заряда ядра Z .

2.3. Вычисление амплитуд $\tilde{\mathcal{A}}_a$ и $\tilde{\mathcal{A}}_b$

Теперь вычислим амплитуды (25) и (26) для переходов в чистую $2p^2$ -конфигурацию. В импульсном представлении волновая функция Ψ_{2p^2} получается из выражения (6) фурье-преобразованием:

$$\Psi_{2p^2}(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = N_{2p}^2 \hat{\Gamma} \langle \mathbf{f}_1 | V_{i\eta_2} | \boldsymbol{\tau} \rangle \langle \mathbf{f}_2 | V_{i\eta'_2} | \boldsymbol{\kappa} \rangle, \quad (45)$$

$$\hat{\Gamma} = \frac{\partial^2}{\partial \eta_2 \partial \eta'_2} (\nabla_{\boldsymbol{\tau}} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\kappa}}), \quad (46)$$

где $\nabla_{\boldsymbol{\tau}} = \partial/\partial \boldsymbol{\tau}$ и $\nabla_{\boldsymbol{\kappa}} = \partial/\partial \boldsymbol{\kappa}$. В уравнении (45) после взятия производных и градиентов следует положить соответственно $\eta'_2 = \eta_2$ и $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\kappa} = 0$.

Заменяя в уравнениях (27)–(29) произведение $\langle \psi_{2s} | \mathbf{f}_1 \rangle \langle \psi_{2s} | \mathbf{f}_2 \rangle$ на функцию (45) и выполняя интегрирование по промежуточным импульсам, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{U}_a &= N_{1s}^2 N_{2p}^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta_2 \partial \lambda} (\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\kappa}}) \frac{1}{\lambda^2} \times \\ &\times \int_0^1 dy y^2 \frac{\partial}{\partial y} \langle \mathbf{q} | V_{i\eta_2} G_C(E_a) V_{i\mu'} | \boldsymbol{\kappa} \rangle, \quad (47) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_b &= -N_{1s}^2 N_{2p}^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta_1 \partial \lambda} \nabla_{\boldsymbol{\kappa}}^2 \frac{1}{\lambda^2} \times \\ &\times \int_0^1 dy y^2 \frac{\partial}{\partial y} \langle \mathbf{q} | V_{i\eta_1} G_C(E_b) V_{i\nu'} | \boldsymbol{\kappa} \rangle, \quad (48) \end{aligned}$$

где $\mu' = \lambda y + \eta_1$, $\nu' = \lambda y + \eta_2$, $\lambda = 3\eta/2$. После взятия градиентов по $\boldsymbol{\kappa}$ следует положить $\boldsymbol{\kappa} = 0$. Здесь снова амплитуды переопределены согласно соотношению $\tilde{\mathcal{A}}_l = 4\pi\alpha D(\mathbf{q}) \tilde{U}_l$, $l = a, b$.

Учет уравнения (33) и переход к безразмерным импульсам, выраженным в единицах η , позволяет представить амплитуды (47) и (48) в виде

$$\begin{aligned} \alpha Z \tilde{U}_a &= \frac{\beta}{2\pi\sqrt{3}} \int_0^1 dt t^{-\zeta} \frac{\partial^2}{\partial \eta_2 \partial \lambda} \frac{1}{\lambda^2} \times \\ &\times \int_0^1 dy y^2 \frac{\partial}{\partial y} f(y), \quad (49) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha Z \tilde{U}_b &= -\frac{i\gamma}{2\pi\sqrt{3}} \int_0^1 dt t^{-i\xi} \frac{\partial^2}{\partial \eta_1 \partial \lambda} \frac{1}{\lambda^2} \times \\ &\times \int_0^1 dy y^2 \frac{\partial}{\partial y} \varphi(y), \quad (50) \end{aligned}$$

где $\zeta = 1/\beta = 2/\sqrt{7}$, $\xi = 1/\gamma = \sqrt{2}$. Функции $f(y)$ и $\varphi(y)$ записываются как

$$f(y) = 8\beta^2 t \left(4x \frac{u_1}{u^3} - \frac{3}{u^2} \right), \quad (51)$$

$$\varphi(y) = 2 \left(2^6 \gamma^4 t^2 \frac{x}{u^3} - \frac{3u_2}{u^2} \right), \quad (52)$$

где

$$u = a - 2bt + \bar{a}t^2; \quad u_l = a_l - 2b_l t + \bar{a}_l t^2, \quad l = 1, 2;$$

$$x = (q/\eta)^2.$$

Коэффициенты $a = a_1 a_2$, $\bar{a} = \bar{a}_1 \bar{a}_2$ и $b = b_1 b_2$ для функции (51) определяются уравнениями (39)–(41) с заменой $\mu = \lambda + \eta_1$ на $\mu' = \lambda y + \eta_1$, а коэффициенты для функции (52) определяются уравнениями (42)–(44) с заменой $\nu = \lambda + \eta_2$ на $\nu' = \lambda y + \eta_2$. После взятия производных в выражениях (49) и (50) следует положить $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 1/2$, $\lambda = 3/2$.

2.4. Сечение двойного возбуждения электронным ударом

Дифференциальное сечение двойного возбуждения электронным ударом связано с амплитудой (18) следующим образом:

$$d\sigma^{**} = \frac{2\pi}{v} |\mathcal{A}|^2 \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \delta(E_{p'} + E_j - E_p - E_i). \quad (53)$$

Здесь $v = p/m$ — абсолютная величина скорости налетающего электрона. Начальное и конечное состояния атома характеризуются соответственно энергиями $E_i = 2E_{1s} = -2I$ и $E_j = 2E_{2s} = -I/2$. Энергия рассеянного электрона в силу закона сохранения энергии дается выражением $E_{p'} = E_p - 3I/2$. Уравнение (53) определяет энергетическое и угловое распределения. Элемент фазового объема для электронов, рассеиваемых в телесный угол $d\Omega' = 2\pi \sin\theta d\theta$, может быть записан как

$$d\mathbf{p}' = mp' dE_{p'} d\Omega', \quad d\Omega' = \pi \frac{dq^2}{pp'}, \quad (54)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$ — переданный импульс. Учитывая, что $\mathcal{A} = (4\pi\alpha)^2 \mathcal{U}/q^2$ и интегрируя по энергии, получаем

$$d\sigma^{**} = |\mathcal{A}|^2 \frac{dq^2}{4\pi v^2} = (4\pi)^3 \alpha^4 |\mathcal{U}|^2 \frac{dq^2}{v^2 q^4}. \quad (55)$$

Введем для удобства безразмерные величины, такие как $x = (q/\eta)^2$ и энергия налетающей частицы

$$\varepsilon = \frac{E_p}{I} = \frac{v^2}{(\alpha Z)^2} \geq 3/2.$$

Тогда все скорости калибруются в единицах характерной скорости K -электрона. Уравнение (55) записывается в виде

$$d\sigma^{**} = \frac{\sigma_0}{Z^6 \varepsilon} Q(x) dx, \quad (56)$$

$$Q(x) = x^{-2} (8\pi\alpha Z)^2 |\mathcal{U}|^2, \quad (57)$$

где $\sigma_0 = \pi a_0^2 = 87.974$ Мб и $a_0 = 1/m\alpha$ — боровский радиус. Универсальная функция $Q(x)$ не зависит от значений Z . После интегрирования (56) по x получаем полное сечение в виде

$$\sigma^{**} = \frac{\sigma_0}{Z^6 \varepsilon} B(\varepsilon), \quad (58)$$

$$B(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} Q(x) dx. \quad (59)$$

Пределы интегрирования даются выражениями

$$x_1 = \frac{(p-p')^2}{\eta^2} = \frac{9}{4x^2},$$

$$x_2 = \frac{(p+p')^2}{\eta^2} = \left(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon - 3/2} \right)^2.$$

Уравнение (58) справедливо в области высоких релятивистских энергий: $3/2 \ll \varepsilon \ll 2(\alpha Z)^{-2}$.

Для переходов в автоионизационные состояния $2s^2 (^1S)$ и $2p^2 (^1S)$, описываемые соответственно волновыми функциями (3) и (4), уравнение (57) обобщается следующим образом:

$$Q_1(x) = x^{-2} (16\pi\alpha Z)^2 \times |C_1(\mathcal{U}_a + \mathcal{U}_b) + C_2(\tilde{\mathcal{U}}_a + \tilde{\mathcal{U}}_b)|^2, \quad (60)$$

$$Q_2(x) = x^{-2} (16\pi\alpha Z)^2 \times |C_1(\tilde{\mathcal{U}}_a + \tilde{\mathcal{U}}_b) - C_2(\mathcal{U}_a + \mathcal{U}_b)|^2, \quad (61)$$

где явные выражения даются формулами (37), (38), (49) и (50). В силу условия нормировки $\sum_{k=1}^2 C_k^2 = 1$ получаем

$$\sum_{k=1}^2 Q_k(x) = x^{-2} (16\pi\alpha Z)^2 \times \left\{ |\mathcal{U}_a + \mathcal{U}_b|^2 + |\tilde{\mathcal{U}}_a + \tilde{\mathcal{U}}_b|^2 \right\}. \quad (62)$$

Это означает, что, если уровни энергии $E_{1,2}$ не разрешаются экспериментально, полное сечение дается суммарным вкладом чистых $2s^2$ - и $2p^2$ -конфигураций.

Графики универсальных функций (60) и (61) представлены на рис. 2а. Как видно, процесс возбуждения характеризуется небольшими переданными импульсами $x \lesssim 4$, т.е. $q \lesssim 2\eta$. Если функцию $Q(x)$ в уравнении (59) заменить на $Q_{1,2}(x)$, то получатся универсальные функции $B_{1,2}(\varepsilon)$ для возбуждений в состояния, описываемые соответственно волновыми функциями (3) и (4). Соответствующие результаты численных расчетов построены на рис. 2б. Как можно заметить, функции достигают значений насыщения уже при $\varepsilon \gtrsim 10$. При высоких энергиях функции $B_{1,2}(\varepsilon)$ достигают асимптотических пределов $B_1 = 0.0231$ и $B_2 = 0.0072$. Тогда для быстрых налетающих частиц ($\varepsilon \gg 3/2$) полные сечения изменяются как $\sigma^{**} \sim \varepsilon^{-1}$, такое поведение аналогично поведению в случае одноэлектронных возбуждений $1s \rightarrow ns$ [19]. Отметим, что в этом случае формула для σ^{**} также может быть использована для столкновений с тяжелыми заряженными частицами, которые тем не менее гораздо легче, чем атомные ядра мишени. Безразмерная энергия $\varepsilon = v^2/(\alpha Z)^2$ определяется безразмерной скоростью тяжелой частицы. Если зарядовое число налетающей частицы равно $\pm z$ (в единицах элементарного заряда e), то сечение должно быть умножено на z^2 . Хотя $\Gamma_2 \ll \Gamma_1$, оба автоионизационных уровня $2s^2 (^1S)$ и $2p^2 (^1S)$ могут быть эффективно возбуждены при рассеянии высокоэнергетических частиц.

Сечение (58) быстро уменьшается с ростом заряда ядра мишени Z . Поэтому до сих пор двойное воз-

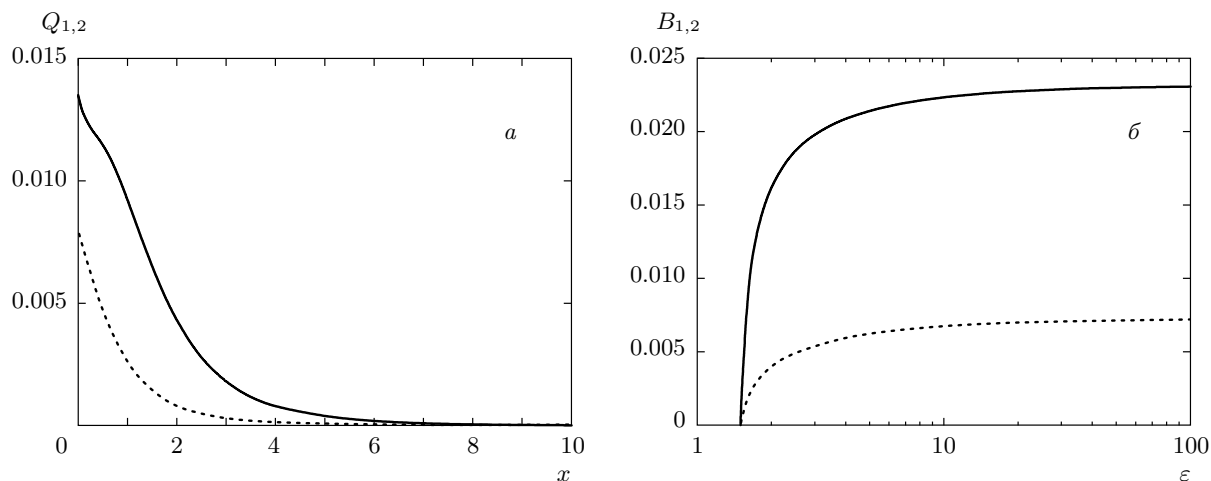


Рис. 2. Универсальные функции $Q_{1,2}(x)$ (а) и $B_{1,2}(\varepsilon)$ (б): сплошные линии — $2s^2(1S)$ -состояние, пунктирные линии — $2p^2(1S)$ -состояние

буждение автоионизационных состояний исследовалось только для атомов гелия. Поскольку в используемой нами теории возмущений параметр $1/Z \ll 1$ предполагается малым, полученные нами результаты для гелия нельзя считать достаточно точными. Кроме того, экспериментально измеряемые сечения содержат также дополнительные вклады от интерференции каналов ионизации [20–25]. Однако, вследствие быстрой сходимости ряда теории возмущений по корреляционному параметру $1/Z$ [17], сечение (58) должно быть правильным по порядку величины даже для мишеней с малыми значениями $Z \gtrsim 1$.

В таблице наши предсказания сравниваются с имеющимися теоретическими и экспериментальными результатами для двойного возбуждения атомов гелия в автоионизационное $2s^2(1S)$ -состояние при рассеянии высокоэнергетических электронов. Сечения, вычисленные Фритшем и Лином [22], сильно отличаются от экспериментальных данных, но согласуются с зависимостью вида $\sigma^{**} \sim \varepsilon^{-1}$. Результаты Винтера [26] значительно ближе к эксперименту, но уменьшаются гораздо быстрее, чем ε^{-1} с ростом энергии столкновения. Разрешение этих противоречий требует дополнительных экспериментальных измерений.

3. ДВОЙНЫЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ ПРИ РАССЕЯНИИ ФОТОНОВ

Двойное возбуждение гелиеподобных ионов может также происходить в реакциях рассеяния фотонов. Если энергия налетающего фотона ω_1 ограниче-

на условием $I \ll \omega_1 \ll m$, то основной вклад в сечение возникает от так называемого \mathbf{A}^2 -члена оператора электрон-фотонного взаимодействия, где \mathbf{A} — вектор-потенциал электромагнитного поля [28–30]. Соответствующие диаграммы Фейнмана принадлежат к типу «чайка» (sea-gull). Такие диаграммы, описывающие переходы в двукратно возбужденные состояния, изображены на рис. 3.

Предположим, что налетающий фотон характеризуется импульсом \mathbf{k}_1 , энергией $\omega_1 = |\mathbf{k}_1|$ и вектором поляризации \mathbf{e}_1 , а рассеянный фотон имеет импульс \mathbf{k}_2 , энергию $\omega_2 = |\mathbf{k}_2|$ и поляризацию \mathbf{e}_2 . В координатном представлении \mathbf{A}^2 -взаимодействие дается оператором

$$\hat{V}_\gamma(\mathbf{r}) = N_\gamma e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}, \quad N_\gamma = 2\pi \frac{\alpha}{m} \frac{\mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_1}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}}. \quad (63)$$

Здесь $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ — импульс, переданный атому. Легко заметить, что по сравнению со случаем электронного удара, где импульс отдачи $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$ передается посредством оператора $\hat{V}_q(\mathbf{r})$, заданного уравнением (15), различие между амплитудами переходов сводится только к общему множителю, не зависящему от \mathbf{r} . Учитывая это, сечение процесса можно записать в виде

$$d\sigma^{**} = \frac{(4\pi\alpha)^4 |\mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_1|^2}{4m^2 \omega_1 \omega_2} |U|^2 \frac{d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^2} \times \delta(\omega_2 + E_j - \omega_1 - E_i), \quad (64)$$

где U — тот же самый матричный элемент, что и в уравнении (55).

Таблица. Сечения возбуждения автоионизационного $2s^2(^1S)$ -состояния гелия электронным ударом при энергиях E_p

E_p , кэВ	ε	σ^{**} , кб; теория			σ^{**} , кб; эксперимент
		Фритш, Лин [22]	Винтер [26]	Наст. работа	Гизе и др. [27]
0.818	15.0	7.3	1.4	2.07	0.816
3.25	59.7	2.0	0.12	0.53	

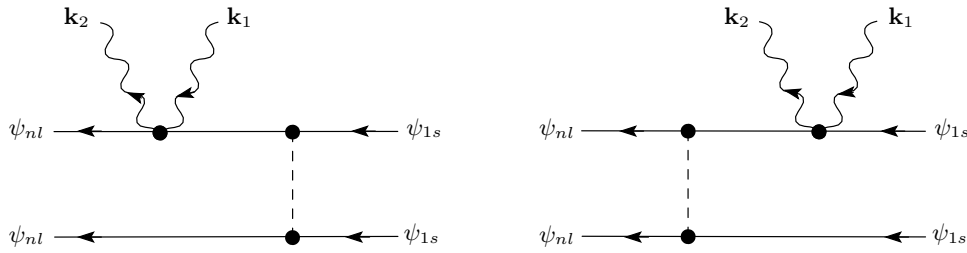


Рис. 3. Диаграммы Фейнмана для двухэлектронного возбуждения атома при рассеянии высокоэнергетического фотона. Волнистые линии обозначают налетающий и рассеянный фотоны

Элемент фазового объема для фотонов, рассеянных в телесный угол $d\Omega_2$, есть

$$d\mathbf{k}_2 = \omega_2^2 d\omega_2 d\Omega_2, \quad d\Omega_2 = \pi \frac{dq^2}{\omega_1 \omega_2}. \quad (65)$$

В дальнейшем удобно ввести безразмерные величины, такие как $x = (q/\eta)^2$ и $\zeta = (2\omega_1/\eta)^2$. Интегрирование (64) по энергии ω_2 дает выражение

$$d\sigma^{**} = \frac{\sigma_e}{Z^2 \zeta} |\mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_1|^2 P(x) dx, \quad (66)$$

$$P(x) = (8\pi\alpha Z)^2 |\mathcal{U}|^2, \quad (67)$$

где $\sigma_e = \pi r_e^2 = 0.2495$ б и $r_e = \alpha/m$ — классический радиус электрона. Сравнивая универсальную функцию $P(x)$ с функцией $Q(x)$, заданную уравнением (57), можно увидеть, что $P(x) = x^2 Q(x)$. Для переходов в автоионизационные состояния $2s^2(^1S)$ и $2p^2(^1S)$, описываемые соответственно волновыми функциями (3) и (4), существует аналогичное соотношение, а именно, $P_{1,2}(x) = x^2 Q_{1,2}(x)$, где функции $Q_{1,2}(x)$ заданы уравнениями (60) и (61). Результаты соответствующих вычислений изображены на рис. 4а. В отличие от функций $Q_{1,2}(x)$, которые достигают максимумов при $x = 0$, функции $P_{1,2}(x)$ в начале координат принимают нулевое значение.

До сих пор мы имели дело с фотонами определенных поляризаций. Однако обычно интересуются процессами, в которых налетающие фотоны неполяризованы, а поляризация рассеянных фотонов не из-

меряется. Соответственно, дифференциальное сечение (66) следует усреднить по поляризациям налетающих фотонов и просуммировать по поляризациям рассеянных. Это достигается посредством следующей замены:

$$|\mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_1|^2 \rightarrow \overline{|\mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_1|^2} = \frac{1}{2} \sum_{\text{pol.}} |\mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_1|^2 = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta), \quad (68)$$

где θ — угол рассеяния фотона. Учитывая, что $\omega_2 \approx \omega_1$ и $q^2 \approx 2\omega_1^2 (1 - \cos \theta)$, получим

$$\overline{|\mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_1|^2} = 1 - 2\frac{x}{\zeta} + 2\frac{x^2}{\zeta^2}. \quad (69)$$

Тогда в случае неполяризованных фотонов дифференциальное сечение записывается как

$$d\sigma^{**} = \frac{\sigma_e}{Z^2 \zeta} \left(1 - 2\frac{x}{\zeta} + 2\frac{x^2}{\zeta^2} \right) P(x) dx. \quad (70)$$

Интегрируя (70) по x от $x_{\min} = 0$ до $x_{\max} = \zeta$, получим полное сечение двойного возбуждения:

$$\sigma^{**} = \frac{\sigma_e}{Z^2} R(\zeta), \quad (71)$$

$$R(\zeta) = \int_0^1 (1 - 2t + 2t^2) P(\zeta t) dt, \quad (72)$$

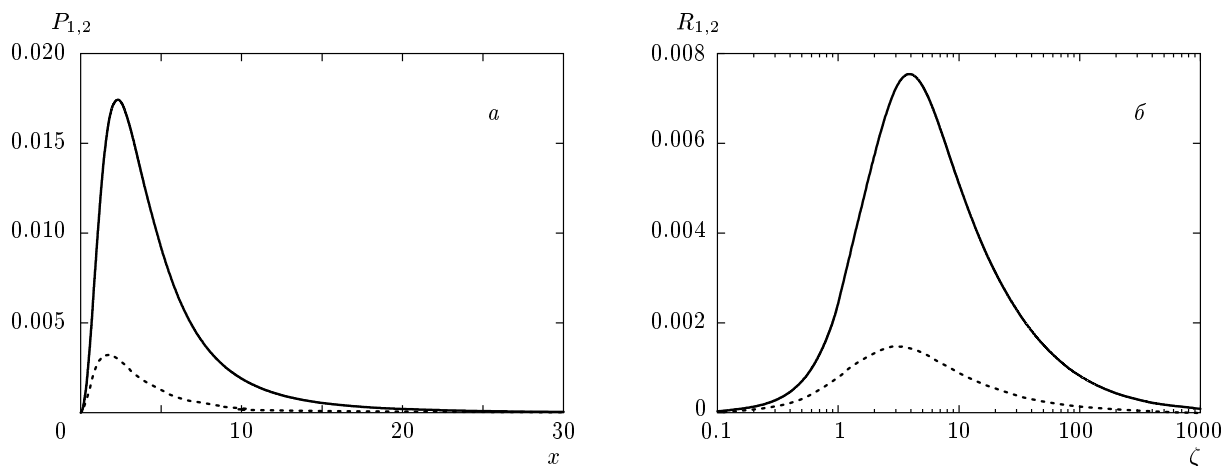


Рис. 4. Универсальные функции $P_{1,2}(x)$ (а) и $R_{1,2}(\zeta)$ (б): сплошные линии — $2s^2(^1S)$ -состояние, пунктирные линии — $2p^2(^1S)$ -состояние

где переменная t определена как $t = x/\zeta$. Универсальная функция $R(\zeta)$ не зависит от значений Z .

Если в уравнение (72) вместо функции $P(x)$ подставить функции $P_{1,2}(x) = x^2 Q_{1,2}(x)$, то получают скейлинговые функции $R_{1,2}(\zeta)$ для возбуждения в автоионизационные состояния $2s^2(^1S)$ и $2p^2(^1S)$, описываемые соответственно волновыми функциями (3) и (4). Результаты численных расчетов представлены на рис. 4б. Как можно заметить, максимумы функций $R_{1,2}(\zeta)$ соответствуют значениям параметра $\zeta \approx 4$, т. е. $\omega_1 \approx \eta$. Насколько нам известно, экспериментальные измерения двойных электронных возбуждений фотонным ударом отсутствуют в литературе. В теоретической работе [14] волновая функция $\Psi_{2p^2}(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ была взята с противоположным знаком. Поскольку конечные состояния атома описываются смесью волновых функций Ψ_{2s^2} и Ψ_{2p^2} , ошибка в знаке привела к неправильным значениям сечений возбуждения. В данном разделе мы исправили эти результаты.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы получили сечения двойного возбуждения гелиеподобных ионов в автоионизационные состояния $2s^2(^1S)$ и $2p^2(^1S)$ при столкновении с высокоэнергетическими электронами и фотонами. Полученные формулы проявляют универсальную скейлинговую зависимость от заряда ядра мишени Z и энергии налетающих частиц. Вычисления выполнены аналитически в рамках нерелятивистской теории возмущений по межэлек-

тронному взаимодействию. Предполагается, что атомы мишеней характеризуются малыми параметрами $1/Z \ll 1$ и $\alpha Z \ll 1$. Наши теоретические расчеты сравниваются с имеющимися теоретическими и экспериментальными результатами для атома гелия.

А. И. М. и А. В. Н. благодарны Дрезденскому технологическому университету за гостеприимство. Авторы выражают признательность за финансовую поддержку институту Гельмгольца по исследованию тяжелых ионов и РФФИ (грант № 11-02-00943-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. B. L. Moiseiwitsch and S. J. Smith, Rev. Mod. Phys. **40**, 238 (1968).
2. J. O. P. Pedersen and P. Hvelplund, Phys. Rev. Lett. **62**, 2373 (1989).
3. B. Padhy and D. K. Rai, Pramana: J. Phys. **35**, 341 (1990).
4. J. C. Straton, J. H. McGuire, and Z. Chen, Phys. Rev. A **46**, 5514 (1992).
5. V. A. Sidorovich, Phys. Scripta **50**, 119 (1994).
6. P. Moretto-Capelle, D. Bordenave-Montesquieu, A. Bordenave-Montesquieu et al., Phys. Rev. Lett. **79**, 5230 (1997).
7. K. C. Prince, R. Richter, M. de Simone et al., Phys. Rev. A **68**, 044701 (2003).

8. B. A. deHarak, K. Bartschat, and N. L. S. Martin, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 063201 (2008).
9. Z. Zhang, X. Shan, E. Wang et al., *Phys. Rev. A* **85**, 062702 (2012).
10. G. Tanner, K. Richter, and J.-M. Rost, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 497 (2000).
11. A. Simon, A. Warczak, T. ElKafrawy et al., *Phys. Rev. Lett.* **104**, 123001 (2010).
12. Y. Nakano, S. Suda, A. Hatakeyama et al., *Phys. Rev. A* **85**, 020701(R) (2012).
13. В. М. Галицкий, Б. М. Карнаков, В. И. Коган, *Задачи по квантовой механике*, Наука, Москва (1992), с. 628.
14. М. Ya. Amusia, A. I. Mikhailov, and I. A. Mikhailov, *J. Phys. B* **32**, 1365 (1999).
15. A. I. Mikhailov, A. V. Nefiodov, and G. Plunien, *J. Phys. B* **44**, 135202 (2011).
16. У. И. Сафронова, В. С. Сенашенко, *Опт. и спектр.* **45**, 9 (1978).
17. A. I. Mikhailov, I. A. Mikhailov, A. N. Moskalev et al., *Phys. Rev. A* **69**, 032703 (2004).
18. В. Г. Горшков, В. С. Поликанов, *Письма в ЖЭТФ* **9**, 464 (1969).
19. A. V. Nefiodov and G. Plunien, *J. Phys. B* **43**, 165206 (2010).
20. В. В. Балашов, С. С. Липовецкий, В. С. Сенашенко, *ЖЭТФ* **63**, 1622 (1972).
21. S. S. Lipovetsky and V. S. Senashenko, *J. Phys. B* **5**, L183 (1972).
22. W. Fritsch and C. D. Lin, *Phys. Rev. A* **41**, 4776 (1990).
23. V. V. Karasiov, L. N. Labzowsky, A. V. Nefiodov et al., *Phys. Lett. A* **161**, 453 (1992).
24. A. L. Godunov, J. H. McGuire, and V. A. Schipakov, *J. Phys. B* **30**, 3227 (1997).
25. A. L. Godunov, P. B. Ivanov, and V. A. Schipakov, *J. Phys. B* **30**, 3403 (1997).
26. T. G. Winter, *Phys. Rev. A* **43**, 4727 (1991).
27. J. P. Giese, M. Schulz, J. K. Swenson et al., *Phys. Rev. A* **42**, 1231 (1990).
28. T. Surić, K. Pisk, B. A. Logan et al., *Phys. Rev. Lett.* **73**, 790 (1994).
29. М. Ya. Amusia and A. I. Mikhailov, *J. Phys. B* **28**, 1723 (1995).
30. М. Я. Амусья, А. И. Михайлов, И. А. Михайлов, *ЖЭТФ* **113**, 539 (1998).