

СПЕКТР РЕЛЯТИВИСТСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ И ДИПОЛЕЙ ПРИ ИХ СВОБОДНОМ ПАДЕНИИ В ЧЕРНУЮ ДЫРУ

А. А. Шацкий^{a*}, И. Д. Новиков^{a,b}, Л. Н. Липатова^a

^a *Астрокосмический центр, Физический институт им. Лебедева Российской академии наук
117997, Москва, Россия*

^b *The Nielse Bohr International Academy, The Nielse Bohr Institute
DK-2100, Copenhagen, Denmark*

Поступила в редакцию 4 декабря 2012 г.

Рассмотрено движение электрических зарядов и диполей, радиально и свободно падающих на черную дыру Шварцшильда. Обратным влиянием электромагнитных полей на черную дыру пренебрегаем. Диполь считаем точечной частицей, поэтому деформацией, связанной с воздействием на него приливных сил, пренебрегаем. Согласно теореме «об отсутствии волос» у черных дыр, мультипольные электромагнитные поля должны полностью излучаться при падении мультиполя в черную дыру. Найден спектр мощности электромагнитного излучения для этих мультиполей (монополя и диполя). Найден различия в спектрах для разных ориентаций падающего диполя. Разработан общий метод нахождения излучаемых мультипольных электромагнитных полей для свободно падающих в черную дыру мультиполей (в том числе и для мультиполей высших порядков — квадруполей и т. д.). Рассчитанные электромагнитные спектры могут быть сопоставлены с наблюдательными данными от черных дыр звездных масс и меньше.

DOI: 10.7868/S0044451013060049

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно (см., например, [1, 2]) у черной дыры нет «волос», поэтому все мультипольные моменты от электромагнитных полей исчезают по мере приближения системы зарядов к горизонту черной дыры. Для статичного точечного заряда задача нахождения поля была решена Линетом [3]. В этой работе было показано, в частности, что поле точечного заряда приближается к полю заряженной черной дыры (с таким же зарядом) по мере приближения заряда к горизонту. Из этого следует, что все мультипольные электрические и магнитные моменты должны излучаться по мере приближения заряда (или системы зарядов или токов) к горизонту черной дыры.

При ускоренном движении монополя (одиночного заряда) потеря энергии происходит главным образом за счет тормозного излучения. Это излучение является дипольным, поскольку его мощность обратно пропорциональна c^3 (c — скорость света),

а излучаемые компоненты поля обратно пропорциональны c^2 .

Если же на черную дыру падает массивный диполь, то существование дипольного излучения в этом случае является неочевидным в связи с тем, что оба заряда диполя двигаются и ускоряются в одном направлении, а знаки этих зарядов противоположные. Однако нарастающая кривизна пространства приводит к излучению именно дипольного типа (см. разд. 4).

В квадрупольном приближении можно провести полную аналогию с квадрупольным излучением гравитационных волн при орбитальном движении двух масс (мощность которого обратно пропорциональна c^5). В этом случае знаки зарядов (масс) одинаковы, а скорости и ускорения противоположно направлены.

2. ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНО ПАДАЮЩЕЙ ЧАСТИЦЫ

Рассмотрим радиальное, свободное падение заряда или электрического диполя с массой m на черную

*E-mail: shatskiy@asc.rssi.ru

дыру Шварцшильда с массой M . Метрика Шварцшильда имеет вид¹⁾:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (1)$$

Здесь $r_g = 2M$ — радиус горизонта черной дыры Шварцшильда. Как известно, ускоренно движущийся заряд излучает. При этом в локально малой окрестности заряда, в собственной (сопутствующей заряду) системе отсчета излучение отсутствует²⁾. В жесткой системе отсчета, покоящейся относительно черной дыры, ускорение массивной частицы³⁾ определяется известными выражениями (см. работу [4], § 87):

$$\frac{du^i}{ds} = -\Gamma_{kj}^i u^k u^j. \quad (2)$$

Здесь u^i — компоненты 4-скорости частицы и Γ_{kj}^i — символы Кристоффеля. Для черной дыры Шварцшильда (см. [4], §§ 100, 102) имеем⁴⁾

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^r(r) &= \frac{r_g}{2r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right), \\ \Gamma_{rr}^r(r) &= -\frac{r_g}{2r^2(1 - r_g/r)}, \\ \dot{r}_e &= -\left(1 - \frac{r_g}{r_e}\right) \sqrt{\frac{r_g/r_e - r_g/r_0}{1 - r_g/r_0}}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} v^2(r_e) &\equiv (\dot{r}_e)^2 \frac{|g_{rr}|}{g_{tt}} = \frac{r_g/r_e - r_g/r_0}{1 - r_g/r_0}, \\ u^t(r_e) &= \frac{\sqrt{1 - r_g/r_0}}{1 - r_g/r_e}, \\ u^r(r_e) &= -\sqrt{r_g/r_e - r_g/r_0}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $r_e(t)$ — радиус частицы, r_0 — радиус, с которого начинается падение частицы, а $v(t)$ — трехмерная скорость частицы в координатах Шварцшильда.

¹⁾ Здесь выбрана система единиц, в которой скорость света $c = 1$ и гравитационная постоянная $G = 1$.

²⁾ Сопутствующая, свободно падающая система отсчета не является жесткой системой, поэтому между ее разными точками всегда существует относительное ускорение, которым можно пренебречь только в локально малой окрестности заряда (в падающем лифте Эйнштейна). Именно в этом свободно падающем «лифте» и отсутствует излучение от свободно падающего заряда (в приближении малости деформации системы отсчета внутри «лифта» за время его падения).

³⁾ Масса падающей частицы предполагается пренебрежимо малой по сравнению с массой черной дыры.

⁴⁾ Здесь и далее точка будет означать дифференцирование по времени t .

Во многих работах (см., например, [5], § 2.4) приводится закон движения $t(r_e)$ пробной частицы, радиально и свободно падающей в поле Шварцшильда с бесконечного радиуса:

$$\frac{t(r_e)}{r_g} = \text{const} - \frac{2}{3} \left(\frac{r_e}{r_g}\right)^{3/2} - 2\sqrt{\frac{r_e}{r_g}} + \ln \frac{\sqrt{r_e/r_g} + 1}{\sqrt{r_e/r_g} - 1}. \quad (5)$$

Нам потребуется аналогичный закон, но для падения с конечного радиуса r_0 .

Приведем здесь оригинальную формулу⁵⁾:

$$\begin{aligned} t(r_e) &= \sqrt{r_e(r_0 - r_e)(r_0/r_g - 1)} + \\ &+ \frac{(r_0 + 2r_g)\sqrt{r_0/r_g - 1}}{2} \arccos\left(\frac{2r_e}{r_0} - 1\right) + \\ &+ r_g \ln \frac{2\sqrt{r_e(r_0 - r_e)(r_0/r_g - 1)} + r_0 + r_e(r_0/r_g - 2)}{r_0(r_e/r_g - 1)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, начальные условия соответствуют тому, что $t(r_e = r_0) = 0$.

Представим, что вдоль всей траектории падающей частицы расположены часы, показывающие шварцшильдовское время t . Но пока световой сигнал от часов (мимо которых пролетает частица) доходит до наблюдателя, проходит еще время $\Delta t + \Delta t_1$. Здесь промежуток времени Δt соответствует расстоянию между частицей (когда она пролетает мимо часов) и начальным ее местоположением (на радиусе r_0). А промежуток времени $\Delta t_1 = \text{const}$ соответствует расстоянию между начальным радиусом r_0 и удаленным наблюдателем, этот промежуток есть константа.

Согласно [4], § 101 для промежутка времени Δt имеем

$$\Delta t = r_0 - r_e + r_g \ln \frac{r_0 - r_g}{r_e - r_g}. \quad (7)$$

Здесь и далее предполагается, что удаленный наблюдатель находится почти на той же линии, что и частица. Следовательно, зависимостью от малого угла $\theta \ll \pi$ между радиус-векторами наблюдателя и частицы в формуле (7) можно пренебречь (в линейном приближении).

Таким образом, измерение удаленным наблюда-

⁵⁾ В работе [5] есть аналогичная формула, но для зависимости собственного времени τ падающей частицы от радиуса.

телем скорости падения частицы нужно описывать с помощью времени $T(r_e) \equiv t + \Delta t + \Delta t_1$:

$$T(r_e) = \sqrt{r_e(r_0 - r_e)(r_0/r_g - 1)} + \frac{(r_0 + 2r_g)\sqrt{r_0/r_g - 1}}{2} \arccos\left(\frac{2r_e}{r_0} - 1\right) + r_g \ln \frac{2\sqrt{r_e(r_0 - r_e)(r_0/r_g - 1)} + r_0 + r_e(r_0/r_g - 2)}{r_0(r_e/r_g - 1)} + r_0 - r_e + r_g \ln \frac{r_0 - r_g}{r_e - r_g} + \text{const.} \quad (8)$$

Благодаря логарифмам в формулах (6)–(8) моменту достижения горизонта падающей частицей соответствует бесконечное время.

Введем необходимые для дальнейшего обозначения:

$$a \equiv \sqrt{1 - r_g/r_e}, \quad b \equiv \sqrt{r_g/r_e - r_g/r_0}, \quad c_1 \equiv \sqrt{1 - r_g/r_0}. \quad (9)$$

Согласно выражениям (6) и (7) имеем

$$\frac{dT}{dr_e} = \frac{1}{\dot{r}_e} - \frac{1}{1 - r_g/r_e} = -\frac{b + c_1}{a^2 b}, \quad (10)$$

$$\beta(r_e) \equiv \frac{dr_e}{dT} = -\frac{a^2 b}{b + c_1}. \quad (11)$$

Важно отметить, что $\beta = 0$ при $r_e = 0$ и $r_e = r_g$ (так же, как и для величины \dot{r}_e).

Физический смысл величины β заключается в том, что она является наблюдаемой (удаленным наблюдателем) скоростью падающей частицы.

3. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ

Для вычисления спектральной плотности электромагнитного излучения используем метод, который отличается от метода из работ [6–10].

Спектральная плотность электромагнитного излучения от радиального тока (который течет вдоль оси) определяется выражением (см. [4], § 66)

$$d\mathcal{E}_w = -\frac{\hat{\mathbf{E}}_w^\theta \hat{\mathbf{H}}_w^\varphi}{4\pi^2} r^2 do dw, \quad do \equiv 2\pi \sin \theta d\theta. \quad (12)$$

Здесь $\hat{\mathbf{E}}_w^\theta(w)$ и $\hat{\mathbf{H}}_w^\varphi(w)$ — спектральные плотности физических компонент электрического и магнитного полей, ортогональные направлению распространения волны (на бесконечности); $w \equiv k_t$ — временная компонента нулевого 4-вектора фотона k_j ,

причем компоненты k_t и k_θ являются интегралами движения для каждого излученного фотона.

Общерелятивистское обобщение этой формулы имеет вид

$$d\mathcal{E}_w = -\frac{(\mathbf{F}_w^{\theta t} \sqrt{|g_{\theta\theta}g_{tt}|})(\mathbf{F}_w^{\theta r} \sqrt{|g_{\theta\theta}g_{rr}|})}{4\pi^2} r^2 do dw. \quad (13)$$

При этом спектральные плотности \mathbf{F}_w^{mn} компонент тензора электромагнитного поля и контравариантные компоненты тензора электромагнитного поля F^{mn} связаны друг с другом:

$$\mathbf{F}_w^{\text{mn}} = 2 \int_0^\infty F^{mn} \exp[+iwt] dt, \quad (14)$$

$$F^{mn} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \mathbf{F}_\Omega^{\text{mn}} \exp[-i\Omega t] d\Omega. \quad (15)$$

Таким образом, спектральные плотности получают из компонент поля обычным фурье-преобразованием. Учитывая, что в электромагнитной волне компоненты электрического и магнитного полей равны по модулю, выражение (13) на бесконечности (вдали от черной дыры) можно переписать в виде

$$d\mathcal{E}_w = -\frac{|\mathbf{F}_w^{\theta t}|^2}{4\pi^2} r^4 do dw = -\frac{|\mathbf{F}_w^{\theta r}|^2}{4\pi^2} r^4 do dw. \quad (16)$$

Таким образом, излучаемые фурье-компоненты поля $\mathbf{F}_w^{\theta t}$ и $\mathbf{F}_w^{\theta r}$ на бесконечности должны быть обратно пропорциональны квадрату расстояния, для того чтобы удовлетворить условию сохранения энергии электромагнитных волн.

Полная излученная на бесконечность энергия получается интегрированием выражения (16).

4. ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯДА

Для нахождения компонент спектральной плотности \mathbf{F}_w^{mn} электромагнитного поля используем вторую пару общерелятивистских уравнений Максвелла⁶⁾ (см. [4], § 90):

$$\partial_i (\sqrt{-g} F^{in}) = 4\pi \sqrt{-g} j^n, \quad j^n(r, t, r_0) = \sum_e \frac{q_e u_e^n}{\sqrt{-g} u_e^t} \delta[r - r_e(t)] \delta(\theta) \delta(\varphi). \quad (17)$$

⁶⁾ Суммирование по e ведется по всем зарядам (для диполя — по первому и второму зарядам).

Здесь $\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta$, а $\delta [r - r_e(t)]$ — дельта-функция с особенностью в точке нахождения заряда в момент времени t .

Правая часть уравнений (17) при $r > r_0$ всегда равна нулю (4-вектор тока $j^n = 0$), поэтому интегрируем компоненту j^t уравнения (17) в пределах $[0, \theta]$ по θ и получаем:

$$\int_0^\theta \partial_r (\sqrt{-g} F^{rt}) d\theta + \sqrt{-g} F^{\theta t} = 0. \quad (18)$$

В линейном приближении по малому углу $\theta \ll \pi$ переписываем (18) в виде⁷⁾

$$\begin{aligned} r^2 F^{\theta t} &= -\frac{\theta}{2} \partial_r [r^2 F^{rt}] = \frac{\theta}{2} \partial_r [r^2 F_{rt}] = \\ &= \frac{\theta}{2} \partial_r [r^2 (\partial_r A_t - \partial_t A_r)]. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь A_i — 4-вектор электромагнитного поля падающего заряда в системе отсчета покоящегося удаленного наблюдателя. Падающая частица движется с

4-скоростью U^i относительно удаленного наблюдателя, поэтому в соответствии с (11) имеем⁸⁾

$$U^i \rightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, 0, 0 \right\}. \quad (20)$$

Здесь и далее стрелка обозначает предел при $r/r_g \rightarrow \infty$.

Для нахождения компонент A_t и A_r в системе отсчета удаленного наблюдателя используем два инварианта:

$$\text{inv}_1 = (A_i U^i) = \tilde{A}_t, \quad \text{inv}_2 = (A_i A_j g^{ij}) = (\tilde{A}_t)^2.$$

Здесь величина \tilde{A}_t является единственной ненулевой компонентой 4-вектора \tilde{A}_i электромагнитного поля в свободно падающей системе отсчета, связанной с частицей. Выражение для \tilde{A}_t известно из работы [3]:

$$\tilde{A}_t = \frac{q_e}{rr_e} \left[\frac{(r-M)(r_e-M) - M^2 \cos \theta}{\sqrt{(r-M)^2 + (r_e-M)^2 - M^2 - 2(r-M)(r_e-M) \cos \theta + M^2 \cos^2 \theta}} + M \right]. \quad (21)$$

Здесь $M = r_g/2$ — масса черной дыры Шварцшильда. В линейном приближении по углу θ получаем⁹⁾:

$$\tilde{A}_t(\theta=0) = \frac{q_e(r-r_g)}{r(r-r_e)} \rightarrow \frac{q_e}{r}. \quad (22)$$

Опуская все промежуточные вычисления, запишем для искомым компонент выражения:

$$A_t = U_t \tilde{A}_t \rightarrow \frac{q_e}{r} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (23)$$

$$A_r = U_r \tilde{A}_t \rightarrow -\frac{q_e}{r} \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (24)$$

В пределе $r/r_g \rightarrow \infty$ выражение (19) переписываем в виде¹⁰⁾

$$\begin{aligned} F^{\theta t} &\rightarrow -\frac{\theta}{2r^2} \partial_r [r^2 \partial_t A_r] \rightarrow -\frac{\theta q_e}{2r^2} Z, \\ Z &\equiv \frac{d}{dt} \left[\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь величина $F^{\theta t}$ является тангенциальным электрическим полем излучения точечного заряда в момент его нахождения на расстоянии r_e от черной дыры. Стоит отметить, что это поле является дипольным, так как оно пропорционально r_g , т.е. обратно пропорционально квадрату скорости света.

Раскрывая в (25) производную по времени, имеем

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\dot{r}_e}{(1-\beta^2)^{3/2}} \frac{\partial \beta}{\partial r_e} = \\ &= -\frac{r_g a^2 (b+c_1) [a^2 c_1 - 2b^2 (b+c_1)]}{2c_1 r_e^2 [(b+c_1)^2 - a^4 b^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Подставляя выражения (25) и (26) в фурье-преобразование (14), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_w^{\theta t} &= 2 \int_0^\infty \frac{\cos(wt) + \sin(wt)}{2} F^{\theta t} dt = \\ &= -\frac{\theta q_e}{r^2} \int_0^\infty \frac{\cos(wt) + \sin(wt)}{2} \partial_t \left[\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \right] dt. \end{aligned} \quad (27)$$

⁷⁾ Зависимость поля от угла θ соответствует известному релятивистскому выражению из работ [11] или [4], § 67.

⁸⁾ В выражении (20) пренебрегается кривизной пространства-времени в точке удаленного наблюдателя.

⁹⁾ Выражение (21) зависит от малого угла θ только в квадратичном приближении.

¹⁰⁾ Член $\partial_r A_t$ имеет асимптотику q_e/r^2 и поэтому на бесконечности убывает быстрее, чем член $\partial_t A_r$ (имеющий асимптотику q_e/r).

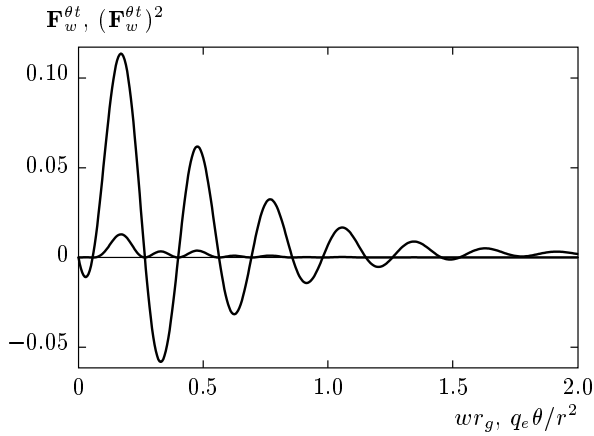


Рис. 1. Радиальное падение точечного заряда q_e с радиуса $r_0 = 5r_g$ на черную дыру. Знакопеременная кривая с большей амплитудой — зависимость спектральной плотности (фурье-образа) поля излучения $F_w^{\theta t}$ от wr_g в единицах $q_e \theta / r^2$. Знакопостоянная кривая с меньшей амплитудой — зависимость от того же аргумента квадрата величины $F_w^{\theta t}$, который является спектром мощности электромагнитного излучения, см. (16)

Заменяя в (27) переменную интегрирования: $dt = dr_e / \dot{r}_e$, согласно (9) для спектральной плотности поля излучения получаем

$$F_w^{\theta t} = -\frac{\theta q_e}{r^2} \int_0^\infty \frac{w\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\sin(wt) - \cos(wt)}{2} dt = \frac{\theta q_e}{r^2} \int_{r_g}^{r_0} \frac{wc_1}{\sqrt{(b+c_1)^2 - a^4 b^2}} \frac{\sin(wt) - \cos(wt)}{2} dr_e. \quad (28)$$

Здесь было использовано интегрирование по частям, а также учтено, что $\beta = 0$ при $r_e = 0$ и при $r_e = r_g$. Функция $t(r_e)$ определяется выражением (6).

Полученные с помощью (28) результаты показаны на рис. 1.

Обратим внимание, что благодаря возможности интегрирования (27) по частям, согласно выражениям (24) и (28), спектральная плотность поля излучения для заряда есть

$$F_w^{\theta t} = \frac{\theta w}{r} \mathbf{A}_{rw}. \quad (29)$$

Здесь \mathbf{A}_{rw} — фурье-образ запаздывающего вектор-потенциала для поля заряда. Это соответствует обычному определению фурье-компонент для поля излучения ($|\hat{\mathbf{E}}_w^\theta| = w \sin \theta |\hat{\mathbf{A}}_w|$ — см. [4], § 66) и возможно только благодаря интегрированию по частям

в (27). Как будет показано в следующем разделе, для поля диполя представление в виде (29) невозможно.

5. ИЗЛУЧЕНИЕ ДИПОЛЯ

Величина диполя (момента) определяется как $d_0 \equiv q_e l_0 = \text{const}$. Будем считать диполь точечной частицей и пренебрежем деформацией, связанной с воздействием на него приливных сил: $l_0 \ll r_g$. Обозначим радиус местоположения диполя как $r_d \equiv (r_1 + r_2)/2$, далее в формулах для диполей соответственно везде заменяем: $r_e \rightarrow r_d$.

5.1. Поперечная ориентация диполя

Выберем сначала ориентацию диполя поперек радиуса (более простой случай). Тогда $l_0 = r_d \Delta \theta_d$, поэтому выражение (25) для тангенциального электрического поля излучения диполя в этом случае переписывается в виде¹¹⁾:

$$F_{d\perp}^{\theta t} = \Delta \theta_d \frac{\partial F^{\theta t}}{\partial \theta} = \frac{-d_0 Z}{2r_d r^2} = \frac{d_0}{r^2} \frac{r_g a^2 (b+c_1) [a^2 c_1 - 2b^2 (b+c_1)]}{4c_1 r_d^3 [(b+c_1)^2 - a^4 b^2]^{3/2}}. \quad (30)$$

Функция $F_{d\perp}^{\theta t}(t, r)$ является тангенциальным электрическим полем излучения диполя в момент его нахождения на расстоянии r_d от черной дыры (для поперечной ориентации).

Соответственно спектральная плотность поля излучения диполя в поперечной ориентации принимает вид

$$F_{wd\perp}^{\theta t} = 2 \int_0^\infty F_{d\perp}^{\theta t} \frac{\cos(wt) + \sin(wt)}{2} dt = \frac{d_0}{r^2} \times \int_{r_g}^{r_0} \frac{r_g (b+c_1) [a^2 c_1 - 2b^2 (b+c_1)]}{2b r_d^3 [(b+c_1)^2 - a^4 b^2]^{3/2}} \times \frac{\cos(wt) + \sin(wt)}{2} dr_d. \quad (31)$$

Здесь была проведена замена переменной интегрирования: $dt = dr_d / \dot{r}_d$.

Важно отметить, что в случае поперечной ориентации диполя излучение в линейном приближении по углу $\theta \ll \pi$ не зависит от θ (так как «лепестки»

¹¹⁾ Формула (30) отличается от аналогичной формулы (25) только коэффициентом и множителем r_d в знаменателе подынтегрального выражения.

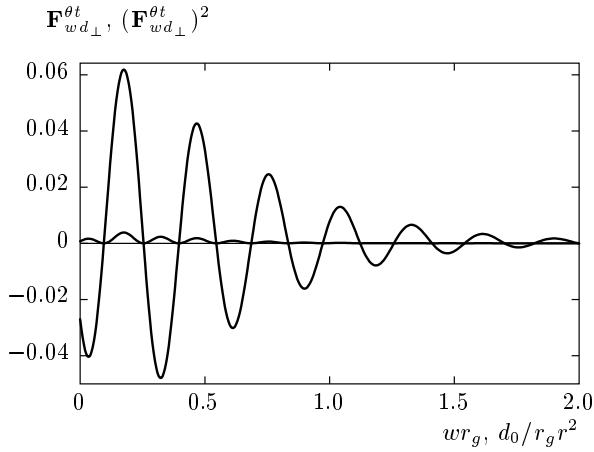


Рис. 2. Радиальное падение диполя с радиуса $r_0 = 5r_g$ на черную дыру. Для поперечно-ориентированного диполя: знакопеременная кривая с большей амплитудой — зависимость спектральной плотности (фурье-образа) поля излучения $F_{wd_{\perp}}^{\theta t}$ от wr_g в единицах $d_0/r_g r^2$; знакопостоянная кривая с меньшей амплитудой — зависимость квадрата величины $F_{wd_{\perp}}^{\theta t}$, который пропорционален спектру мощности (16) электромагнитного излучения

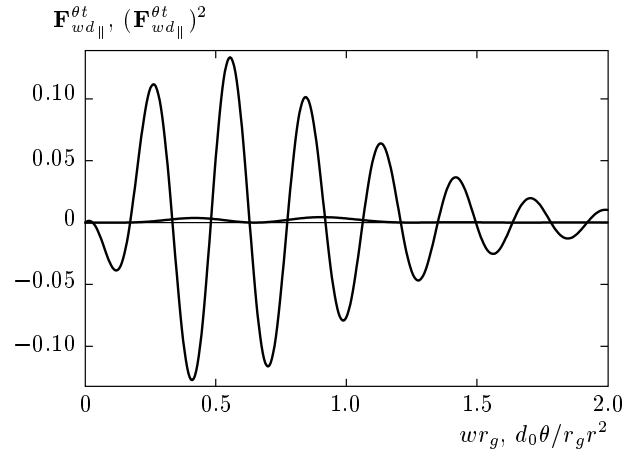


Рис. 3. То же, что на рис. 2, для продольно-ориентированного диполя $F_{wd_{\parallel}}^{\theta t}$ с аргументом в единицах $d_0\theta/r_g r^2$

диаграммы направленности излучения диполя расположены как раз в поперечном направлении).

5.2. Продольная ориентация диполя

Выберем теперь ориентацию диполя вдоль радиуса. В этом случае с учетом кривизны пространства длина диполя есть

$$l_0 \approx \frac{r_2(t) - r_1(t)}{\sqrt{1 - r_g/r_d}}. \tag{32}$$

Отсюда следует, что

$$\Delta r_d \equiv r_2(t) - r_1(t) = al_0, \quad \Delta r_0 = c_1 l_0. \tag{33}$$

Здесь значок Δ обозначает изменение при постоянном времени t , т. е. должен быть равен нулю дифференциал

$$dt = \frac{\partial t}{\partial r_0} \Delta r_0 + \frac{\partial t}{\partial r_d} \Delta r_d = 0. \tag{34}$$

Выражение (25) переписываем для диполя в виде

$$\begin{aligned} F_{d_{\parallel}}^{\theta t} = \Delta F^{\theta t} &\equiv \frac{\partial F^{\theta t}}{\partial r_0} \Delta r_0 + \frac{\partial F^{\theta t}}{\partial r_d} \Delta r_d = \\ &= \left[\frac{\partial F^{\theta t}}{\partial r_0} - \frac{\partial F^{\theta t}}{\partial r_d} \frac{\partial t}{\partial r_0} \dot{r}_d \right] c_1 l_0. \end{aligned} \tag{35}$$

Аналогично случаю поперечной ориентации диполя, спектральная плотность поля излучения для диполя в продольной ориентации принимает вид

$$\begin{aligned} F_{wd_{\parallel}}^{\theta t} &= 2 \int_0^{\infty} F_{d_{\parallel}}^{\theta t} \frac{\cos(wt) + \sin(wt)}{2} dt = \frac{d_0 \theta}{r^2} \times \\ &\times \int_{r_g}^{r_0} c_1 \frac{\cos(wt) + \sin(wt)}{2} \times \\ &\times \left[\frac{\partial Z}{\partial r_0} - \dot{r}_d \frac{\partial t}{\partial r_0} \frac{\partial Z}{\partial r_d} \right] \frac{dr_d}{\dot{r}_d}. \end{aligned} \tag{36}$$

Необходимые для вычисления этой квадратуры производные (с учетом выражения (26)) ввиду их громоздкости приведены в Приложении — см. (37), (38) и (39).

Графики спектров мощности для поперечной и продольной ориентаций диполя представлены соответственно на рис. 2 и 3.

6. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Как было показано в предыдущих разделах, излучение и монополя, и падающих диполей (30) и (35) является дипольным, так как излучаемые компоненты поля пропорциональны r_g — см. (26), т. е. обратно пропорциональны c^2 .

Полная энергия излучения (полученная интегрированием вектора Пойтинга по времени) с учетом углового распределения мощности (см., например, [11] или [4], § 67) оказывается равной для монополя $\mathcal{E}^e \approx 0.0016d_e^2/r_g$, для диполя $\mathcal{E}^d \approx 0.0007d_0^2/r_g^3$. При этом для падающих электронов в поле черных дыр с массой меньше 10^{14} г энергия излучения превышает их энергию покоя. Это говорит о неверности указанных выше расчетов для излучения в рамках классической теории для первичных черных дыр (с массой меньше 10^{14} г). В этих случаях необходима другая теория (квантовая гравитация).

Найденный спектр дипольного излучения зависит от ориентации диполя.

Характерная длина волны λ_m в максимуме этого излучения зависит не только от конкретного значения r_0 , но и от ориентации диполя. При этом λ_m при $r_0 = 5r_g$ оказывается порядка $20r_g$. Поэтому наблюдать это излучение вблизи максимума можно только для относительно небольших черных дыр (с массой $M < \sim M_\odot$). При попытке наблюдать это излучение на более коротких волнах получаем, что его спектральная мощность в локальных максимумах убывает примерно как w^{-2} .

Поскольку это излучение имеет характерный

спектр, оно может быть зарегистрировано для редких случаев падения замагниченных планет (или астероидов) на черные дыры звездных масс или для еще более редких случаев, когда пульсары падают в черные дыры.

Авторы особенно благодарны К. А. Бронникову за многочисленные полезные дискуссии по этой теме и за высказанные ценные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 12-02-00276-а, 11-02-00244-а, 11-02-12168-офи-м-2011), Научной школы-2915.2012.2 «Образование крупномасштабной структуры Вселенной и космологические процессы», в рамках программы «Нестационарные явления в объектах Вселенной 2012» и Федеральной целевой программы «Научно-педагогические кадры инновационной России 2009–2013 гг.» 16.740.11.0460.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Выражения, необходимые для интегрирования квадратуры (36)

Введем обозначения $x \equiv r_g/r_d$, $y \equiv r_g/r_0$ и приведем необходимые выражения:

$$\frac{\partial Z}{\partial r_0} = \frac{(x-1)^2 x^2 y^2}{4r_g^2 (1-y)^{3/2} \sqrt{x-y} \left[1 - x^3 + x^2(y+2) - 2xy + 2\sqrt{(1-y)(x-y)} - y \right]^{5/2}} \times$$

$$\times \left[2x^4 \sqrt{x-y} + x^3 \left(2\sqrt{1-y} - 7\sqrt{x-y} \right) + \right.$$

$$+ 2(x^2 - 2x - 15)y^2 \left(\sqrt{x-y} + \sqrt{1-y} \right) + x^2 \left(9\sqrt{x-y} - 14\sqrt{1-y} \right) +$$

$$+ y \left\{ -x^3 \left(\sqrt{x-y} + 2\sqrt{1-y} \right) + x^2 \left(2\sqrt{1-y} - \sqrt{x-y} \right) + x \left(29\sqrt{x-y} + 42\sqrt{1-y} \right) + \right.$$

$$\left. \left. + 37\sqrt{x-y} + 22\sqrt{1-y} \right\} - x \left(29\sqrt{x-y} + 18\sqrt{1-y} \right) - 7\sqrt{x-y} - 2\sqrt{1-y} \right], \quad (37)$$

$$\frac{dt}{dr_0} = \frac{1 - (x+1)y/2x + y^2}{\sqrt{(1-y)(x-y)}} + \frac{\sqrt{1-y}(2y+1)}{2\sqrt{x-y}} + \frac{3 \arccos(2y/x-1)}{4\sqrt{y(1-y)}}, \quad (38)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial r_d} = \frac{x^3 \left[(2-y)y(x-y) + 2\sqrt{(1-y)(x-y)} + 1-y \right]^{-1/2}}{4r_g^2 \sqrt{(1-y)(x-y)} \left[(2-x)x(x-y) + 2\sqrt{(1-y)(x-y)} + 1-y \right]^2} \times$$

$$\times \left[2x^6 \sqrt{x-y} - x^5 \left(17\sqrt{x-y} + 18\sqrt{1-y} \right) + x^4 \left(8\sqrt{x-y} - 26\sqrt{1-y} \right) - \right.$$

$$- 4x^3 \left(25\sqrt{x-y} + 14\sqrt{1-y} \right) + 16(x^2 + 4x - 3)y^3 \left(\sqrt{x-y} + \sqrt{1-y} \right) +$$

$$+ x^2 \left(62\sqrt{x-y} + 78\sqrt{1-y} \right) + 2y^2 \left\{ x^4 \left(\sqrt{x-y} + \sqrt{1-y} \right) - x^3 \left(25\sqrt{x-y} + 29\sqrt{1-y} \right) - \right.$$

$$\left. \left. - x^2 \left(79\sqrt{x-y} + 91\sqrt{1-y} \right) + x \left(33\sqrt{x-y} + 61\sqrt{1-y} \right) + 22\sqrt{x-y} + 10\sqrt{1-y} \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + y \left\{ -x^5 \left(\sqrt{x-y} + 2\sqrt{1-y} \right) + 12x^4 \left(3\sqrt{x-y} + 5\sqrt{1-y} \right) + \right. \\
& + 2x^3 \left(50\sqrt{x-y} + 71\sqrt{1-y} \right) - 4x^2 \left(3\sqrt{1-y} - 26\sqrt{x-y} \right) - x \left(151\sqrt{x-y} + 104\sqrt{1-y} \right) + \\
& \left. + 8\sqrt{x-y} + 12\sqrt{1-y} \right\} + x \left(17\sqrt{x-y} - 10\sqrt{1-y} \right) - 4\sqrt{x-y} \Big]. \quad (39)
\end{aligned}$$

Интересно отметить, что все эти выражения сингулярны в точке $r_d = r_0$, но их комбинация, входящая в формулу (36), является везде конечной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черные дыры. Мембранный подход*, под ред. К. Торна, Р. Прайса, Д. Магдональда, Мир, Москва (1998).
2. И. Д. Новиков, В. П. Фролов, *Физика черных дыр*, Наука, Москва (1986).
3. В. Linet, *J. Phys. A* **9**, 1081 (1976).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, т. II, Наука, Москва (1988).
5. V. P. Frolov and I. D. Novikov, *Black Hole Physics. Basic Concepts and New Developments*, Kluwer AP (1998).
6. F. J. Zerilli, *Phys. Rev. D* **2**, 2141 (1970).
7. M. Davis, R. Ruffini, W. H. Press, and R. H. Price, *Phys. Rev. Lett.* **27**, 1466 (1971).
8. S. A. Teukolsky, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 1114 (1972).
9. Д. Г. Яковлев, *ЖЭТФ* **68**, 369 (1975). [D. G. Yakovlev, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **41**, 179 (1975).]
10. I. G. Dymnikova, *Astrophys. Space Sci.* **51**, 229 (1977).
11. D. K. Ross, *Astron. Soc. Pacific* **83**, 633 (1971).