

# НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ТЕЧЕНИЙ СЖИМАЕМОГО ГАЗА В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ НАД НЕОДНОРОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

К. В. Карельский<sup>a</sup>, А. С. Петросян<sup>a,b,\*</sup>, А. В. Черняк<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Институт космических исследований Российской академии наук  
117997, Москва, Россия*

<sup>b</sup> *Московский физико-технический институт  
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 24 апреля 2012 г.,  
после переработки 16 октября 2012 г.

Получена система уравнений движения сжимаемого идеального газа в приближении мелкой воды в поле силы тяжести над неоднородной границей. Показано, что классические простые волны не являются решениями системы. Установлено, что обобщенные простые волны существуют только в случае линейного профиля подстилающей поверхности. Для случая границы в виде наклонной плоскости получены все непрерывные и разрывные решения в явном виде, найдено аналитическое решение задачи распада произвольного разрыва. Решение состоит из четырех волновых конфигураций. Для каждой конфигурации найдены необходимые и достаточные условия для реализации.

DOI: 10.7868/S0044451013040174

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является развитием теории нелинейных простых волн в течениях сжимаемой жидкости в поле силы тяжести в приближении мелкой воды [1]. В работе [1] получены все непрерывные и разрывные решения системы уравнений сжимаемой мелкой воды на плоской границе, а также решена задача распада произвольного разрыва (задача Римана). Настоящая работа посвящена изучению нелинейных течений жидкости в поле силы тяжести над произвольной поверхностью, описываемых приближением сжимаемой мелкой воды. В работе получены уравнения сжимаемой мелкой воды для течений над произвольной поверхностью из полных уравнений движения Эйлера сжимаемой жидкости в поле силы тяжести путем усреднения по глубине жидкости [2, 3]. В уравнениях учитывается зависимость давления от плотности (статическая сжимаемость), звуковые волны отсутствуют [4]. Полученное выражение для скорости распространения слабых воз-

мущений существенно отличается от аналогичного уравнения для несжимаемых течений.

В классической теории мелкой воды физическими переменными являются высота свободной поверхности и усредненное по глубине поле горизонтальной скорости. В этой теории уравнение для высоты свободной поверхности играет роль закона сохранения массы, а сама высота свободной поверхности в силу постоянства плотности жидкости во всем объеме является массой столба жидкости. В нашем же случае сжимаемого газа в приближении мелкой воды массой столба газа является произведение высоты свободной поверхности на среднюю по глубине плотность. Как следствие в полученных в работе уравнениях появляется новая переменная, определяющая закон сохранения массы и однозначно связанная с высотой свободной поверхности. Учитывая широкий спектр возможных применений полученных уравнений, мы приводим их подробный вывод. В работе показано, что для случая сжимаемого газа в приближении мелкой воды такое приближение является фундаментальным для геофизической и астрофизической гидродинамики, поскольку позволяет учесть силу Кориолиса и другие внешние силы в крупномасштабных геофизических и астро-

\*E-mail: apetrosy@iki.rssi.ru

физических течениях путем замены внешних сил эффективной неоднородной подстилающей поверхностью, как это уже было сделано при моделировании крупномасштабных атмосферных и океанических течений [5–7].

Новая система нелинейных уравнений, полученная в настоящей работе, существенно отличается от уравнений, изученных в работе [1]. Наличие источников слагаемого в правой части уравнений приводит к тому, что переменные Римана не сохраняют свои значения вдоль характеристик в отличие от случая ровной подстилающей поверхности, и поэтому классические простые волны не реализуются. Как будет показано в работе, несмотря на гиперболичность полученной системы уравнений, нелинейная динамика гидродинамических течений существенно отличается от течений, рассмотренных в работе [1].

Среди различных приложений, в которых крупномасштабные эффекты сжимаемости над сложной подстилающей поверхностью играют важную роль, можно выделить следующие: зарождение завихренности, ее рост и образование вихревого следа в потоке мелкой воды при обтекании изолированного препятствия [8]; затухание фронта давления над препятствием во вращающейся жидкости [9–13]; изучение линейной [14] и нелинейной [15] экваториальной динамики; ступенчатые профили стратификации, наблюдаемые в океанах [16]. Приближение сжимаемой мелкой воды применяется также для моделирования физики планетарных колец [17], для изучения песчаных бурь на Марсе [18], извержений вулканов [19, 20]. Аналогичный подход к учету крупномасштабной сжимаемости важен для изучения магнитогидродинамических течений солнечного тахоклина [21–23], для изучения течений при растекании материи при дисковой аккреции в нейтронных звездах [24, 25], динамики атмосфер нейтронных звезд [26, 27], атмосфер внесолнечных планет [28]. Приближение мелкой воды было успешно применено для исследования нелинейных течений в магнитной гидродинамике [29]; оно играет фундаментальную роль при изучении крупномасштабных процессов в атмосферах планет и океанов [30].

Гиперболичность уравнений сжимаемой мелкой воды определяет, наряду с гладкими, наличие разрывных решений. Даже в случае, когда начальные условия являются гладкими, нелинейный характер уравнений за конечное время может привести к разрывному решению. В данной работе показано, что классические простые волны не являются решениями уравнений сжимаемой мелкой воды над произвольной поверхностью из-за наличия источников

слагаемого в правой части уравнений. Мы используем общее определение простой волны [31], которое сводится к классическому определению в случае отсутствия источников слагаемого. Несмотря на формальную аналогию законов сохранения массы и импульса в нашем случае и в классическом, нелинейная динамика сжимаемых течений существенно меняется вследствие различия выражений для квадрата скорости распространения слабых возмущений.

Получены аналитические решения, которые позволяют однозначно определить высоту свободной поверхности через массу столба жидкости. Установлено, что обобщенные простые волны существуют только для класса задач с подстилающей поверхностью в виде наклонной плоскости. Для такого класса задач в явном виде найдены все непрерывные и разрывные решения. Показано, что характеристиками системы уравнений являются параболы, которые переходят в прямые в случае плоской подстилающей поверхности. Найдено аналитическое решение задачи распада произвольного разрыва (задача Римана) для уравнений сжимаемой мелкой воды над склоном. Решение представляет собой одну из четырех волновых конфигураций: две ударные волны; волна разрежения и ударная волна; две волны разрежения; две волны разрежения и зона вакуума. Получены условия для начальных данных, необходимые и достаточные для реализации каждой конфигурации. Проведен сравнительный анализ полученного решения с решением задачи Римана для сжимаемого газа в приближении мелкой воды над ровной подстилающей поверхностью. Это решение может быть использовано для построения целого класса конечно-объемных численных методов сквозного счета, позволяющих рассчитывать как непрерывные, так и разрывные решения без выделения разрывов [5, 6, 32, 33].

В разд. 2 получена исходная система уравнений движения сжимаемого газа в поле силы тяжести в приближении мелкой воды над произвольной неоднородной границей. В разд. 3 показано, что классические простые волны не являются решениями исходной системы. Определены обобщенные простые волны и найдены все непрерывные решения системы для случая подстилающей поверхности в виде склона. В разд. 4 получены соотношения Ранкина–Гюгонио на разрыве и найдены разрывные решения системы уравнений в виде ударных волн. В разд. 5 сформулирована и решена задача Римана. В Заключении приведены основные результаты работы.

## 2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ СЖИМАЕМОГО ТЯЖЕЛОГО ГАЗА В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ НАД НЕОДНОРОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В данном разделе выведена система уравнений движения сжимаемого газа в приближении мелкой воды в поле силы тяжести над неоднородной границей. Система получается из полных уравнений движения Эйлера сжимаемого идеального газа в поле силы тяжести со свободной верхней границей в гидростатическом приближении путем усреднения по высоте слоя газа. Интегралами по высоте слоя от произведений флуктуации плотности и флуктуации скорости пренебрегается. В таком приближении фильтруются звуковые волны, учитывается зависимость давления от плотности (статическая сжимаемость) [2, 3]. Предложенная система выгодно отличается от классических уравнений мелкой воды для несжимаемой жидкости. В классических уравнениях мелкой воды высота и скорость столба жидкости полностью определяют его взаимодействие с остальным объемом жидкости. В уравнениях для сжимаемой мелкой воды это взаимодействие определяется не только высотой и скоростью, но и средней плотностью столба жидкости. Вследствие этого учет горизонтального импульса в уравнениях происходит более точно, что является фундаментальным преимуществом при применении этих уравнений к атмосферным, океаническим и астрофизическим явлениям.

Заметим, что в классических уравнениях для несжимаемой мелкой воды результирующими переменными являются высота свободной поверхности и усредненное по глубине поле горизонтальной скорости. Уравнение для высоты свободной поверхности в классическом приближении является законом сохранения массы. В нашем же случае, при наличии эффектов крупномасштабной сжимаемости, закон сохранения массы формулируется для переменной, нетривиально зависящей от формы подстилающей поверхности, характерного вертикального масштаба течения и масштаба высот, на котором вариация плотности становится существенной. Как следствие перечисленные физические характеристики течения и форма подстилающей поверхности модифицируют закон сохранения импульса. Таким образом, учет неровной границы существенно изменяет нелинейную динамику сжимаемых течений мелкой воды и не является простым обобщением уравнений на ровной границе. Поэтому ниже мы приводим подробный вывод уравнений для сжимаемой мелкой воды над произвольной границей.

### 2.1. Исходная система уравнений

Рассмотрим слой газа со свободной поверхностью над неоднородной границей. Выберем систему координат таким образом, чтобы ось  $z$  была направлена вдоль вектора силы тяжести в противоположном направлении, ось  $x$  перпендикулярна оси  $z$ . Высоту слоя газа, отсчитываемую от уровня  $z = 0$ , обозначим  $z = h(x, t)$ . Нижняя граница задана функцией  $z = f_s(x)$  (рис. 1). Тогда адиабатическое течение политропного идеального сжимаемого газа будет описываться следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} &= 0, \\ dU &= -pd \left( \frac{1}{\rho} \right), \\ p &= \rho R T, \\ U &= c_v T, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $t$  — время,  $(u, w)$  — компоненты вектора скорости течения,  $p$  — давление газа,  $\rho$  — плотность газа,  $T$  — температура газа,  $U$  — внутренняя энергия газа,  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $c_v$  — теплоемкость газа при постоянном объеме,  $g$  — ускорение свободного падения. Параметры  $R$  и  $c_v$  считаем постоянными.

Первые два уравнения системы (2.1) — это уравнения движения Эйлера сжимаемого идеального газа в проекциях соответственно на оси  $xz$ ; третье — уравнение сохранения массы; четвертое — уравне-

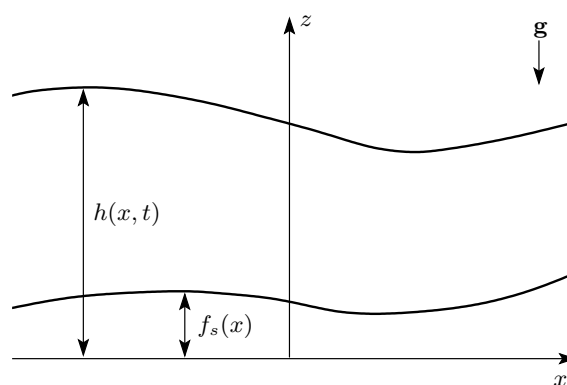


Рис. 1. Слой газа в поле силы тяжести со свободной поверхностью  $z = h(x, t)$  над неоднородной границей  $z = f_s(x)$

ние сохранения внутренней энергии газа при обратимых адиабатических процессах; пятое — уравнение Клапейрона состояния идеального газа; шестое — уравнение внутренней энергии идеального политропного газа.

Граничные условия определим следующим образом:

$$\begin{aligned} w|_{z=h} &= \frac{\partial h}{\partial t} + u|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x}, \\ w|_{z=f_s} &= u|_{z=f_s} \frac{df_s}{dx}, \\ p|_{z=h} &= p_a = \text{const}, \\ T|_{z=h} &= T_h = \text{const}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Первые два уравнения системы (2.2) являются условиями непротекания газа соответственно на свободной границе  $z = h$  и подстилающей поверхности  $z = f_s$  и обозначают обращение в нуль нормальной к поверхностям составляющей скорости газа. Последние два уравнения задают постоянные значения давления и температуры газа на свободной поверхности. Отметим, что если на свободной поверхности хотя бы один из параметров газа  $p, \rho, T$  постоянен, то и остальные два необходимо постоянны вследствие адиабатичности процессов и уравнения Клапейрона. Зная значения давления и температуры на свободной поверхности, при помощи уравнения Клапейрона получим выражение для плотности газа  $\rho|_{z=h}$  на свободной поверхности:

$$\rho_h \equiv \rho|_{z=h} = \frac{p_a}{RT_h} = \text{const}. \quad (2.3)$$

Таким образом, полная система уравнений и граничные условия, описывающие адиабатическое течение слоя сжимаемого идеального политропного газа в поле силы тяжести со свободной поверхностью  $z = h(x, t)$  над неоднородной границей  $z = f_s(x)$  состоят из системы (2.1) и граничных условий (2.2).

### 2.2. Приближение мелкой воды

Основное предположение теории мелкой воды состоит в том, что отношение характерного вертикального масштаба  $h_0$  течения к горизонтальному масштабу  $L$  считается малым (достаточно, чтобы  $h_0/L \leq 0.05$  [7]). В таком случае течение можно считать гидростатическим и уравнение Эйлера в проекции на ось  $z$  запишется в виде

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (2.4)$$

с точностью до слагаемых порядка  $O(h_0/L)$ ,  $h_0/L \rightarrow 0$ .

Система (2.1) в гидростатическом приближении (2.4) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} &= 0, \\ dU &= -pd \left( \frac{1}{\rho} \right), \\ p &= \rho RT, \\ U &= c_v T. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для того чтобы получить приближение мелкой воды для системы уравнений движения идеального сжимаемого газа над неоднородной границей, проведем усреднение уравнений (2.5) по высоте слоя газа с учетом граничных условий (2.2). Разделим систему (2.5) на две подсистемы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g, \\ dU &= -pd \left( \frac{1}{\rho} \right), \\ p &= \rho RT, \\ U &= c_v T. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Система уравнений (2.7) является замкнутой и позволяет определить  $p, \rho, U, T$ . Для этого сначала выразим из последних двух уравнений системы (2.7) температуру  $T$  и внутреннюю энергию  $U$  газа:

$$T = \frac{1}{R} \frac{p}{\rho}, \quad U = \frac{c_v}{R} \frac{p}{\rho}. \quad (2.8)$$

Подставим выражения (2.8) в третье уравнение системы (2.7):

$$\frac{c_v}{R} d \left( \frac{p}{\rho} \right) + pd \left( \frac{1}{\rho} \right) = 0. \quad (2.9)$$

Запишем (2.9) в виде

$$d \left( \ln \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) \right) = 0.$$

Решением этого уравнения является адиабата Пуассона:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_a}{\rho_h^\gamma} = \text{const}, \quad (2.10)$$

где  $\gamma = \text{const}$  — показатель адиабаты. Система уравнений (2.7), таким образом, свелась к двум уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g, \\ \frac{p}{\rho^\gamma} &= \frac{p_a}{\rho_h^\gamma}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Найдем из уравнений (2.11) величины  $p$  и  $\rho$ . Для этого выразим  $\rho$  через  $p$  из второго уравнения системы, подставим в первое уравнение и проинтегрируем результат по высоте газа от  $z$  до  $h(x, t)$ , используя граничные условия (2.2):

$$\begin{aligned} p(x, z, t) &= p_a \left[ 1 + \frac{h(x, t) - z}{H_\rho} \right]^{\gamma/(\gamma-1)}, \\ \rho(x, z, t) &= \rho_h \left[ 1 + \frac{h(x, t) - z}{H_\rho} \right]^{1/(\gamma-1)}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где

$$H_\rho = \frac{c_p T_h}{g} = \text{const}, \quad (2.13)$$

$c_p = \text{const}$  — теплоемкость газа при постоянном давлении. Величина  $H_\rho$  называется характерной плотностной высотой и показывает масштаб высот, на котором вариация плотности по высоте становится существенной [4].

Наконец, проведем усреднение уравнений (2.6) по высоте газа от  $z = f_s(x)$  до  $z = h(x, t)$ , используя систему (2.12) и граничные условия (2.2). Перепишем уравнения (2.6) в дивергентном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u w)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Проинтегрируем первое уравнение системы (2.14) по высоте газа:

$$\int_{f_s(x)}^{h(x,t)} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) dz = 0. \quad (2.15)$$

Используем формулу Лейбница, чтобы вынести дифференцирование за пределы интеграла:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{f_s(x)}^{h(x,t)} \xi(x, z, t) dz &= \\ &= \int_{f_s}^h \frac{\partial \xi}{\partial x} dz + \xi|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} - \xi|_{z=f_s} \frac{df_s}{dx}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Проинтегрируем слагаемые в уравнении (2.15):

$$\int_{f_s}^h \frac{\partial \rho}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{f_s}^h \rho dz - \rho|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial t},$$

$$\begin{aligned} \int_{f_s}^h \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \times \\ &\times \int_{f_s}^h (\rho u) dz - (\rho u)|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} + (\rho u)|_{z=f_s} \frac{df_s}{dx}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{f_s}^h \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz &= \rho|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial t} + \\ &+ (\rho u)|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} - (\rho u)|_{z=f_s} \frac{df_s}{dx}. \end{aligned}$$

Здесь были использованы граничные условия (2.2). Суммируя результат, получим усредненное по высоте газа уравнение непрерывности с учетом граничных условий задачи в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{f_s}^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{f_s}^h (\rho u) dz = 0. \quad (2.17)$$

Проинтегрируем теперь по слагаемым второе уравнение системы (2.14) по высоте газа от  $z = f_s(x)$  до  $z = h(x, t)$ , используя формулу Лейбница (2.16) и граничные условия (2.2):

$$\begin{aligned} \int_{f_s}^h \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{f_s}^h (\rho u) dz - (\rho u)|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial t}, \\ \int_{f_s}^h \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{f_s}^h (\rho u^2) dz - \\ &- (\rho u^2)|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} + (\rho u^2)|_{z=f_s} \frac{df_s}{dx}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \int_{f_s}^h \frac{\partial(\rho u w)}{\partial z} dz &= (\rho u)|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial t} + \\ &+ (\rho u^2)|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} - (\rho u^2)|_{z=f_s} \frac{df_s}{dx}. \end{aligned}$$

Таким образом, усредненное уравнение движения газа в проекции на ось  $x$  примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{f_s}^h (\rho u) dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{f_s}^h (\rho u^2) dz + \int_{f_s}^h \frac{\partial p}{\partial x} dz = 0. \quad (2.19)$$

Введем средние по высоте слоя плотность, давление и скорость следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &\equiv \frac{1}{h - f_s} \int_{f_s}^h \rho dz, \\ \bar{p} &\equiv \frac{1}{h - f_s} \int_{f_s}^h p dz, \\ \bar{u} &\equiv \frac{1}{h - f_s} \int_{f_s}^h u dz. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Подставим в эту систему выражения для  $\rho, p$  через  $h$  из (2.12) и проинтегрируем результат:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \frac{1}{h - f_s} \frac{p_a}{g} \left[ \left( 1 + \frac{h - f_s}{H_\rho} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} - 1 \right], \\ \bar{p} &= \frac{p_a}{h - f_s} \frac{H_\rho}{\frac{\gamma}{\gamma-1} + 1} \times \\ &\quad \times \left[ \left( 1 + \frac{h - f_s}{H_\rho} \right)^{\gamma/(\gamma-1)+1} - 1 \right], \\ \bar{u} &\equiv \frac{1}{h - f_s} \int_{f_s}^h u dz. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Представим величины  $\rho, p, u$  через отклонения  $\rho', p', u'$  от своих средних значений:

$$\rho = \bar{\rho} + \rho', \quad p = \bar{p} + p', \quad u = \bar{u} + u'.$$

Легко показать, что выполняются следующие равенства:

$$\int_{f_s}^h \rho' dz = 0, \quad \int_{f_s}^h p' dz = 0, \quad \int_{f_s}^h u' dz = 0. \quad (2.22)$$

Выразим интегралы

$$\int_{f_s}^h (\rho u) dz, \quad \int_{f_s}^h (\rho u^2) dz, \quad \int_{f_s}^h \frac{\partial p}{\partial x} dz$$

через средние значения  $\bar{\rho}, \bar{p}, \bar{u}$ :

$$\begin{aligned} \int_{f_s}^h (\rho u) dz &= \int_{f_s}^h (\bar{\rho} + \rho') (\bar{u} + u') dz = \\ &= \int_{f_s}^h (\bar{\rho} \bar{u} + \bar{\rho} u' + \rho' \bar{u} + \rho' u') dz. \end{aligned}$$

Будем считать, что интеграл по высоте газа от произведения отклонений плотности и скорости от своих средних величин пренебрежимо мал:

$$\int_{f_s}^h (\rho' u') dz = 0.$$

Тогда с учетом (2.22) получим

$$\int_{f_s}^h (\rho u) dz = (h - f_s) \bar{\rho} \bar{u}. \quad (2.23)$$

Аналогично рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \int_{f_s}^h (\rho u^2) dz &= \int_{f_s}^h (\bar{\rho} \bar{u}^2 + 2\bar{\rho} \bar{u} u' + \bar{\rho} u'^2 + \rho' \bar{u}^2 + \\ &\quad + 2\rho' \bar{u} u' + \rho' u'^2) dz. \end{aligned}$$

Будем также считать, что следующий интеграл пренебрежимо мал:

$$\int_{f_s}^h (\bar{\rho} u'^2 + 2\bar{\rho} \rho' u' + \rho' u'^2) dz = 0.$$

Тогда с учетом (2.22) получим

$$\int_{f_s}^h (\rho u^2) dz = (h - f_s) \bar{\rho} \bar{u}^2. \quad (2.24)$$

Наконец,

$$\int_{f_s}^h \frac{\partial p}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{f_s}^h p dz - p_a \frac{\partial h}{\partial x} + p|_{z=f_s} \frac{df_s}{dx}.$$

Подставив в последнее выражение значение  $p$  из системы (2.21), получим

$$\begin{aligned} \int_{f_s}^h \frac{\partial p}{\partial x} dz &= p_a \left[ \left( 1 + \frac{h - f_s}{H_\rho} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} - 1 \right] \frac{\partial h}{\partial x} = \\ &= \bar{\rho} (h - f_s) g \frac{\partial h}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Подставим полученные результаты (2.23)–(2.25) в уравнения (2.17), (2.19) и окончательно получим усредненную по высоте газа систему уравнений (2.14):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} ((h - f_s) \bar{\rho}) + \frac{\partial}{\partial x} ((h - f_s) \bar{\rho} \bar{u}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} ((h - f_s) \bar{\rho} \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x} ((h - f_s) \bar{\rho} \bar{u}^2) + \\ &\quad + (h - f_s) \bar{\rho} g \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Введем обозначение

$$l \equiv (h - f_s)\bar{\rho} = \frac{p_a}{g} \left[ \left( 1 + \frac{h - f_s}{H_\rho} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} - 1 \right]. \quad (2.27)$$

Вычтем из второго уравнения системы (2.26) первое уравнение, помноженное на  $\bar{u}$ , и разделим результат на  $l$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial t} + l \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial l}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Выразим  $\partial h/\partial x$  через  $l$  и  $f_s$ , используя (2.21):

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{a^2}{l} \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{df_s}{dx}, \quad (2.29)$$

где

$$a^2 = \frac{l}{\rho_h} \left( l \frac{g}{p_a} + 1 \right)^{-1/\gamma}. \quad (2.30)$$

Подставим (2.29) в систему (2.28) и окончательно получим уравнения движения сжимаемого идеального газа на неоднородной границе в приближении мелкой воды:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{l}{u} \right) + \begin{pmatrix} \bar{u} & l \\ g \frac{a^2}{l} & \bar{u} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{l}{u} \right) &= \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -g \frac{df_s}{dx} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Функция  $l(x, t)$ , определенная в (2.27), является произведением высоты  $h - f_s$  слоя газа и средней плотности  $\bar{\rho}$ . Можно проверить, что  $l$  монотонно возрастает по  $h - f_s$  и что  $l|_{h-f_s=0}=0$ . От приближения сжимаемой мелкой воды над ровной подстилающей поверхностью данное приближение отличается наличием неоднородности  $-gdf_s/dx$  в правой части системы (2.31).

Запишем систему (2.31) в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{l}{u} \right) + \begin{pmatrix} u & l \\ a^2/l & u \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{l}{u} \right) &= \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{df_s}{dx} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

где

$$\begin{aligned} l &\equiv \frac{1}{AB} \left[ (1 + (h - f_s)B)^A - 1 \right], \\ a(l) &\equiv \sqrt{l(1 + lAB)^{(1-A)/A}}, \\ A &= \frac{\gamma}{\gamma - 1}, \quad B = \frac{h_0}{H_\rho}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

а за характерные параметры задачи приняты характерная высота слоя  $h_0$ , характерное время  $\sqrt{h_0/g}$ , характерная скорость  $\sqrt{gh_0}$ , характерная плотность  $\rho_h$ , определенная в (2.3). Здесь и далее все переменные предполагаются безразмерными, а знак среднего над ними не указывается.

Величина  $H_\rho$  определяется в (2.13) и характеризует масштаб высоты, на котором становятся существенными изменения плотности. Если характерная высота  $h_0$  слоя много меньше характерной высоты  $H_\rho$ , то  $B = h_0/H_\rho \rightarrow 0$  и данное течение можно считать несжимаемым [4]. При этом система уравнений мелкой воды для сжимаемого газа (2.32) полностью переходит в классические уравнения мелкой воды для несжимаемой жидкости над неоднородной границей [31, 33]. В случае плоской границы, когда  $f_s(x) = \text{const}$ , система уравнений мелкой воды для сжимаемого газа (2.32) полностью переходит в исследованную систему уравнений для сжимаемой мелкой воды над ровной подстилающей поверхностью [34]. Заметим, что в полученной системе уравнений (2.32) влияние формы подстилающей поверхности проявляется как в коэффициентах полученных уравнений, так и в виде внешней силы в правой части закона сохранения импульса. Этим нелинейная динамика сжимаемых течений на неровной границе существенно отличается от несжимаемого случая, в последнем влияние неоднородности границы присутствует только в законе сохранения импульса в виде внешней силы. Система уравнений (2.32), записанная в переменных  $(u, l)$ , описывает сжимаемые течения тяжелого газа в приближении мелкой воды в физических переменных  $(u, h)$  согласно соотношениям (2.33), которые явным образом связывают высоту свободной поверхности и скорость слабых возмущений свободной поверхности с решением системы (2.32).

Таким образом, показано, что задача исследования течений сжимаемого газа со свободной поверхностью в поле силы тяжести в приближении мелкой воды сводится к анализу квазилинейной системы уравнений (2.32), решения которой однозначно описывают высоту свободной поверхности. Далее в работе мы используем хорошо развитый математический аппарат гиперболических квазилинейных си-

стем уравнений [35] для нахождения явных соотношений, описывающих высоту свободной поверхности и скорости потока течений мелкой воды с учетом крупномасштабной сжимаемости. В следующем разделе найдены непрерывные решения системы (2.32) в виде равноускоренного течения и обобщенных простых волн.

**3. НЕПРЕРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ  
УРАВНЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО  
СЖИМАЕМОГО ГАЗА В ПРИБЛИЖЕНИИ  
МЕЛКОЙ ВОДЫ НАД НЕОДНОРОДНОЙ  
ГРАНИЦЕЙ**

Нелинейная система уравнений (2.32) в обозначениях  $(u, l)$  является гиперболической системой уравнений, в которой квадрат скорости распространения слабых возмущений,  $a^2$  (2.30), нелинейно зависит от переменной  $l$ , в то время как в теории несжимаемой мелкой воды скорость распространения слабых возмущений пропорциональна высоте свободной поверхности. Таким образом, несмотря на формальное сходство гиперболических волн, пространственно-временная динамика течений сжимаемой мелкой воды на неровной границе отличается существенным образом от соответствующих классических уравнений мелкой воды. Поэтому приведенный ниже анализ гиперболической структуры уравнений (2.32) представляет самостоятельный интерес, если принимать во внимание явную нелинейность зависимости квадрата скорости распространения слабых возмущений (2.30). В этом разделе найдены частные непрерывные решения системы (2.32) в виде простых волн. Показано, что в случае произвольной неоднородной подстилающей поверхности классические простые волны Римана не являются решениями уравнений сжимаемой мелкой воды из-за присутствия источников слагаемого  $-df_s/dx$  в правой части уравнений (2.32). Это приводит к тому, что переменные Римана не сохраняют своих значений вдоль характеристик в отличие от случая с ровной подстилающей поверхностью и классические простые волны не реализуются. Введены обобщенные простые волны [31] и показано, что они могут существовать только для класса подстилающих поверхностей в виде наклонной плоскости  $f_s = kx + c$ , где  $k, c = \text{const}$ . Для такого случая получены обобщенные центрированные простые волны.

**3.1. Обобщенные простые волны**

Запишем систему (2.32) в переменных Римана. Найдем левые собственные значения  $\lambda_{1,2}$  и собственные векторы  $e_{1,2}$  матрицы  $\begin{pmatrix} u & l \\ a^2/l & u \end{pmatrix}$ :

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= u \pm a, \\ e_{1,2} &= \left( \pm \frac{a}{l}, 1 \right). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Умножим слева систему (2.32) на собственные векторы  $e_{1,2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (u+a) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a}{l} \left( \frac{\partial l}{\partial t} + (u+a) \frac{\partial l}{\partial x} \right) &= -\frac{df_s}{dx}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (u-a) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{a}{l} \left( \frac{\partial l}{\partial t} + (u-a) \frac{\partial l}{\partial x} \right) &= -\frac{df_s}{dx}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Чтобы привести левую часть системы уравнений (3.2) к дифференциальному виду, внесем  $a/l$  под знак дифференциала. Для этого введем функцию

$$\psi(l) \equiv \int \frac{a}{l} dl, \tag{3.3}$$

которая монотонно возрастает по  $l$ , и  $\psi(0) = 0$ . Из выражения  $d\psi/dl = a/l$  следует, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{a}{l} \frac{\partial l}{\partial t}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{a}{l} \frac{\partial l}{\partial x},$$

и система (3.2) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (u+a) \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + (u+a) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= -\frac{df_s}{dx}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (u-a) \frac{\partial u}{\partial x} - \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + (u-a) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= -\frac{df_s}{dx}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Запишем систему (3.4) через производные вдоль характеристик:

$$\begin{aligned} du + d\psi &= -\frac{df_s}{dx} dt, & \frac{dx}{dt} &= u + a, \\ du - d\psi &= -\frac{df_s}{dx} dt, & \frac{dx}{dt} &= u - a. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Введем переменные Римана

$$r = u + \psi, \quad s = u - \psi. \tag{3.6}$$

Окончательно система уравнений мелкой воды (2.32) может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -\frac{df_s}{dx}, & \frac{dx}{dt} &= u + a, \\ \frac{ds}{dt} &= -\frac{df_s}{dx}, & \frac{dx}{dt} &= u - a. \end{aligned} \tag{3.7}$$



Простой волной в газовой динамике называется такое решение системы (3.7), при котором одна из переменных Римана постоянна во всей области течения [35]. Видно, что таким образом определенная простая волна может существовать только в случае ровной подстилающей поверхности  $f_s = \text{const}$ . Тем не менее для случая произвольной границы возможно ввести обобщенные простые волны как такие решения системы (3.7), при которых одно из уравнений системы тождественно удовлетворяется во всей области течения, а не только вдоль соответствующей характеристики  $dx/dt = u \pm a$  [31]. Нетрудно проверить, что в случае однородной подстилающей поверхности понятие обобщенной простой волны совпадает с классическим понятием простой волны.

Найдем условия, при которых для системы (3.7) существуют обобщенные простые волны. Рассмотрим случай, когда второе уравнение (3.7) выполняется тождественно во всей непрерывной области течения:

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{df_s}{dx}. \tag{3.8}$$

Это возможно, только если  $\partial s/\partial x = 0$ , откуда следует линейность профиля наклонной поверхности:

$$f_s(x) = kx + f_s(0), \tag{3.9}$$

где  $k = \text{const}$  — угловой коэффициент наклона подстилающей поверхности. Таким образом, решения системы (3.7) в виде обобщенных простых волн существуют только для класса задач с линейным профилем подстилающей поверхности (3.9). Поэтому всюду ниже мы ограничим свое рассмотрение равноускоренными течениями. Везде далее под простыми волнами будем понимать обобщенные простые волны. В случае наклонной подстилающей поверхности система (2.32) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} l \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & l \\ \frac{a^2}{l} & u \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} l \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -k \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

или в характеристическом виде

$$dr = -k dt, \quad \frac{dx}{dt} = u + a(l), \tag{3.11}$$

$$ds = -k dt, \quad \frac{dx}{dt} = u - a(l),$$

$$r = u + \psi(l), \quad s = u - \psi(l). \tag{3.12}$$

Заметим, что система уравнений (3.11) с точностью до обозначений совпадает с ранее полученной в работе [31]. Однако эта система не является замкнутой для описания течений тяжелого газа со свободной границей. В ней присутствует отличная от полученной в [31] скорость распространения слабых возмущений, описываемая выражением (2.33). Следует помнить также соотношение, связывающее переменную  $l$  с высотой свободной поверхности  $h$  (2.33). Поэтому система уравнений (3.11) описывает нелинейную динамику, существенно отличающуюся от течений классической мелкой воды на наклонной плоскости.

Выпишем решение системы (3.11) в виде простой  $r$ -волны. Предположим, что второе уравнение системы (3.11) выполняется тождественно во всей непрерывной области течения:

$$\begin{aligned} dr &= -k dt, & \frac{dx}{dt} &= u + a(l), \\ ds &= -k dt. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Проинтегрируем оба уравнения системы (3.13) по времени  $t$  и получим

$$\begin{aligned} r(x(t), t) &= -kt + r(x(0), 0), & \frac{dx}{dt} &= u + a(l), \\ s(t) &= -kt + s_0, & s_0 &= s(0). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Выразим из (3.12) величины  $u$  и  $\psi$ :

$$u = \frac{r + s}{2}, \quad \psi = \frac{r - s}{2}. \tag{3.15}$$

Подставив выражения для  $r, s$  из (3.14) в (3.15), получим

$$\begin{aligned} u &= -kt + \frac{r(x(0), 0) + s_0}{2}, \\ \psi &= \frac{r(x(0), 0) - s_0}{2}, \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\frac{dx}{dt} = u + a(l).$$

Мы видим, что монотонная функция  $\psi(l)$  постоянна вдоль характеристики  $dx/dt = u + a(l)$ , поэтому величины  $l$  и  $a(l)$  также не меняют своего значения вдоль данной характеристики, что позволяет найти траекторию  $x(t)$ . Обозначим величину  $l$ , характерную для данной характеристики, как  $l_x$ . Тогда решение в виде простой  $r$ -волны имеет вид

$$\begin{aligned} r(x(t), t) &= -kt + r(x(0), 0), \\ s(t) &= -kt + s_0, \quad s_0 = s(0), \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$x(t) = -\frac{k}{2} t^2 + \frac{r(x(0), 0) + s_0 + 2a(l_x)}{2} t + x(0).$$

Характеристики  $x(t)$  обобщенной простой волны являются параболами в отличие от случая с ровной подстилающей поверхностью, когда характеристики прямые. Если  $\partial r/\partial x > 0$  в некоторой области  $(x, t)$  простой  $r$ -волны, то  $\partial\psi/\partial x > 0$ , потому что  $\partial\psi/\partial x = \partial r/\partial x$  из уравнений (3.15), (3.17). Из определения  $\psi(l)$  в (3.3) получаем

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial x} = \frac{a}{l} \frac{\partial l}{\partial x}.$$

Значит,  $\partial l/\partial x > 0$ , поскольку  $a/l > 0$ . Окончательно, если  $\partial r/\partial x > 0$ , то высота газа вдоль простой волны увеличивается и мы получаем простую  $r$ -волну уплотнения. Аналогично можно показать, что в случае  $\partial r/\partial x < 0$  мы получим простую  $r$ -волну разрежения, когда высота газа уменьшается вдоль волны. Если  $\partial r/\partial x = 0$ , то высота  $l$  газа постоянна и не зависит от  $x$ .

Проводя аналогичные рассуждения, можно получить решение в виде простой  $s$ -волны, когда первое уравнение системы (3.11) выполняется тождественно во всей непрерывной области течения газа:

$$\begin{aligned} r(t) &= -kt + r_0, \quad r_0 = r(0), \\ s(x(t), t) &= -kt + s(x(0), 0), \\ x(t) &= -\frac{k}{2}t^2 + \frac{r_0 + s(x(0), 0) - 2a(l_x)}{2}t + x(0), \end{aligned} \tag{3.18}$$

где величина  $l_x$  постоянна вдоль каждой характеристики. В этом случае  $\partial\psi/\partial x = -\partial s/\partial x$ , и при  $\partial s/\partial x > 0$  получим простую  $s$ -волну разрежения, высота газа уменьшается вдоль волны. При  $\partial s/\partial x < 0$  получим простую  $s$ -волну уплотнения, высота газа увеличивается вдоль волны. При  $\partial s/\partial x = 0$  высота  $l$  газа не зависит от  $x$ .

### 3.2. Центрированные обобщенные простые волны

Центрированными обобщенными простыми волнами, как и в классическом случае, будем называть обобщенные простые волны, все характеристики которых выходят из одной точки [36]. Центрированная простая  $r$ -волна, выходящая из точки  $(x, t) = (0, 0)$ , задается, согласно (3.17), системой

$$\begin{aligned} r(x(t), t) &= -kt + r(0, 0), \\ x(t) &= -\frac{k}{2}t^2 + \frac{r(0, 0) + s_0 + 2a(l_x)}{2}t, \\ s(t) &= -kt + s_0, \quad s_0 = s(0). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Пусть в точке  $(x, t) = (0, 0)$  значение  $r$  меняется от  $r_1$  до  $r_2$ . Тогда решение системы (3.19) представляет

собой простую волну, ограниченную параболическими характеристиками

$$x_{1,2}(t) = -\frac{k}{2}t^2 + \frac{r_{1,2} + s_0 + 2a(l_{1,2})}{2}t.$$

Аналогично, центрированная простая  $s$ -волна, выходящая из точки  $(x, t) = (0, 0)$ , задается системой

$$\begin{aligned} r(t) &= -kt + r_0, \quad r_0 = r(0), \\ s(x(t), t) &= -kt + s(0, 0), \\ x(t) &= -\frac{k}{2}t^2 + \frac{r_0 + s(0, 0) - 2a(l_x)}{2}t. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Пусть в точке  $(x, t) = (0, 0)$  величина  $s$  меняется от  $s_1$  до  $s_2$ . Тогда решение системы (3.19) представляет собой простую волну, ограниченную параболическими характеристиками

$$x_{1,2}(t) = -\frac{k}{2}t^2 + \frac{r_0 + s_{1,2} - 2a(l_{1,2})}{2}t.$$

### 3.3. Равноускоренное течение

В случае линейного профиля подстилающей поверхности самым простым решением исходной системы (3.10) является равноускоренное течение. Пусть в начальный момент времени  $u(x, 0) = u_0 = \text{const}$ ,  $l(x, 0) = l_0 = \text{const}$ . Тогда решением системы (3.10) является равноускоренное течение с постоянной глубиной:

$$\begin{aligned} l &= l_0 = \text{const}, \\ u(t) &= -kt + u_0. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Таким образом, мы получили частные решения системы уравнений (3.10), которые совместно с соотношениями (2.33) однозначно определяют высоту свободной поверхности и скорость потока для сжимаемого газа над наклонной плоскостью. Как было показано, наклонная плоскость — единственно возможная форма подстилающей поверхности, допускающая решения типа простых волн. Ниже перейдем к нахождению условий на разрывах и определению ударных волн в течениях, описываемых уравнениями мелкой воды для сжимаемого газа над неоднородной подстилающей поверхностью.

### 4. РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СЖИМАЕМОГО ГАЗА В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ НАД НЕОДНОРОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В данном разделе получены соотношения Ранкина–Гюгонио на разрыве для уравнений сжимаемой мелкой воды над неоднородной поверхностью.

Вывод соотношений Ранкина–Гюгонио существенно зависит от выражения для квадрата скорости распространения слабых возмущений, которые в нашем случае отличается от аналогичного для случая несжимаемой мелкой воды, поэтому ниже приводится их подробный вывод. Соотношения получены интегрированием уравнений (2.32) по области  $(x, t)$ , содержащей линию разрыва. Соотношения Ранкина–Гюгонио выполняются для произвольной подстилающей поверхности. Найдены уравнения, описывающие движение ударных волн. Показано, что ударная волна разделяет область течения на два равноускоренных течения (3.21).

#### 4.1. Соотношения Ранкина – Гюгонио на разрыве над неоднородной поверхностью

Чтобы получить соотношения между параметрами газа по обе стороны от разрыва, представим исходную систему (2.32) в дивергентном виде. Для этого умножим первое уравнение системы (2.32) на  $u$  и прибавим ко второму, умноженному на  $l$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial(lu)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial(lu)}{\partial t} + \frac{\partial(lu^2)}{\partial x} + a^2 \frac{\partial l}{\partial x} &= -l \frac{df_s}{dx}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Введем монотонно возрастающую функцию  $\varphi(l)$ :

$$\varphi = \int a^2 dl. \tag{4.2}$$

Тогда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dl} \frac{\partial l}{\partial x} = a^2 \frac{\partial l}{\partial x}$$

и система (4.1) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial(lu)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial(lu)}{\partial t} + \frac{\partial(lu^2 + \varphi)}{\partial x} &= -l \frac{df_s}{dx}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где

$$\varphi(l) = \frac{(1 + lAB)^{1/A} (lB - 1)}{B^2(1 + A)}. \tag{4.4}$$

Заметим, что уравнения системы (4.3) с учетом выражения (4.4) отличаются от аналогичных уравнений, полученных в работе [31]. Проинтегрируем уравнения системы (4.3) по произвольной области  $G$  течения газа в пространстве  $(x, t)$ :

$$\begin{aligned} \iint_G \left( \frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial(lu)}{\partial x} \right) dt dx &= 0, \\ \iint_G \left( \frac{\partial(lu)}{\partial t} + \frac{\partial(lu^2 + \varphi)}{\partial x} \right) dt dx &= \\ &= \iint_G \left( -l \frac{df_s}{dx} \right) dt dx. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Используем теорему Грина

$$\iint_G \left( \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dt dx = \oint_{\partial G} P dx + Q dt = 0,$$

для того чтобы перейти в системе (4.5) от двойного интеграла по области  $G$  к интегралу по замкнутому контуру  $\partial G$ :

$$\begin{aligned} \oint_{\partial G} l dx - lu dt &= 0, \\ \oint_{\partial G} lu dx - (lu^2 + \varphi) dt &= \iint_G \left( -l \frac{df_s}{dx} \right) dt dx. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Система интегральных уравнений (4.6) выполняется для произвольного интегрируемого контура  $\partial G$  и, в частности, для контура, который содержит линию разрыва. Обозначим через  $x_D(t)$  линию разрыва параметров газа,  $D(t) = dx_D/dt$  — скорость разрыва. Предполагаем, что линия разрыва обладает непрерывной касательной и параметры газа терпят разрыв только на этой линии. Также предполагается, что разрыв параметров имеет конечную величину. Введем обозначения параметров газа по обе стороны разрыва:

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \lim_{x \rightarrow x_D(t) - 0} u(x, t), \\ u_2(x, t) &= \lim_{x \rightarrow x_D(t) + 0} u(x, t), \\ l_1(x, t) &= \lim_{x \rightarrow x_D(t) - 0} l(x, t), \\ l_2(x, t) &= \lim_{x \rightarrow x_D(t) + 0} l(x, t). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Выберем контур  $\partial G = ABB_1A_1$  таким образом, чтобы  $AB$  и  $A_1B_1$  бесконечно близко примыкали к линии разрыва  $x_D(t)$  соответственно слева и справа от нее (рис. 2). Линия разрыва задается уравнением  $dx_D = D dt$ . Тогда систему (4.6) можно переписать в виде

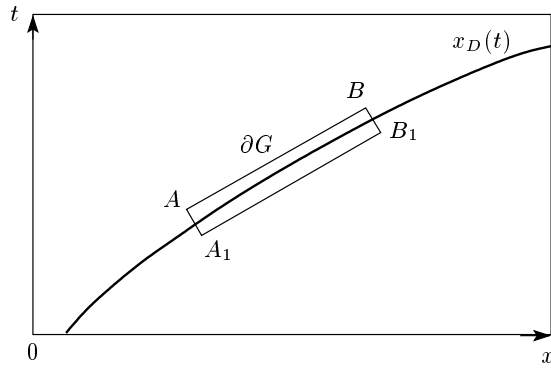


Рис. 2. Линия разрыва, окруженная контуром  $ABB_1A_1$ , с бесконечно близко примыкающими к разрыву сторонами  $AB$  и  $A_1B_1$

$$\begin{aligned}
 & \int_A^B (Dl - lu) dt + \int_B^{B_1} (Dl - lu) dt + \\
 & + \int_{B_1}^{A_1} (Dl - lu) dt + \\
 & + \int_{A_1}^A (Dl - lu) dt = 0, \\
 & \int_A^B (Dlu - (lu^2 + \varphi)) dt + \\
 & + \int_B^{B_1} (Dlu - (lu^2 + \varphi)) dt + \\
 & + \int_{B_1}^{A_1} (Dlu - (lu^2 + \varphi)) dt + \\
 & + \int_{A_1}^A (Dlu - (lu^2 + \varphi)) dt = \\
 & = \iint_G \left( -l \frac{df_s}{dx} \right) dt dx.
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Устремим  $AA_1 \rightarrow 0$  и  $BB_1 \rightarrow 0$ . Разрыв параметров газа имеет конечную величину, подынтегральные выражения  $Dl - lu$  и  $Dlu - (lu^2 + \varphi)$  в интегралах  $\int_A^{A_1} (\dots) dt$  и  $\int_B^{B_1} (\dots) dt$  ограничены, и функция  $-ldf_s/dx$  во всей области  $G$  ограничена. Поэтому при стремлении пределов интегрирования друг к другу, интегралы  $\int_A^{A_1} (\dots) dt$ ,  $\int_B^{B_1} (\dots) dt$  и  $\iint_G (-ldf_s/dx) dt dx$  стремятся к нулю:

$$\begin{aligned}
 & \int_A^B (Dl - lu) dt = \int_{A_1}^{B_1} (Dl - lu) dt, \\
 & \int_A^B (Dlu - (lu^2 + \varphi)) dt = \\
 & = \int_{A_1}^{B_1} (Dlu - (lu^2 + \varphi)) dt.
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Контур  $ABB_1A_1$  был выбран произвольным образом, поэтому равенство интегралов в системе (4.9) означает равенство подынтегральных выражений,

$$\begin{aligned}
 & D(l_2 - l_1) = l_2u_2 - l_1u_1, \\
 & D(l_2u_2 - l_1u_1) = l_2u_2^2 - l_1u_1^2 + \varphi(l_2) - \varphi(l_1),
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

где  $u_i(x, t)$  и  $l_i(x, t)$  — значения параметров газа по разные стороны от разрыва, определенные в (4.7).

Соотношения (4.10) называются соотношениями Ранкина–Гюгонио. Для удобства выразим  $D$  из первого уравнения системы (4.10) и подставим во второе:

$$\begin{aligned}
 & D = \frac{l_2u_2 - l_1u_1}{l_2 - l_1}, \\
 & (u_1 - u_2)^2 = \frac{(\varphi(l_2) - \varphi(l_1))(l_2 - l_1)}{l_2l_1}.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Соотношения Ранкина–Гюгонио (4.11) позволяют описать ударные волны.

### 4.2. Ударные волны

Рассмотрим разрыв  $x_D(t)$ , который распространяется по газу и разделяет два равноускоренных течения (3.21):

$$\begin{aligned}
 & l_{1,2} = \text{const}, \\
 & u_{1,2}(t) = -kt + u_{1,2}(0).
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Будем полагать, что разрыв распространяется по газу с параметрами  $u_1, l_1$ , оставляя после себя газ с параметрами  $u_2, l_2$ . Ударной волной называется устойчивый разрыв параметров газа, через который происходит течение газа,  $u_1(t) \neq u_2(t)$ . Условие устойчивости разрыва формулируется теоремой Цемплена [3]: разрыв устойчив тогда и только тогда, когда скорость ударной волны является сверхзвуковой относительно газа перед волной и дозвуковой относительно газа за волной:

$$\begin{aligned}
 & |D(t) - u_1(t)| > a(l_1), \\
 & |D(t) - u_2(t)| < a(l_2).
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Из теоремы Цемплена следует, что в нормальном газе устойчивы только скачки уплотнения, когда высота газа за ударной волной растет,  $l_2 > l_1$  [3]. На разрыве выполняются соотношения Ранкина–Гюгонио (4.11). Выразим скорость газа  $u_2$  за разрывом из второго уравнения (4.11). Для этого определим знак выражения  $u_2 - u_1$ . Покажем, что

$$\text{sign}(u_2 - u_1) = \text{sign}(D - u_1) = \text{sign}(D - u_2). \quad (4.14)$$

Выразим  $D - u_1$  из первого уравнения системы (4.11):

$$D - u_1 = \frac{l_2(u_2 - u_1)}{l_2 - l_1}.$$

С учетом того, что  $l_2 > l_1$ , получим

$$\text{sign}(u_2 - u_1) = \text{sign}(D - u_1).$$

Аналогично, выразим  $D - u_2$  из первого уравнения (4.11):

$$D - u_2 = \frac{l_1(u_2 - u_1)}{l_2 - l_1},$$

откуда получим

$$\text{sign}(u_2 - u_1) = \text{sign}(D - u_2).$$

Ударная волна, которая распространяется по газу и разделяет два равноускоренных течения  $u_1, l_1$  и  $u_2, l_2$  так, что газ с параметрами 2 остается позади волны, задается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} D &= \frac{l_2 u_2 - l_1 u_1}{l_2 - l_1}, \\ u_2 &= u_1 + \text{sign}(D - u_1) \times \\ &\times \sqrt{[\varphi(l_2) - \varphi(l_1)] \left( \frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2} \right)}, \\ l_2 &\geq l_1. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Чтобы определить траекторию ударной волны  $x_D(t)$ , подставим (4.12) в первое уравнение системы (4.15):

$$\frac{dx_D}{dt} = D = -kt + \frac{l_2 u_2(0) - l_1 u_1(0)}{l_2 - l_1}. \quad (4.16)$$

Проинтегрируем результат по времени и получим, что ударные волны распространяются по параболам, старший коэффициент  $-k/2$  которых совпадает со старшим коэффициентом парабол, описывающих траектории характеристик в простых волнах (3.19) и (3.20):

$$x_D(t) = -\frac{k}{2}t^2 + \frac{l_2 u_2(0) - l_1 u_1(0)}{l_2 - l_1}t + x_D(0). \quad (4.17)$$

Таким образом, получены разрывные решения сжимаемого газа со свободной поверхностью в поле силы тяжести в приближении мелкой воды над наклонной плоскостью. Нелинейная динамика сильных разрывов отличается от случая классической несжимаемой мелкой воды вследствие различия выражений для квадрата скорости распространения слабых возмущений. Так же как и в случае непрерывных решений, полученные разрывные решения однозначно определяют физическое решение для высоты  $h$  свободной поверхности. Найденные в разд. 3 и 4 непрерывные и разрывные решения исходной системы уравнений (3.10) позволяют нам перейти к постановке и решению задачи распада произвольного разрыва.

### 5. ЗАДАЧА РАСПАДА ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗРЫВА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СЖИМАЕМОГО ГАЗА В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ НАД СКЛОНОМ

В данном разделе сформулирована задача распада произвольного разрыва и выписано ее решение в явном виде. Как хорошо известно, решение задачи произвольного разрыва состоит из перечисления возможных конфигураций гиперболических волн, полученных выше, и нахождения начальных условий для их реализации. Как было показано выше, частные решения в нашем случае отличаются от аналогичных для несжимаемой мелкой воды. По той же самой причине будут отличаться и условия реализации каждой конфигурации. Поэтому ниже мы приводим полный вывод решения задачи распада произвольного разрыва. Показано, что решение задачи состоит из четырех различных конфигураций, непрерывно зависящих от начальных условий. Это решение является основой для построения конечно-объемных численных методов расчета непрерывных и разрывных решений без выделения разрывов.

#### 5.1. Постановка задачи распада произвольного разрыва

Рассматривается течение газа, определяемое системой уравнений (2.32) с кусочно-постоянными начальными условиями при  $t = 0$  для левого  $x < 0$  и правого  $x > 0$  полупространств (разрыв начальных параметров газа):

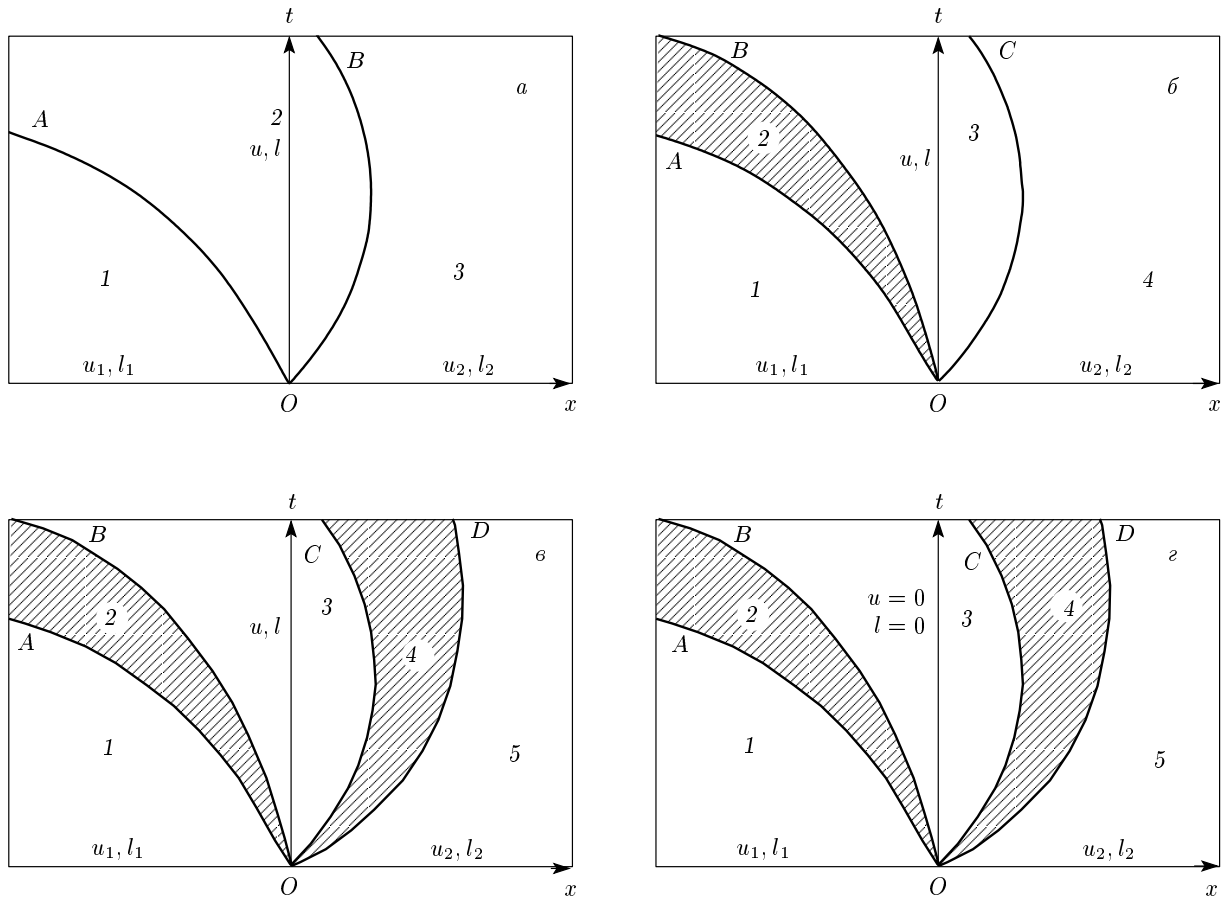


Рис. 3. а) Две ударные волны; б) волна разрежения, обращенная назад, правая ударная волна; в) две волны разрежения; г) две волны разрежения, зона вакуума

$$\begin{aligned}
 u(x, 0) &= u_{1,0} = \text{const}, & l(x, 0) &= l_{1,0} = \text{const}, & x < 0, \\
 u(x, 0) &= u_{2,0} = \text{const}, & l(x, 0) &= l_{2,0} = \text{const}, & x > 0, \\
 r_{1,0} &= u_{1,0} + \psi(l_{1,0}), & s_{1,0} &= u_{1,0} - \psi(l_{1,0}).
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

Требуется определить движение газа при  $t > 0$ . Не теряя общности, будем считать, что  $l_{1,0} > l_{2,0}$  и  $k > 0$ .

Как будет показано ниже, в зависимости от начальных условий (5.1) решение принадлежит одной из четырех возможных конфигураций на плоскости  $(x, t)$ :

конфигурация «две ударные волны» (рис. 3а);

конфигурация «волна разрежения–ударная волна» (рис. 3б);

конфигурация «две волны разрежения» (рис. 3в);

конфигурация «две волны разрежения, зона вакуума» (рис. 3г).

Других конфигураций быть не может, потому что, как следует из теоремы Цемплена, в одну сторону в газе не может распространяться больше одной ударной волны или центрированной простой волны. Единственность решения задачи распада разрыва предполагается. Решение задачи будем проводить следующим образом: рассмотрим каждую из перечисленных конфигураций и найдем условия для начальных параметров, при которых она реализуется. Покажем, что при непрерывном изменении начальных условий задачи решение непрерывно переходит от одной конфигурации к другой.

### 5.2. Конфигурация «две ударные волны»

В данной конфигурации область течения газа на плоскости  $(x, t)$  разбивается двумя ударными волнами  $OA$  и  $OB$  на три области 1–3 равноускоренного

течения (рис. 3а). Течение газа с параметрами  $u_i, l_i$  в областях 1 и 3 определяется начальными условиями (5.1) и описывается уравнениями

$$\begin{aligned} l_{1,2} &= l_{10,20}, \\ u_{1,2}(t) &= -kt + u_{10,20}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Параметры  $u(t), l$  равноускоренного течения газа в области 2 определяются по ходу решения. Траектории ударных волн  $OA$  и  $OB$ , согласно (4.17), являются параболами и задаются соответственно уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = D_1(t), \quad \frac{dx}{dt} = D_2(t),$$

где  $D_1, D_2$  — скорости распространения ударных волн.

Данная конфигурация реализуется, если существует равноускоренное течение газа в области 2 с параметрами  $u(t)$  и  $l$ , которое удовлетворяет соотношениям (4.15) на ударных волнах  $OA$  и  $OB$ . Определим параметры  $u(t), l$  течения газа и условия, при которых оно реализуется.

Ударная волна  $OA$  распространяется в газе с параметрами  $u_1, l_1$  и описывается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} D_1(t) &= u(t) + \frac{l_1 [u(t) - u_1(t)]}{l - l_1}, \\ u(t) &= u_L(t, l) = u_1(t) - \\ &\quad - \sqrt{[\varphi(l) - \varphi(l_1)] \left( \frac{1}{l_1} - \frac{1}{l} \right)}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$l_1 \leq l,$$

где  $u_L(t, l)$  — скорость газа в области 2 за ударной волной  $OA$ , а  $l$  выступает в качестве параметра. Ударная волна  $OB$  распространяется в газе с параметрами  $u_2, l_2$  и описывается уравнениями

$$\begin{aligned} D_2(t) &= u(t) + \frac{l_2 [u(t) - u_2(t)]}{l - l_2}, \\ u(t) &= u_R(t, l) = u_2(t) + \\ &\quad + \sqrt{[\varphi(l) - \varphi(l_2)] \left( \frac{1}{l_2} - \frac{1}{l} \right)}, \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$l \geq l_2,$$

где  $u_R(t, l)$  — скорость газа в области 2 за ударной волной  $OB$ , а  $l$  выступает в качестве параметра.

Объединяя системы (5.3) и (5.4), получим, что данная конфигурация реализуется, если существует равноускоренное течение газа с параметрами  $u(t), l$ , которое удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} l &\geq l_1 \geq l_2, \\ u(t) &= u_L(t, l) = u_R(t, l), \end{aligned} \tag{5.5}$$

где  $u(t), l$  — искомые величины. Параметры  $u, u_L, u_R$  описывают равноускоренное течение газа в области 2 и задаются уравнениями (3.21). Поэтому систему (5.5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} l &\geq l_1 \geq l_2, \\ u(0) &= u_L(0, l) = u_R(0, l). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Найдем условие совместности системы (5.6). Покажем, что функция  $u_L(0, l)$  монотонно неограниченно убывает по  $l$  при  $l \geq l_1$ , а функция  $u_R(0, l)$  монотонно неограниченно возрастает по  $l$  при  $l \geq l_2$ . Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$F_1(l) = [\varphi(l) - \varphi(l_1)] \left( \frac{1}{l_1} - \frac{1}{l} \right)$$

и покажем, что она неограниченно монотонно возрастает по  $l$  при  $l \geq l_1$ . Вычислим

$$\frac{dF_1}{dl} = \frac{d\varphi}{dl} \left( \frac{1}{l_1} - \frac{1}{l} \right) + [\varphi(l) - \varphi(l_1)] \frac{1}{l^2}.$$

Исходя из определения (4.2) функции  $\varphi$ , при  $l \geq l_1$  получим, что  $dF_1/dl > 0$  и, значит,  $\sqrt{F_1(l)}$  монотонно неограниченно возрастает. Тогда  $u_L(0, l) = u_{1,0} - \sqrt{F_1(l)}$  монотонно неограниченно убывает по  $l$  при  $l \geq l_1$ . Аналогично можно получить, что вспомогательная функция

$$F_2(l) = [\varphi(l) - \varphi(l_2)] \left( \frac{1}{l_2} - \frac{1}{l} \right),$$

а значит, и величина  $u_R(0, l) = u_{2,0} + \sqrt{F_2(l)}$  монотонно неограниченно возрастает по  $l$  при  $l \geq l_2$ .

Из того, что функции  $u_L(0, l), u_R(0, l)$  при  $l \geq l_1 \geq l_2$  монотонны и  $u_L(0, l)$  неограниченно убывает, а  $u_R(0, l)$  неограниченно возрастает, следует, что для совместности системы (5.6) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$u_L(0, l_1) \geq u_R(0, l_1). \tag{5.7}$$

По этой же причине следует и единственность решения. Подставим  $u_L$  и  $u_R$  из (5.3), (5.4) в неравенство (5.7) и получим условие реализации конфигурации «две ударные волны»:

$$u_{1,0} - u_{2,0} \geq \sqrt{[\varphi(l_{1,0}) - \varphi(l_{2,0})] \left( \frac{1}{l_{2,0}} - \frac{1}{l_{1,0}} \right)}. \tag{5.8}$$

В случае, когда в (5.8) выполняется равенство, ударная волна  $OA$  вырождается в ударную волну нулевой интенсивности. Отметим, что если выполняется неравенство (5.8), то решение системы (5.6) существует и единственно и данная конфигурация действительно реализуется.

**5.3. Конфигурация «волна разрежения–ударная волна»**

В данной конфигурации область течения газа на плоскости  $(x, t)$  разбивается центрированной простой  $s$ -волной разрежения  $AOB$  и ударной волной  $OC$  на четыре области (рис. 3б). Области 1, 3 и 4 являются областями равноускоренного течения и описываются уравнениями (3.21). Параметры  $u_i, l_i$  течения газа в областях 1 и 4 определяются начальными условиями (5.1). Параметры  $u(t), l$  в области 3 определяются по ходу решения. Параболы  $OA$  и  $OB$  являются крайними характеристиками центрированной простой  $s$ -волны разрежения (3.20) и задаются уравнениями

$$\begin{aligned} x_{OA}(t) &= -\frac{k}{2}t^2 + \frac{r_{1,0} + s_{1,0} - 2a(l_{1,0})}{2}t, \\ x_{OB}(t) &= -\frac{k}{2}t^2 + \frac{r_0 + s_0 - 2a(l)}{2}t, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где  $r_0 = u(0) + \psi(l), s_0 = u(0) - \psi(l)$ . Траектория ударной волны  $OC$  задается уравнением

$$x_{OC}(t) = -\frac{k}{2}t^2 + \frac{l_{2,0}u_{2,0} - lu(0)}{l_{2,0} - l}t. \quad (5.10)$$

Конфигурация «волна разрежения–ударная волна» реализуется, если существуют такие параметры  $u(t), l$  равноускоренного течения газа в области 3, которые соответствуют параметрам газа за характеристикой  $OB$  (3.20) и соотношениям (4.15) на ударной волне  $OC$ . Определим параметры течения газа  $u(t), l$  и условия, при которых они реализуются.

Простая  $s$ -волна  $AOB$  является волной разрежения, внутри которой происходит уменьшение высоты газа,  $l_{1,0} \geq l$ , и выполняются соотношения

$$r(t) = -kt + r_0 = u_1(t) + \psi(l_{1,0}) = u(t) + \psi(l).$$

Таким образом, на характеристике  $OB$  должны быть выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} l_{1,0} &\geq l, \\ u(t) &= u_L(t, l) = u_1(t) + \psi(l_{1,0}) - \psi(l), \end{aligned} \quad (5.11)$$

где  $u_L(t, l)$  — скорость газа в области 3 за характеристикой  $OB$ , а  $l$  выступает в качестве параметра.

Ударная волна  $OC$  распространяется в газе с параметрами  $u_2, l_2$  и описывается уравнениями

$$\begin{aligned} D(t) &= u(t) + \frac{l_{2,0}[u(t) - u_2(t)]}{l - l_{2,0}}, \\ u(t) &= u_R(t, l) = u_2(t) + \\ &+ \sqrt{[\varphi(l) - \varphi(l_{2,0})] \left( \frac{1}{l_{2,0}} - \frac{1}{l} \right)}, \\ l &\geq l_{2,0}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

где  $u_R(t, l)$  — скорость газа в области 3 за разрывом  $OC$ , а  $l$  выступает в качестве параметра.

Объединяя соотношения (5.11) и (5.12), получим, что для реализации данной конфигурации необходимо существование решения системы:

$$\begin{aligned} l_{2,0} &\leq l \leq l_{1,0}, \\ u(t) &= u_L(t, l) = u_R(t, l), \end{aligned} \quad (5.13)$$

где  $u(t), l$  — искомые величины. Параметры  $u, u_L, u_R$  описывают равноускоренное течение (3.21), и поэтому систему (5.13) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} l_{2,0} &\leq l \leq l_{1,0}, \\ u(0) &= u_L(0, l) = u_R(0, l). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Найдем условие совместности системы (5.14). Функция  $u_L(0, l)$  неограниченно монотонно убывает по  $l$ , потому что функция  $-\psi(l)$  неограниченно монотонно убывает по  $l$ . Функция  $u_R(0, l)$  неограниченно монотонно возрастает по  $l$ , как было показано в разд. 5.2. Значит, для совместности системы (5.13) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\begin{aligned} u_L(0, l_{2,0}) &\geq u_R(0, l_{2,0}), \\ u_L(0, l_{1,0}) &\leq u_R(0, l_{1,0}). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Единственность решения  $u(t), l$  при этом следует из монотонности функций  $u_L$  и  $u_R$ . Подставим в систему (5.15) выражения для  $u_L$  и  $u_R$  из (5.11), (5.12) и получим условие реализации конфигурации «волна разрежения–ударная волна»:

$$\begin{aligned} -[\psi(l_{1,0}) - \psi(l_{2,0})] &\leq u_{1,0} - u_{2,0} \leq \\ &\leq \sqrt{[\varphi(l_{1,0}) - \varphi(l_{2,0})] \left( \frac{1}{l_{2,0}} - \frac{1}{l_{1,0}} \right)}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

В случае, когда выполняется первое равенство в выражении (5.16), происходит вырождение ударной волны  $OC$  в волну нулевой интенсивности. Если же выполняется второе равенство, то вырождается простая  $s$ -волна разрежения  $AOB$ . Отметим, что если выполняются неравенства (5.16), то решение системы (5.13) существует и единственно и данная конфигурация действительно реализуется.



**5.4. Конфигурация «две волны разрежения»**

Данная конфигурация состоит из пяти областей 1–5 на плоскости  $(x, t)$ , разделенных между собой центрированными простыми волнами разрежения  $AOB$  и  $COD$  (рис. 3в). В областях 1, 3, 5 происходит равноускоренное течение, которое описывается уравнениями (3.21). Параметры течения газа  $u_i, l_i$  в областях 1 и 5 определяются начальными условиями (5.1). Параметры  $u(t), l$  в области 3 определяются по ходу решения. Параболы  $OA$  и  $OB$  являются крайними характеристиками центрированной простой  $s$ -волны разрежения (3.20) и задаются уравнениями

$$\begin{aligned} x_{OA}(t) &= -\frac{k}{2}t^2 + \frac{r_{1,0} + s_{1,0} - 2a(l_{1,0})}{2}t, \\ x_{OB}(t) &= -\frac{k}{2}t^2 + \frac{r_0 + s_0 - 2a(l)}{2}t, \end{aligned} \tag{5.17}$$

где  $r_0 = u(0) + \psi(l), s_0 = u(0) - \psi(l)$ . Параболы  $OC$  и  $OD$  являются крайними характеристиками центрированной простой  $r$ -волны разрежения (3.19) и задаются уравнениями

$$\begin{aligned} x_{OC}(t) &= -\frac{k}{2}t^2 + \frac{r_0 + s_0 + 2a(l)}{2}t, \\ x_{OD}(t) &= -\frac{k}{2}t^2 + \frac{r_{2,0} + s_{2,0} + 2a(l_{2,0})}{2}t. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Данная конфигурация реализуется, если существуют параметры  $u(t), l$  равноускоренного течения в области 3, которые удовлетворяют соответствующим условиям на характеристиках  $OB$  и  $OC$ . Определим параметры течения газа  $u(t), l$  и условия, при которых оно реализуется.

Внутри простой  $s$ -волны разрежения  $AOB$  происходит уменьшение высоты газа,  $l_{1,0} \geq l$ . Кроме того, внутри волны выполняются соотношения

$$r(t) = -kt + r_0 = u_1(t) + \psi(l_{1,0}) = u(t) + \psi(l).$$

Таким образом, на характеристике  $OB$  должны выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned} l_{1,0} &\geq l, \\ u(t) &= u_L(t, l) = u_1(t) + \psi(l_{1,0}) - \psi(l), \end{aligned} \tag{5.19}$$

где  $u_L(t, l)$  — скорость газа в области 3 за характеристикой  $OB$ , а  $l$  выступает в качестве параметра. Аналогично, внутри простой  $r$ -волны разрежения  $COD$  происходит уменьшение высоты газа,  $l_{2,0} \geq l$ , и выполняются соотношения

$$s(t) = -kt + s_0 = u_2(t) - \psi(l_{2,0}) = u(t) - \psi(l).$$

Поэтому на характеристике  $OC$  должны выполняться условия

$$\begin{aligned} l_{2,0} &\geq l, \\ u(t) &= u_R(t, l) = u_2(t) - \psi(l_{2,0}) + \psi(l), \end{aligned} \tag{5.20}$$

где  $u_R(t, l)$  — скорость газа в области 3 за характеристикой  $OC$ , а  $l$  выступает в качестве параметра.

Объединяя соотношения (5.19) и (5.20), получим, что для реализации данной конфигурации необходимо существование решения системы:

$$\begin{aligned} 0 &\leq l \leq l_{2,0} \leq l_{1,0}, \\ u(t) &= u_L(t, l) = u_R(t, l), \end{aligned} \tag{5.21}$$

где  $u(t), l$  — искомые величины. Поскольку параметры  $u, u_L, u_R$  описывают равноускоренное течение (3.21), система (5.21) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} 0 &\leq l \leq l_{2,0} \leq l_{1,0}, \\ u(0) &= u_L(0, l) = u_R(0, l). \end{aligned} \tag{5.22}$$

Найдем условие совместности системы (5.22). Функция  $u_L(0, l)$  неограниченно монотонно убывает по  $l$ , а функция  $u_R(0, l)$  неограниченно монотонно возрастает по  $l$ , потому что  $\psi(l)$  неограниченно монотонно возрастает. Поэтому для совместности системы (5.21) необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} u_L(0, 0) &\geq u_R(0, 0), \\ u_L(0, l_{2,0}) &\leq u_R(0, l_{2,0}). \end{aligned} \tag{5.23}$$

Единственность решения  $u(t), l$  при этом следует из монотонности функций  $u_L$  и  $u_R$ . Подставим в систему (5.23) выражения для  $u_L$  и  $u_R$  из (5.19), (5.20) и получим условие реализации конфигурации «две волны разрежения»:

$$\begin{aligned} -[\psi(l_{1,0}) + \psi(l_{2,0})] &\leq u_{1,0} - u_{2,0} \leq \\ &\leq -[\psi(l_{1,0}) - \psi(l_{2,0})]. \end{aligned} \tag{5.24}$$

В случае, когда выполняется первое или второе равенство в выражении (5.24), происходит вырождение волны разрежения соответственно  $AOB$  и  $COD$ . Отметим, что если выполняются соотношения для начальных условий (5.24), то решение системы (5.21) существует и единственно, что гарантирует существование простых  $r$ - и  $s$ -волн  $AOB$  и  $COD$ , и данная конфигурация действительно реализуется.

**5.5. Конфигурация «две волны разрежения, зона вакуума»**

Данная конфигурация состоит из пяти областей 1–5 на плоскости  $(x, t)$ , разделенных между собой центрированными простыми волнами разрежения  $AOB$  и  $COD$  (рис. 3з). В областях 1 и 5 происходит равноускоренное течение, которое описывается уравнениями (3.21). Параметры  $u_i, l_i$  течения газа в этих областях определяются начальными условиями (5.1). Область 3 является зоной вакуума, где  $u = 0, l = 0$ . Параболы  $OA$  и  $OB$  являются крайними характеристиками центрированной простой  $s$ -волны разрежения (3.20) и задаются уравнениями

$$\begin{aligned} x_{OA}(t) &= -\frac{k}{2}t^2 + \frac{r_{1,0} + s_{1,0} - 2a(l_{1,0})}{2}t, \\ x_{OB}(t) &= -\frac{k}{2}t^2 + u_L(0)t, \end{aligned} \tag{5.25}$$

где  $u_L(t)$  — скорость газа на характеристике  $OB$ . Параболы  $OC$  и  $OD$  являются крайними характеристиками центрированной простой  $r$ -волны разрежения (3.19) и задаются уравнениями

$$\begin{aligned} x_{OC}(t) &= -\frac{k}{2}t^2 + u_R(0)t, \\ x_{OD}(t) &= -\frac{k}{2}t^2 + \frac{r_{2,0} + s_{2,0} + 2a(l_{2,0})}{2}t, \end{aligned} \tag{5.26}$$

где  $u_R(t)$  — скорость газа на характеристике  $OC$ .

Данная конфигурация реализуется, если существует такое течение с параметрами  $u_L(t), u_R(t), l = 0$  в области 3, которое удовлетворяют соотношениям (5.25) и (5.26) соответственно на характеристиках  $OB$  и  $OC$ . Найдем параметры  $u_L(t), u_R(t)$  такого течения и условия для его существования.

Внутри простой  $s$ -волны разрежения  $AOB$  происходит уменьшение высоты газа  $l_{1,0}$  до нуля и выполняются соотношения

$$r(t) = -kt + r_0 = u_1(t) + \psi(l_{1,0}) = u_L(t) + \psi(0),$$

откуда получаем, что

$$u_L(t) = u_1(t) + \psi(l_{1,0}). \tag{5.27}$$

Аналогично, внутри простой  $r$ -волны разрежения  $COD$  происходит уменьшение высоты газа  $l_{2,0}$  до нуля и выполняются соотношения

$$s(t) = -kt + s_0 = u_2(t) - \psi(l_{2,0}) = u_R(t) - \psi(0),$$

откуда

$$u_R(t) = u_2(t) - \psi(l_{2,0}). \tag{5.28}$$

Данная конфигурация реализуется, если в области 3 существует зона вакуума, где  $l = 0$ . Для этого необходимо и достаточно, чтобы на обеих волнах разрежения,  $AOB$  и  $BOC$ , высота газа успевала уменьшиться до нуля. Последнее равносильно тому, что характеристика  $OB$  должна находиться левее характеристики  $OC$ ,

$$x_{OB}(t) \leq x_{OC}(t). \tag{5.29}$$

Подставляя в неравенство (5.29) выражения для  $u_L, u_R$  из (5.27), (5.28), получим условие реализации конфигурации «две волны разрежения, зона вакуума»:

$$u_{1,0} - u_{2,0} \leq -[\psi(l_{1,0}) + \psi(l_{2,0})]. \tag{5.30}$$

Если в (5.30) выполняется равенство, то происходит вырождение области вакуума 3. Если выполнены условия (5.30), то существуют волны разрежения  $AOB, COD$  и область вакуума  $BOC$  между ними и данная конфигурация действительно реализуется.

**5.6. Решение задачи Римана**

Объединяя все конфигурации, рассмотренные в разд. 5.2–5.5, получим общее решение задачи Римана для произвольного разрыва начальных параметров газа:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_{1,0} = \text{const}, \\ l(x, 0) &= l_{1,0} = \text{const}, \quad x < 0, \\ u(x, 0) &= u_{2,0} = \text{const}, \\ l(x, 0) &= l_{2,0} = \text{const}, \quad x > 0, \\ l_{1,0} &\geq l_{2,0}. \end{aligned} \tag{5.31}$$

В зависимости от начальных условий (5.31) решениями являются четыре конфигурации.

Конфигурация «две ударные волны» в случае, если

$$u_{1,0} - u_{2,0} \geq \sqrt{[\varphi(l_{1,0}) - \varphi(l_{2,0})] \left( \frac{1}{l_{2,0}} - \frac{1}{l_{1,0}} \right)}.$$

Конфигурация «волна разрежения–ударная волна» для случая

$$\begin{aligned} -[\psi(l_{1,0}) - \psi(l_{2,0})] &\leq u_{1,0} - u_{2,0} \leq \\ &\leq \sqrt{[\varphi(l_{1,0}) - \varphi(l_{2,0})] \left( \frac{1}{l_{2,0}} - \frac{1}{l_{1,0}} \right)}. \end{aligned}$$

Конфигурация «две волны разрежения» в случае, если

$$\begin{aligned} -[\psi(l_{1,0}) + \psi(l_{2,0})] &\leq u_{1,0} - u_{2,0} \leq \\ &\leq -[\psi(l_{1,0}) - \psi(l_{2,0})]. \end{aligned}$$

Конфигурация «две волны разрежения, зона вакуума», когда

$$u_{1,0} - u_{2,0} \leq -[\psi(l_{1,0}) + \psi(l_{2,0})].$$

Найденные четыре конфигурации представляют собой полное аналитическое решение задачи распада произвольного разрыва. Для любых начальных данных существует единственное решение в виде одной из четырех конфигураций. При непрерывном изменении начальных данных происходит непрерывный переход одной конфигурации в другую.

Можно непосредственно убедиться, что полученное решение задачи распада произвольного разрыва для системы уравнений сжимаемого тяжелого газа над наклонной подстилающей поверхностью полностью переходит в решение аналогичной задачи в случае плоской подстилающей поверхности при  $k \rightarrow 0$ , которое было получено в работе [1]. В случае наклонной подстилающей поверхности, когда  $k \rightarrow 0$ , реализуются те же четыре конфигурации, что и в случае плоской подстилающей поверхности. Условия для реализации каждой из конфигураций не изменились, но решения внутри конфигураций качественно отличаются от решений для плоского случая. Вместо областей с однородным течением теперь реализуются области равноускоренного течения. Отсутствуют классические простые волны. Характеристики и ударные волны распространяются по параболическим траекториям. Переменные Римана не сохраняются вдоль характеристик.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получена система уравнений движения сжимаемого газа в приближении мелкой воды в поле силы тяжести над неоднородной границей. Полученная система нетривиальным образом зависит от формы подстилающей поверхности, характерного вертикального масштаба течения и масштаба высот, на котором вариация плотности становится существенной. В отличие от классических уравнений мелкой воды для несжимаемых течений, высота свободной поверхности не является массой столба газа и закон сохранения массы записывается для новой переменной, являющейся произведением высоты свободной поверхности на среднюю плотность газа. Учитывая широкий спектр применений полученных уравнений в геофизической гидродинамике, в астрофизике и физике планет, мы привели их подробный вывод, провели анализ пределов применимости. Вследствие различия выражений для ква-

драта скорости распространения слабых возмущений нелинейная динамика таких течений отличается от динамики классических уравнений несжимаемой мелкой воды, несмотря на формальную аналогию гиперболической структуры обеих моделей.

Показано, что классические простые волны не являются решениями системы. Установлено, что обобщенные простые волны существуют только в случае линейного профиля подстилающей поверхности. Показано, что характеристиками системы уравнений являются параболы, которые переходят в прямые в случае плоской подстилающей поверхности. В явном виде найдены все непрерывные и разрывные решения системы. Получено аналитическое решение задачи распада произвольного разрыва для течений сжимаемого газа в поле силы тяжести в приближении мелкой воды над подстилающей поверхностью с линейным профилем. Решение состоит из четырех волновых конфигураций. Для каждой конфигурации найдены необходимые и достаточные условия для реализации. Наличие подстилающей поверхности с линейным профилем в приближении сжимаемой мелкой воды вместо плоской поверхности приводит к качественному изменению решений в реализуемых конфигурациях. Вместо областей с однородным течением реализуются области равноускоренного течения, отсутствуют классические простые волны, характеристики и ударные волны распространяются по параболическим траекториям.

Работа выполнена при поддержке Программы № 22 фундаментальных исследований Президиума РАН «Фундаментальные проблемы исследований и освоения Солнечной системы».

## ЛИТЕРАТУРА

1. К. В. Карельский, А. С. Петросян, А. В. Черняк, ЖЭТФ **141**, 1206 (2011).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (2006).
3. Л. В. Овсянников, *Лекции по основам газовой динамики*, Наука, Москва (1981).
4. Дж. Бэтчелор, *Введение в динамику жидкости*, Мир, Москва (1973).
5. K. V. Karelsky, A. S. Petrosyan, and A. G. Slavin, Russian J. Numer. Analysis and Math. Model. **22**, 543 (2007).

6. K. V. Karelsky, A. S. Petrosyan, and A. G. Slavin, *Russian J. Numer. Analysis and Math. Model.* **24**, 229 (2009).
7. C. B. Vreugdenhil, *Numerical Methods for Shallow-Water Flow* (Water Science and Technology Library, Vol. 13), Kluwer Acad. Publ., Netherlands (1994).
8. C. Schär and R. B. Smith, *J. Atmosph. Sci.* **50**, 1373 (1993).
9. A. E. Gill, M. K. Davey, E. R. Johnson, and P. F. Linden, *J. Marine. Res.* **44**, 713 (1986).
10. E. R. Johnson and M. K. Davey, *J. Fluid Mech.* **219**, 273 (1990).
11. S. E. Allen, *J. Phys. Oceanogr.* **26**, 1646 (1996).
12. S. E. Allen and X. Durrieu de Nadron, *Ocean. Sci.* **5**, 607 (2009).
13. V. Zeitlin, F. Bouchut, S. Medvedev, G. Reznik, and A. Stegner, *Nonlinear Dynamics of Rotating Shallow Water: Methods and Advances*, Elsevier, Sci. Publ., Amsterdam (2007).
14. B. Wang and X. Xie, *J. Atmosph. Sci.* **53**, 449 (1996).
15. A. Majda and J. A. Biello, *J. Atmosph. Sci.* **60**, 1809 (2003).
16. W. J. Merryfield, *J. Phys. Ocean.* **30**, 1046 (2000).
17. А. М. Фридман, Н. Н. Горькавый, *Физика планетных колец: Небесная механика сплошной среды*, Наука, Москва (1994).
18. J. Parsons, *Geophys. Res. Lett.* **27**, 2345 (2000).
19. G. Valentine and K. Wohletz, *J. Geophys. Res.* **94**(B2), 1867 (1989).
20. F. Dobran and A. Neri, *J. Geophys. Res.* **98**, 4231 (1993).
21. P. A. Gilman, *Astrophys. J.* **544**, L79 (2000).
22. M. Miesch and P. Gilman, *Solar Phys.* **220**, 287 (2004).
23. T. V. Zaqarashvili, R. Oliver, and J. L. Ballester, *Astrophys. J.* **691**, L41 (2009).
24. Н. А. Иногамов, Р. А. Сюняев, *Письма в астрон. ж.* **25**, 323 (1999).
25. Н. А. Иногамов, Р. А. Сюняев, *Письма в астрон. ж.* **36**, 896 (2010).
26. A. Spitkovsky, Y. Levin, and G. Ushomirsky, *Astrophys. J.* **566**, 1018 (2002).
27. K. Heng and A. Spitkovsky, *Astrophys. J.* **703**, 1819 (2009).
28. J. Y.-K. Cho, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* **366**, 4477 (2008).
29. К. В. Карельский, А. С. Петросян, С. В. Тарасевич, *ЖЭТФ* **140**, 606 (2011).
30. В. И. Петвиашвили, О. А. Похотелов, *Уединенные волны в плазме и атмосфере*, Энергоатомиздат, Москва (1989).
31. K. V. Karelsky, V. V. Papkov, A. S. Petrosyan, and D. Tsygankov, *Phys. Lett. A* **271**, 341 (2000).
32. K. V. Karelsky, A. S. Petrosyan, and A. G. Slavin, *Russian J. Numer. Analysis and Math. Model.* **21**, 539 (2006).
33. K. V. Karelsky, V. V. Papkov, and A. S. Petrosyan, *Phys. Lett. A* **271**, 349 (2000).
34. J. R. Lister, M. E. Timmermans, and H. E. Huppert, *J. Fluid Mech.* **445**, 305 (2001).
35. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, Москва (1977).
36. Г. Г. Черный, *Газовая динамика*, Наука, Москва (1988).