ЖЭТФ, 2013, том 143, вып. 4, стр. 642–651

К ТЕОРИИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ МОЩНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В. П. Милантьев [*]***, А. Х. Кастильо***

Российский университет дружбы народов
117198, Москва, Россия

Поступила в редакцию 29 июня 2012 г.

По методу Боголюбова получены усредненные релятивистские уравнения движения заряженной частицы в поле мощного электромагнитного излучения в приближении геометрической оптики. Указаны ограничения, при которых справедливы полученные уравнения. Найдены осциллирующие добавки к сглаженным динамическим переменным частицы, сводящиеся к известным выражениям в случае плоской волны круговой и линейной поляризаций. Показано, что выражения для релятивистской усредненной силы в обоих случаях содержат новые дополнительные малые слагаемые, ослабляющие ее действие. Подтвержден известный результат, что выражения для пондеромоторной силы в случаях волн круговой и линейной поляризаций различаются.

DOI: 10.7868/S0044451013040046

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о движении заряженной частицы в поле плоской электромагнитной волны имеет точное решение [1, 2]. В случае плоской волны круговой поляризации частица движется по окружности в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, при этом энергия частицы не изменяется. В случае волны линейной поляризации траекторией частицы является «восьмерка», а ее энергия, периодически изменяясь, в среднем сохраняется. Если амплитуда волны зависит от координат и времени, то задача существенно усложняется [3–26]. В этом случае возможно приближенное решение с использованием разложений по малому параметру и усреднения по быстрым переменным. Такая процедура была впервые проведена в работе [3]. Было показано, что усредненное воздействие на нерелятивистскую частицу с зарядом e и массой m монохроматического высокочастотного (ВЧ) поля с произвольной пространственной зависимостью амплитуды

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\,\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$$

описывается силой, получившей название силы Гапонова – Миллера:

$$\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r}) \equiv \nabla \frac{e^2 E^2}{4m\omega^2}.$$

В работе [7], по-видимому, впервые было дано релятивистское обобщение этой силы. Было показано, что усредненная (пондеромоторная) сила, действующая на заряженную частицу, как и в нерелятивистском приближении, имеет потенциальный характер с потенциалом $U = m^* c^2$, где

$$m^* = m\sqrt{1 + A^2}$$

— «эффективная масса» частицы, при этом $A^2 = (e/mc\omega)^2 \langle \mathbf{E}^2 \rangle$. Угловые скобки означают усреднение по многим периодам колебаний.

Особенность поведения частицы в поле мощного электромагнитного излучения заключается в том, что в этом случае происходит не только пондеромоторное воздействие на частицу, но также рассеяние излучения [7, 21–25]. Анализ релятивистского движения частицы в поле мощного излучения обычно ограничивается выводом пондеромоторных сил и численным решением усредненных уравнений [14–18]. При этом остаются без внимания быстроосциллирующие составляющие динамических переменных частицы в поле излучения и закон дви-

[*] E-mail: vmilantiev@sci.pfu.edu.ru, vmilant@mail.ru

жения. Кроме того, обычно считается, что пондеромоторные силы не зависят от поляризации волны [17]. Между тем в работе [15] было показано, что выражения для пондеромоторной силы (и усредненные уравнения движения частицы) в случае волн круговой и линейной поляризаций несколько различаются.

С целью прояснения возникшего противоречия в настоящей работе дан последовательный вывод по методу Боголюбова усредненных уравнений движения релятивистской заряженной частицы, находящейся в поле мощного электромагнитного излучения линейной и круговой поляризаций. Поле излучения описывается в приближении геометрической оптики. Усреднение проводится по быстрой фазе волны с использованием разложения по степеням пространственно-временных производных амплитуды.

При рассмотрении усредненного движения частицы в поле электромагнитного излучения естественно возникают два безразмерных параметра. Один параметр $g = eE/mc\omega$ — отношение амплитуды осцилляторной скорости частицы в поле волны к скорости света. Другой параметр μ связан с пространственно-временными изменениями амплитуд поля излучения и является малым в соответствии с приближением геометрической оптики, квазиоптики и т. д. В случае достаточно слабого электромагнитного поля параметры g и μ могут иметь одинаковый порядок. Тогда можно проводить усреднение с учетом этого обстоятельства [9–11]. В релятивистски сильном поле параметр g не мал и может даже превосходить единицу [25]. Параметр g порядка единицы, например, в случае излучения с длиной волны $\lambda = 2\pi c/\omega = 1$ мкм и интенсивностью около 10^{18} Вт/см^2. Поэтому в поле мощного излучения процедура усреднения возможна лишь при разложении по параметру μ. В приближении геометрической оптики этот параметр вводится как

$$\mu = 1/kL \approx 1/\omega T,$$

где k — волновое число, L и T — характерные пространственный и временной масштабы изменения амплитуды волны [26, 27]. В квазиоптическом приближении параметр $\mu = 1/ka$, где a — сужение гауссова пучка.

Классическое (не квантовое) описание движения электрона в поле мощного излучения возможно, если амплитуда E электрического поля излучения значительно меньше критического электрического поля E_c рождения электрон-позитронной пары, $E_c = m^2c^3/e\hbar = 1.3 \cdot 10^{16}$ В/см. Далее рассматривается излучение, электрическое поле которого меньше E_c. Не учитываются также эффекты, связанные с рассеянием излучения частицей.

2. ЗАДАНИЕ ПОЛЯ ВОЛНЫ

Рассмотрим электромагнитную волну, амплитуда которой мало изменяется на расстоянии порядка длины волны и за период колебаний, так что можно ввести параметр μ. В этом случае электрическую и магнитную компоненты поля волны можно представить в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r},t)e^{i\theta} + \text{c.c.}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r},t)e^{i\theta} + \text{c.c.}$$

Здесь $\theta(\mathbf{r},t)$ — эйконал (фаза), с помощью которого определяются частота и волновой вектор волны [26].

В приближении геометрической оптики медленно меняющиеся амплитуды $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{B}_0$ можно представить в виде разложений [26]:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{00} + \mu\mathbf{E}_1 + \ldots, \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_{00} + \mu\mathbf{B}_1 + \ldots$$

Из уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

следуют следующие соотношения между амплитудами поля:

$$\mathbf{B}_{00} = \frac{c}{\omega}[\mathbf{k}\times\mathbf{E}_{00}],$$

$$\mathbf{B}_1 - \frac{c}{\omega}[\mathbf{k}\times\mathbf{E}_{01}] = \frac{1}{i\omega}\left(\frac{\partial\mathbf{B}_{00}}{\partial t} + c\operatorname{rot}\mathbf{E}_{00}\right).$$

Будем считать, что электромагнитная волна распространяется вдоль оси z и в нулевом приближении имеет компоненты

$$\mathbf{E}_{00} = (E_{00x}, E_{00y}, 0),$$

при этом фаза $\theta = -\omega t + kz$. В этом случае магнитные компоненты поля в нулевом и первом приближениях описываются формулами

$$B_{00x} = -\frac{kc}{\omega}E_{00y}, \quad B_{00y} = \frac{kc}{\omega}E_{00x}, \quad B_{00z} = 0,$$

$$B_{1x} = \frac{c}{i\omega}\left(-ikE_{1y} - \frac{\partial E_{00y}}{\partial z} - \frac{k}{\omega}\frac{\partial E_{00y}}{\partial t}\right),$$

$$B_{1y} = \frac{c}{i\omega}\left(ikE_{1x} + \frac{\partial E_{00x}}{\partial z} + \frac{k}{\omega}\frac{\partial E_{00x}}{\partial t}\right),$$

$$B_{1z} = \frac{c}{i\omega}\left(\frac{\partial E_{00y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{00x}}{\partial y}\right).$$

Таким образом, в нулевом приближении волна является поперечной, а в первом приближении возникают продольные составляющие векторов поля. В частности, из уравнения $\operatorname{div}\mathbf{E}=0$ следует, что

$$E_{1z}=-\frac{1}{ik}\left(\frac{\partial E_{00x}}{\partial x}+\frac{\partial E_{00y}}{\partial y}\right)e^{i\theta}+\text{c.c.},$$

при этом поперечные компоненты E_{1x}, E_{1y} можно считать равными нулю.

В случае волны круговой поляризации полагаем, что компонента $E_{00x}=E(\mathbf{r},t)/2$ является действительной, а $E_{00y}=iE_{00x}$ — мнимой. Тогда

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=(E\cos\theta,-E\sin\theta,E_{z1}),$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=(-E_y+B_{1x},E_x+B_{1y},B_{1z}),$$

где (при $\omega=kc$)

$$B_{1x}=-\frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial E}{\partial t}+c\frac{\partial E}{\partial z}\right)\cos\theta,$$
$$B_{1y}=\frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial E}{\partial t}+c\frac{\partial E}{\partial z}\right)\sin\theta,$$
$$B_{1z}=\frac{1}{k}\left(\frac{\partial E}{\partial x}\cos\theta-\frac{\partial E}{\partial y}\sin\theta\right),$$
$$E_{1z}=-\frac{1}{k}\left(\frac{\partial E}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial E}{\partial y}\cos\theta\right).$$

В случае линейно поляризованной волны поле задается в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=(E\cos\theta,0,E_{z1}),$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=(0,E_x+B_{1y},B_{1z}).$$

Члены, содержащие первые пространственно-временные производные амплитуды, являются величинами порядка μ.

3. УСРЕДНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ ВОЛНЫ КРУГОВОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ

В случае волны круговой поляризации движение частицы описывается уравнениями

$$\frac{dp_x}{dt}=eE\left(1-\frac{v_z}{c}\right)\cos\theta+ +\mu\frac{e}{\omega}v_y\left(\frac{\partial E}{\partial x}\cos\theta-\frac{\partial E}{\partial y}\sin\theta\right)- -\mu\frac{e}{c\omega}v_z\left(\frac{\partial E}{\partial t}+c\frac{\partial E}{\partial z}\right)\sin\theta, \quad (1)$$

$$\frac{dp_y}{dt}=-eE\left(1-\frac{v_z}{c}\right)\sin\theta- -\mu\frac{e}{\omega}v_x\left(\frac{\partial E}{\partial x}\cos\theta-\frac{\partial E}{\partial y}\sin\theta\right)- -\mu\frac{e}{c\omega}v_z\left(\frac{\partial E}{\partial t}+c\frac{\partial E}{\partial z}\right)\cos\theta, \quad (2)$$

$$\frac{dp_z}{dt}=\frac{eE}{c}(v_x\cos\theta-v_y\sin\theta)+\mu\frac{e}{\omega}\times \times(v_x\sin\theta+v_y\cos\theta)\left(\frac{\partial E}{\partial t}+c\frac{\partial E}{\partial z}\right)+\mu eE_{z1}. \quad (3)$$

Используем также уравнение для энергии частицы (для релятивистского фактора $\gamma=\sqrt{1+\mathbf{p}^2/(mc)^2}$):

$$\frac{d\gamma}{dt}=\frac{eE}{mc^2}(v_x\cos\theta-v_y\sin\theta)+\mu\frac{e}{mc^2}v_zE_{1z}. \quad (4)$$

Параметр μ далее опускаем. Систему (1)–(4) дополним уравнением для фазы волны, которую «видит» частица:

$$\frac{d\theta}{dt}=-\omega\left(1-\frac{v_z}{c}\right)\equiv-\omega\frac{G}{\gamma}. \quad (5)$$

В случае поля высокой частоты фаза θ является быстро меняющейся величиной. В этом случае выражение в скобках не может быть слишком малым [17]. Это будет далее предполагаться. Величина G в (5), определяемая как

$$G=\gamma-\frac{p_z}{mc}, \quad (6)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{dG}{dt}=-\frac{eE_{1z}}{mc}\left(1-\frac{v_z}{c}\right)- -\frac{e}{m\omega c^2}(v_x\sin\theta+v_y\cos\theta)\left(\frac{\partial E}{\partial t}+c\frac{\partial E}{\partial z}\right). \quad (7)$$

Видно, что величина G является интегралом движения в случае плоской поперечной волны с постоянной амплитудой [2]. Она остается также постоянной, если поле волны зависит лишь от фазы $\eta=\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$ [19]. Однако величина G медленно изменяется при слабом изменении амплитуды волны в пространстве и во времени. Далее медленно меняющимися считаются величины, содержащие часть, не зависящую от быстрой фазы θ, и быстро осциллирующие малые члены, пропорциональные пространственно-временным производным амплитуды волны.

В случае мощного излучения амплитуда поля, определяемая параметром $g=eE/mc\omega$, считается «большой», а малыми являются пространственно-временные производные амплитуды. В уравнениях движения (1)–(4) помимо малых имеются «большие» члены, пропорциональные амплитуде поля.

В этом случае непосредственно проводить усреднение нельзя [28]. Необходимо сначала устранить эти «большие» члены. Из уравнения (1) с использованием (5) следует, что величина

$$\pi_x = p_x + \frac{eE}{\omega}\sin\theta \tag{8}$$

является медленно меняющейся, поскольку удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\pi_x}{dt} = \sin\theta \frac{G}{\gamma}\frac{\partial(eE/\omega)}{\partial t} + \\ + \frac{1}{m\gamma}(p_x\sin\theta + p_y\cos\theta)\frac{e}{\omega}\frac{\partial E}{\partial x}. \tag{9}$$

Аналогично с помощью преобразования

$$p_y = \pi_y - \frac{eE}{\omega}\cos\theta \tag{10}$$

исключается «большой» член в уравнении (2):

$$\frac{d\pi_y}{dt} = \cos\theta \frac{G}{\gamma}\frac{\partial(eE/\omega)}{\partial t} + \\ + \frac{1}{m\gamma}(p_x\sin\theta + p_y\cos\theta)\frac{e}{\omega}\frac{\partial E}{\partial y}. \tag{11}$$

Отметим, что соотношения (8), (10) представляют собой точное решение задачи о движении частицы в поле плоской волны круговой поляризации с постоянной амплитудой [1].

С учетом выражений (8), (10) уравнения (9), (11) приобретают вид

$$\begin{aligned} &\frac{d\pi_x}{dt} = \sin\theta \frac{G}{\gamma}\frac{\partial p_E}{\partial t} + \\ &+ \frac{1}{m\gamma}(\pi_x\sin\theta + \pi_y\cos\theta - p_E)\frac{\partial p_E}{\partial x}, \\ &\frac{d\pi_y}{dt} = \cos\theta \frac{G}{\gamma}\frac{\partial p_E}{\partial t} + \\ &+ \frac{1}{m\gamma}(\pi_x\sin\theta + \pi_y\cos\theta - p_E)\frac{\partial p_E}{\partial y}. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь введено обозначение

$$p_E \equiv \frac{eE(\mathbf{r},t)}{\omega} \tag{13}$$

для амплитуды импульса, приобретаемого частицей в поле волны.

При усреднении по методу Боголюбова [28] необходимо перейти от истинных переменных частицы (и фазы волны) к сглаженным переменным с помощью общих соотношений:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}_\perp &= \mathbf{P}_\perp + \mu\mathbf{g}_{1p\perp}(t,\mathbf{R},\mathbf{P},\alpha) + \mu^2\mathbf{g}_{2p\perp} + \ldots, \\ p_z &= P_z + \mu g_{1p_z}(t,\mathbf{R},\mathbf{P},\alpha) + \ldots, \\ \mathbf{r} &= \mathbf{R} + \mu\mathbf{g}_{1r}(t,\mathbf{R},\mathbf{P},\alpha) + \mu^2\mathbf{g}_{2r} + \ldots, \\ \theta &= \alpha + \mu q_1(t,\mathbf{R},\mathbf{P},\alpha) + \mu^2 q_2 + \ldots, \\ G &= G_0 + \mu g_{1G}(t,\mathbf{R},\mathbf{P},\alpha) + \mu^2 g_{2G} + \ldots \end{aligned} \tag{14}$$

Величины $\mathbf{R}$, $\mathbf{P}$ и α соответственно представляют собой сглаженные (усредненные) радиус-вектор, вектор импульса частицы и фазу волны, не зависящие от быстрой фазы волны. При этом среднее значение всех периодических функций g_i равно нулю. Используя релятивистское соотношение

$$\gamma^2 = 1 + \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{(mc)^2},$$

а также (6), (8), (10), можно получить формулу

$$\gamma = \Gamma - \frac{p_E}{G(mc)^2}(\pi_x\sin\theta + \pi_y\cos\theta), \tag{15}$$

где медленно меняющаяся часть имеет вид

$$\Gamma = \frac{1}{2G}\left(1 + G^2 + \frac{\pi_\perp^2 + p_E^2}{(mc)^2}\right). \tag{16}$$

Отметим, что быстрые осцилляции типа (15) содержатся также в продольной составляющей импульса. Это вытекает из уравнения (3). Если осциллирующий член в (15) сравним по порядку величины с первым членом, то возникает трудность из-за того, что в уравнениях движения (12) выражение (15) содержится в знаменателе. Тогда процедура усреднения по быстрой фазе усложняется [8]. Поэтому будем считать, что $\pi_{x,y} < p_E$. Это обычно неявно предполагается [17]. При таком условии осциллирующий член в (15) должен быть достаточно малым, однако он может быть несколько больше членов, содержащих производные амплитуды волны. Для расчетов, аналогично (14), удобно положить

$$\gamma = \Gamma_0 + \mu g_{1\gamma}(t,\mathbf{R},\mathbf{P},\alpha) + \ldots$$

Все переменные в (16) являются медленно меняющимися величинами. Поэтому

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2G_0}\left(1 + G_0^2 + \frac{P_\perp^2 + P_E^2}{(mc)^2}\right).$$

Здесь $P_E = eE(\mathbf{R},t)/\omega$ — усредненная амплитуда осцилляторного импульса частицы в поле волны. С учетом соотношения $G_0 = \Gamma_0 - P_z/mc$ получаем

$$\Gamma_0 = \sqrt{1 + \frac{\mathbf{P}^2 + P_E^2}{(mc)^2}}. \tag{17}$$

Таким образом, в рассматриваемом первом приближении

$$\frac{1}{\gamma} \approx \frac{1}{\Gamma_0}\left(1 - \frac{\mu g_{1\gamma}}{\Gamma_0}\right).$$

По методу усреднения необходимо найти уравнения для сглаженных переменных и вычислить периодические составляющие к этим переменным.

Проводя усреднение уравнений (12) с учетом лишь членов первого порядка, получаем

$$\frac{d\mathbf{P}_\perp}{dt} = -\frac{1}{2\Gamma_0} mc^2 \left[1 - \frac{1}{2G_0\Gamma_0}\left(\frac{\mathbf{P}_\perp}{mc}\right)^2\right] \times \\ \times \nabla_\perp \left(\frac{P_E}{mc}\right)^2 + \frac{\mathbf{P}_\perp}{4(\Gamma_0 mc)^2}\frac{\partial P_E^2}{\partial t}. \quad (18)$$

Учтем, что все члены в производных dg_{1i}/dt в уравнениях для переменных (14) имеют порядок μ^2, кроме $(d\alpha/dt)\partial g_{1i}/\partial\alpha$, где, согласно (5),

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\omega\frac{G_0}{\Gamma_0}.$$

Легко показать, что осциллирующие добавки к сглаженным поперечным компонентам вектора импульса описываются формулами (при отбрасывании членов, содержащих удвоенные фазы)

$$\begin{aligned} g_{1p_x} &= \frac{1}{\omega}\frac{\partial P_E}{\partial t}\cos\alpha + \\ &+ \frac{1}{m\omega G_0}(P_x\cos\alpha - P_y\sin\alpha) \times \\ &\times \left[1 - \frac{1}{G_0\Gamma_0}\left(\frac{P_E}{mc}\right)^2\right]\frac{\partial P_E}{\partial X}, \\ g_{1p_y} &= -\frac{1}{\omega}\frac{\partial P_E}{\partial t}\sin\alpha + \\ &+ \frac{1}{m\omega G_0}(P_x\cos\alpha - P_y\sin\alpha) \times \\ &\times \left[1 - \frac{1}{G_0\Gamma_0}\left(\frac{P_E}{mc}\right)^2\right]\frac{\partial P_E}{\partial Y}. \end{aligned} \quad (19)$$

В формулах (18), (19) вторые члены являются поправочными. Если осциллирующие члены в (15) порядка μ, то поправочными членами можно пренебречь. Это обычно полагают. С учетом формул (19) можно найти периодические составляющие для Γ_0 и для продольной составляющей импульса:

$$\begin{aligned} g_{1\gamma} &= -\frac{P_E}{G_0(mc)^2}(P_x\sin\alpha + P_y\cos\alpha) - \\ &- \frac{P_z}{G_0 m^2 c\omega}\left(\frac{\partial P_E}{\partial X}\cos\alpha - \frac{\partial P_E}{\partial Y}\sin\alpha\right), \\ g_{1p_z} &= -\frac{P_E}{mcG_0}(P_x\sin\alpha + P_y\cos\alpha) - \\ &- \frac{c\Gamma_0}{G_0\omega}\left(\frac{\partial P_E}{\partial X}\cos\alpha - \frac{\partial P_E}{\partial Y}\sin\alpha\right). \end{aligned} \quad (20)$$

Первые члены в этих выражениях соответствуют периодической составляющей (15), при этом в согласии с (6)

$$g_{1G} = \frac{1}{m\omega}\left(\frac{\partial P_E}{\partial X}\cos\alpha - \frac{\partial P_E}{\partial Y}\sin\alpha\right).$$

Такое же выражение следует из уравнения (7). Отметим, что первый осциллирующий член в выражении (20) для продольного импульса согласно уравнению движения (3) вовсе не обязан быть малым. Лишь определение (6) заставляет считать этот член таким же достаточно малым, как и в выражении для релятивистского фактора.

Усредненное продольное движение частицы описывается уравнением

$$\frac{dP_z}{dt} = -\frac{1}{2m\Gamma_0}\frac{\partial P_E^2}{\partial Z} - \frac{1}{4\Gamma_0^2 m^2 c}\mathbf{P}_\perp\cdot\nabla_\perp P_E^2. \quad (21)$$

Здесь в правой части основным является первый член. Второе слагаемое, как и в уравнениях (18), является поправочным.

После усреднения из выражения (4) получаем приближенное уравнение для полной энергии частицы:

$$\frac{d\Gamma_0}{dt} = \frac{1}{2(mc)^2\Gamma_0}\frac{\partial P_E^2}{\partial t}. \quad (22)$$

Отсюда следует, что в отсутствие временной зависимости амплитуды полная энергия частицы сохраняется: частица в среднем набирает энергию за счет поля волны.

Рассмотрим, наконец, уравнения, определяющие закон движения частицы:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m\gamma}.$$

После усреднения получаем

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V} \equiv \frac{\mathbf{p}}{m\Gamma_0}. \quad (23)$$

Периодические добавки к сглаженному радиус-вектору определяются формулами

$$
\begin{aligned}
g_{1x} = &-\frac{P_E}{m\omega G_0}\cos\alpha - \frac{1}{m\omega^2 G_0}\left\{\frac{\partial P_E}{\partial t}\sin\alpha + \right.\\
&+ \frac{1}{G_0}(V_x \sin\alpha + V_y\cos\alpha)\times\\
&\left.\times\left[1-\frac{1}{G_0\Gamma_0}\left(\frac{P_E}{mc}\right)^2\right]\frac{\partial P_E}{\partial X}\right\},\\
g_{1y} = &\frac{P_E}{m\omega G_0}\sin\alpha - \frac{1}{m\omega^2 G_0}\left\{\frac{\partial P_E}{\partial t}\cos\alpha + \right.\\
&+ \frac{1}{G_0}(V_x \sin\alpha + V_y\cos\alpha)\times\\
&\left.\times\left[1-\frac{1}{G_0\Gamma_0}\left(\frac{P_E}{mc}\right)^2\right]\frac{\partial P_E}{\partial Y}\right\}.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

В этих выражениях первые члены являются преобладающими, а вторые дают лишь поправки, поскольку первые члены пропорциональны амплитуде поля, а вторые — ее производным. Первые члены в выражениях (24) совпадают с законом движения частицы в поле плоской волны круговой поляризации [1, 2]. Видно, что усредненной траекторией частицы в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, является окружность [1], радиус и центр которой медленно изменяются вследствие изменения амплитуды волны. Согласно формулам (24), амплитуда смещения частицы в поле волны мала по сравнению с масштабом неоднородности поля.

В плоской волне вначале покоящаяся частица в направлении распространения волны не смещается [1]. В рассматриваемом случае волны с изменяющейся амплитудой происходит слабое продольное периодическое смещение частицы:

$$
\begin{aligned}
g_{1z} = \frac{1}{m\omega G_0^2}\Bigg[&-\frac{P_E}{mc}(P_x\cos\alpha - P_y\sin\alpha) + \\
&+\frac{\Gamma_0}{k}\left(\frac{\partial P_E}{\partial X}\sin\alpha + \frac{\partial P_E}{\partial Y}\cos\alpha\right)\Bigg].
\end{aligned}
$$

В усредненных уравнениях величину $(eE/mc\omega)^2 \equiv \equiv (P_E/mc)^2$ можно заменить на $\gamma_E^2 \equiv 1+(eE/mc\omega)^2$. Вводя безразмерную среднюю скорость частицы $\boldsymbol{\beta} = V/c$, нетрудно показать, что

$$
\Gamma_0 = \frac{\gamma_E}{\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2}} \equiv \gamma_E\gamma_\beta. \tag{25}
$$

Аналогичное соотношение получено в работе [17], однако в нем под знаком корня стоит не квадрат среднего значения скорости, а среднее значение квадрата скорости $\sqrt{1-\overline{v^2}/c^2}$. Эта некорректность отмечалась также в работе [19]. С учетом соотношения (25) усредненные уравнения движения приобретают вид

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{P}_\perp}{dt} &= -\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2}\left[1-\frac{1}{2G_0\Gamma_0}\left(\frac{\mathbf{P}_\perp}{mc}\right)^2\right]\times\\
&\times\nabla_\perp m^*c^2 + \frac{\boldsymbol{\beta}_\perp}{2\Gamma_0}\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2}\frac{\partial m^*c^2}{c\,\partial t},\\
\frac{dP_z}{dt} &= -\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2}\left(\frac{\partial m^*c^2}{\partial Z} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_\perp\cdot\nabla_\perp m^*c^2\right).
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Здесь $m^* = m\gamma_E$ — «эффективная масса» частицы [7]. Вид полученных уравнений аналогичен выведенным в работе [17], но помимо указанного выше различия в уравнениях (26) содержатся дополнительные малые члены, связанные с усредненными поперечными импульсами (скоростями). Дополнительные слагаемые члены менее существенны, чем малые члены в квадратных скобках (в первом уравнении), поскольку, как и множитель γ_β, они ослабляют усредненное воздействие волны.

4. УСРЕДНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В СЛУЧАЕ ЛИНЕЙНО ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ВОЛНЫ

Если волна линейно поляризована в направлении оси x и распространяется вдоль оси z, то движение частицы описывается уравнениями

$$
\begin{aligned}
\frac{dp_x}{dt} &= \frac{eEG}{\gamma}\cos\theta - \\
&-\frac{ep_z}{m\omega\gamma c}\left(\frac{\partial E}{\partial t} + c\frac{\partial E}{\partial z}\right)\sin\theta - \frac{ep_y}{m\gamma\omega}\frac{\partial E}{\partial y}\sin\theta,\\
\frac{dp_y}{dt} &= \frac{ep_x}{m\gamma\omega}\frac{\partial E}{\partial y}\sin\theta,\\
\frac{dp_z}{dt} &= \frac{ep_x}{m\gamma c}E\cos\theta + eE_{1z} + \\
&+\frac{ep_x}{m\omega\gamma c}\left(\frac{\partial E}{\partial t} + c\frac{\partial E}{\partial z}\right)\sin\theta,\\
\frac{d\gamma}{dt} &= \frac{e}{\gamma(mc)^2}(p_xE\cos\theta + p_zE_{1z}).
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Величина $G = \gamma - p_z/mc$ в этом случае удовлетворяет уравнению

$$
\frac{dG}{dt} = -\frac{eE_{1z}}{mc}\frac{G}{\gamma} - \frac{ep_x}{\omega m\gamma c}\left(\frac{\partial E}{\partial t} + c\frac{\partial E}{\partial z}\right)\sin\theta.
$$

Непосредственное усреднение уравнений (27) невозможно, поскольку правые части содержат «большие» быстро осциллирующие члены, пропорциональные полю E. Как и в случае волны круговой поляризации, «большой» член устраняется путем замены (8), при этом медленно меняющаяся величина π_x удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\pi_x}{dt} = \sin\theta \left(1 - \frac{v_z}{c}\right) \frac{\partial p_E}{\partial t} + \\ + \sin\theta \frac{\pi_x}{m\gamma} \frac{\partial p_E}{\partial x} - \frac{1-\cos 2\theta}{4m\gamma} \frac{\partial p_E^2}{\partial x}. \quad (28)$$

Проекция импульса $p_y \equiv \pi_y$ является медленно меняющейся величиной и описывается уравнением

$$\frac{d\pi_y}{dt} = \sin\theta \frac{\pi_x}{m\gamma} \frac{\partial p_E}{\partial y} - \frac{1-\cos 2\theta}{4m\gamma} \frac{\partial p_E^2}{\partial y}. \quad (29)$$

Обычно в уравнениях вида (28), (29) заменяют релятивистский фактор его средним значением. Тогда сразу получаются известные уравнения с «эффективной массой» частицы [17]. Однако релятивистский фактор содержит быстро осциллирующую часть, не связанную с малым параметром разложения (ср. с выражением (15)):

$$\gamma = \Gamma - \frac{1}{G(mc)^2}\left(\pi_x p_E \sin\theta + \frac{p_E^2}{4}\cos 2\theta\right), \quad (30)$$

где медленно меняющаяся часть имеет вид

$$\Gamma = \frac{1}{2G}\left(1 + G^2 + \frac{\pi_\perp^2 + p_E^2/2}{(mc)^2}\right).$$

Такое же выражение следует из последнего уравнения системы (27) при исключении «большого» быстро осциллирующего члена. Отметим, что в отличие от случая волны круговой поляризации в быстро осциллирующих членах в (30) содержатся колебания с удвоенной фазой, амплитуда которых определяется только интенсивностью волны. Как отмечалось выше, эти осциллирующие члены следует считать относительно малыми, так что в первом приближении

$$\frac{1}{\gamma} \approx \frac{1}{\Gamma}\left(1 + \frac{\pi_x p_E \sin\theta + \dfrac{p_E^2}{4}\cos 2\theta}{G\Gamma(mc)^2}\right).$$

Отсюда следует, что, в отличие от случая волны круговой поляризации, поле волны не может быть слишком сильным, пользоваться указанным разложением нельзя и задача существенно усложняется.

Проводя усреднение уравнений (28), (29) с учетом разложений (14), получаем

$$\frac{dP_x}{dt} = -\frac{mc^2}{2\Gamma_0}\left[1 - \frac{1}{2G_0\Gamma_0}\left(\frac{P_E}{2mc}\right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{G_0\Gamma_0}\left(\frac{P_x}{mc}\right)^2\right] \frac{\partial}{\partial X}\frac{1}{2}\left(\frac{P_E}{mc}\right)^2 + \\ + \frac{P_x}{4(\Gamma_0 mc)^2}\frac{\partial P_E^2}{\partial t}, \quad (31)$$

$$\frac{dP_y}{dt} = -\frac{mc^2}{2\Gamma_0}\left[1 - \frac{1}{2G_0\Gamma_0}\left(\frac{P_E}{2mc}\right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{G_0\Gamma_0}\left(\frac{P_x}{mc}\right)^2\right] \frac{\partial}{\partial Y}\frac{1}{2}\left(\frac{P_E}{mc}\right)^2.$$

В этих уравнениях (ср. с выражением (17))

$$\Gamma_0 = \sqrt{1 + \frac{\mathbf{P}^2 + P_E^2/2}{(mc)^2}}.$$

Согласно (31), для линейной поляризации волны, как и в случае волны круговой поляризации, имеется дополнительное малое слагаемое, определяемое временной зависимостью амплитуды волны.

Периодические добавки к сглаженным поперечным компонентам импульса определяются приближенными формулами:

$$g_{1p_x} = \frac{1}{\omega}\frac{\partial P_E}{\partial t}\left[1 - \frac{1}{8G_0\Gamma_0}\left(\frac{P_E}{mc}\right)^2\right]\cos\alpha + \\ + \frac{1}{m\omega G_0}\left[1 - \frac{7}{8G_0\Gamma_0}\left(\frac{P_E}{mc}\right)^2\right]\frac{\partial P_E}{\partial X}P_x\cos\alpha,$$

$$g_{1p_y} = \frac{1}{m\omega G_0}\left[1 - \frac{7}{8G_0\Gamma_0}\left(\frac{P_E}{mc}\right)^2\right]\frac{\partial P_E}{\partial Y}P_x\cos\alpha.$$

В этих формулах не выписаны члены, содержащие удвоенные и утроенные фазы. Из уравнений (27) следует, что релятивистский фактор и продольная составляющая импульса содержат одинаковые быстро осциллирующие составляющие, амплитуда которых пропорциональна напряженности электрического поля волны. Введением замены

$$\pi_z = p_z + \frac{\pi_x p_E \sin\theta}{mcG} + \frac{p_E^2}{4mcG}\cos 2\theta \quad (32)$$

исключаются быстро осциллирующие члены, пропорциональные амплитуде волны. При этом медленно меняющаяся величина π_z удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\pi_z}{dt} = -c\frac{\partial p_E}{\partial x}\sin\theta + \sin\theta\frac{d}{dt}\frac{\pi_x p_E}{mcG} + \\ + \cos 2\theta\frac{d}{dt}\frac{p_E^2}{4mcG} + \frac{\pi_x\sin\theta}{mc\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial z}\right)p_E - \\ - \frac{1}{4mc\omega\gamma}(1-\cos 2\theta)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial z}\right)p_E^2. \quad (33)$$

Отметим, что соотношения (8), (32) являются точным решением задачи о движении частицы в поле плоской линейно поляризованной электромагнитной волны с постоянной амплитудой [1, 2] (при $\pi_x = \pi_z = = \pi_y = 0$).

После ряда преобразований уравнения (33) в результате усреднения получаем

$$\frac{dP_z}{dt} = -\frac{mc^2}{2\Gamma_0}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{P_E}{2G_0 mc}\right)^2 - \left(\frac{P_x}{G_0 mc}\right)^2\right] \times \\ \times \frac{\partial}{\partial Z}\frac{1}{2}\left(\frac{eE}{mc\omega}\right)^2 + \frac{P_x^2 + P_E^2/8}{4(mc)^3\Gamma_0 G_0^2}\frac{\partial P_E^2}{\partial t}. \quad (34)$$

Осциллирующую составляющую продольного импульса g_{1p_z} не выписываем.

Рассмотрим закон движения частицы:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mu\mathbf{g}_{1\mathbf{r}}(t, \mathbf{R}, \mathbf{P}, \alpha).$$

Эволюция ведущего центра описывается уравнениями

$$\frac{dX}{dt} = V_x \equiv \frac{P_x}{m\Gamma_0}\left[1 - \frac{1}{2G_0\Gamma_0}\left(\frac{P_E}{mc}\right)^2\right], \\ \frac{dY}{dt} = V_y = \frac{P_y}{m\Gamma_0}, \quad (35) \\ \frac{dZ}{dt} = V_z \approx \frac{P_z}{m\Gamma_0}.$$

В последней формуле отброшены малые слагаемые. Осциллирующие добавки к ведущему центру частицы определяются приближенными формулами:

$$g_{1x} = -\frac{P_E}{m\omega G_0}\left(1 - \frac{P_x^2 + P_E^2/8}{(mc)^2\Gamma_0 G_0}\right)\cos\alpha - \\ - \frac{3P_x P_E^2}{8m\omega(mcG_0)^2\Gamma_0}\sin 2\alpha, \\ g_{1y} = \frac{P_y P_E}{m\omega(mcG_0)^2\Gamma_0}\left(P_x\cos\alpha - \frac{P_E}{8}\sin 2\alpha\right), \quad (36) \\ g_{1z} = \frac{P_E^2}{8\omega m^2 c\Gamma_0 G_0}\left(1 - \frac{2P_x^2}{(mcG_0)^2}\right)\sin 2\alpha - \\ - \frac{P_x P_E}{\omega m^2 c\Gamma_0 G_0}\cos\alpha.$$

Видно, что осцилляторное смещение частицы вдоль оси y пренебрежимо мало. В плоскости xz первые члены являются основными, а вторые — поправочными. В случае плоской волны линейной поляризации с постоянной амплитудой эти формулы совпадают с точным решением [1, 2] при $P_x = P_z = P_y = 0$. В этом случае, как известно, траекторией частицы является «восьмерка». Слабые возмущения, согласно (36), искажают эту траекторию.

Вводя далее величину

$$\gamma_E = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{eE}{mc\omega}\right)^2},$$

а также усредненные безразмерные скорости, легко получить приближенное соотношение типа (25). Тогда уравнения (31), (34) приобретают вид (при отбрасывании малых слагаемых)

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2}\left[1 - \frac{1}{2G_0\Gamma_0}\left(\frac{P_E}{2mc}\right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{G_0\Gamma_0}\left(\frac{P_x}{mc}\right)^2\right]\nabla m^* c^2. \quad (37)$$

Сравнивая выражения (26) и (37) для пондеромоторной силы, легко видеть, что они в случае волн круговой и линейной поляризаций различаются. Это согласуется с результатом работы [15]. Согласно уравнениям (26) и (37), усредненное воздействие волны на частицу в случае линейной поляризации ослабляется сильнее, чем в случае волны круговой поляризации. При этом сама волна линейной поляризации не должна быть слишком мощной.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены усредненные релятивистские уравнения движения и найдены выражения для осциллирующих компонент вектора импульса и смещения заряженной частицы в поле мощного излучения круговой и линейной поляризаций. Показано, что выражения (26) для компонент релятивистской пондеромоторной силы в случае волны круговой поляризации аналогичны выражениям, полученным в работе [17]. Однако, в отличие от последних, в (26) содержатся дополнительные малые члены, определяемые усредненными поперечными импульсами частицы. Несмотря на малость этих членов, при малых градиентах поля излучения умножение на величину, меньшую единицы, может быть заметным. В проведенных расчетах применялась теория возмущений при достаточно слабых пространственно-временных градиентах амплитуды поля излучения в приближении геометрической оптики. Совпадение с результатами работы [17] и многих других работ (при пренебрежении малыми членами), в которых мощное лазерное излучение рассматривалось в виде гауссовых пучков или импульсов, показывает, что выражения для усредненной силы, действующей на частицу, по-видимому, не зависят от способа описания электромагнитного излучения.

Подчеркнем, что полученные результаты справедливы в случае релятивистски сильного электромагнитного излучения, когда амплитуда осцилляторной скорости частицы в поле излучения сравнима со скоростью света в вакууме. В этом случае параметр $g = eE/mc\omega \approx 1$. В разложениях по методу Боголюбова используется малый параметр $\mu = 1/kL \approx 1/\omega T$, характеризующий достаточно слабое пространственно-временное изменение амплитуд поля излучения. Предполагается также, что в точном выражении для релятивистского фактора быстро осциллирующие члены, определяемые полем излучения, являются достаточно малыми по сравнению с усредненными членами. Обычно эти члены не учитываются, и релятивистский фактор заменяется усредненным выражением. Однако отбрасываемые члены никак не связаны с принятым малым параметром и, как показано в данной работе, приводят к новым результатам.

В работе [15] было показано, что релятивистские пондеромоторные силы в случае линейно поляризованной волны и волны с круговой поляризацией различаются, хотя они определяются, в основном, эффективной массой. В отличие от работы [15], в которой расчеты проводились в системе, движущейся со средней скоростью частицы, в данной работе результаты получены непосредственно в лабораторной системе отсчета. Подтверждено, что выражения для пондеромоторной силы в случае волн круговой и линейной поляризаций различаются достаточно малыми членами. Вместе с тем полученные в данной работе дополнительные малые члены отличаются от полученных в [15]. Возможно, это связано с выбором системы отсчета и использованием другого метода усреднения.

Таким образом, при последовательном применении метода усреднения Боголюбова в выражениях для релятивистской пондеромоторной силы возникают дополнительные малые члены в обоих случаях волн круговой и линейной поляризаций. При этом дополнительные малые члены в случае волн разной поляризации различны. Дополнительные члены более существенны в случае волны линейной поляризации.

Работа (частично) проведена в рамках реализации Федеральной целевой программы «Научные и педагогические кадры инновационной России на 2009–2012 гг.», а также поддержана РФФИ (грант № 13-02-00645).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).
2. Ф. Клеммоу, Дж. Доуэрти, *Электродинамика частиц и плазмы*, Мир, Москва (1996).
3. А. В. Гапонов, М. А. Миллер, ЖЭТФ **34**, 242 (1958).
4. А. И. Морозов, Л. С. Соловьев, в сб. *Вопросы теории плазмы*, под ред. М. А. Леонтовича, Госатомиздат, Москва (1963), вып. 2, с. 177.
5. А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев, в сб. *Вопросы теории плазмы*, под ред. М. А. Леонтовича, Атомиздат, Москва (1973), вып. 7, с. 3.
6. А. Г. Литвак, в сб. *Вопросы теории плазмы*, под ред. М. А. Леонтовича, Атомиздат, Москва (1980), вып. 10, с. 164.
7. T. Kibble, Phys. Rev. **150**, 1060 (1966).
8. E. I. Lindman and M. A. Stroscio, Nucl. Fusion **17**, 619 (1977).
9. В. П. Милантьев, ЖЭТФ **72**, 159 (1977).
10. В. П. Милантьев, *Дрейфовая теория движения заряженных частиц в электромагнитных полях*, Изд-во УДН, Москва (1987).
11. Д. Р. Битук, М. В. Федоров, ЖЭТФ **116**, 1198 (1999).
12. А. А. Кураев, А. К. Синицын, А. В. Щербаков, Радиотехн. и электрон. **44**, 891 (1999).
13. Б. М. Болотовский, А. В. Серов, УФН **173**, 667 (2003).
14. A. L. Galkin, V. V. Korobkin, M. Yu. Romanovsky, and O. B. Shiryaev, Phys. Plasmas **15**, 023104 (2008).
15. В. Д. Таранухин, ЖЭТФ **117**, 511 (2000).
16. D. Bauer, P. Mulser, and W.-H. Steeb, Phys. Rev. Lett. **75**, 4622 (1995).
17. B. Quesnel and P. Mora, Phys. Rev. E **58**, 3719 (1998).

18. G. V. Stupakov and M. S. Zolotarev, Phys. Rev. Lett. **86**, 5274 (2001).

19. I. Y. Dodin, N. J. Fisch, and G. M. Fraiman, Письма в ЖЭТФ **78**, 238 (2003).

20. M. G. Tokman, Plasma Phys. Rep. **25**, 140 (1999).

21. С. Н. Андреев, В. П. Макаров, А. А. Рухадзе, Фотоника **4**, 18 (2010).

22. Н. Б. Нарожный, М. С. Фофанов, ЖЭТФ **117**, 867 (2000).

23. E. S. Sarachik and G. T. Schappert, Phys. Rev. D **1**, 2738 (1970).

24. V. V. Fedorov, S. P. Goreslavsky, and V. S. Letokhov, Phys. Rev. E **55**, 1015 (1997).

25. G. A. Mourou, T. Tajima, and S. V. Bulanov, Rev. Mod. Phys. **78**, 309 (2006).

26. А. Бернштейн, Л. Фридленд, в сб. *Основы физики плазмы*, под ред. А. А. Галеева и Р. Судана, Энергоатомиздат, Москва (1983), т. 1, с. 393.

27. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, *Теория волн*, Наука, Москва (1990).

28. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Наука, Москва (1974).