ЖЭТФ, 2013, том 143, вып. 6, стр. 1202–1208

РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА С ТЕПЛОПЕРЕДАЧЕЙ В РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ

А. А. Абрамов[*], *А. В. Бутковский*[**]

Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского
140180, Жуковский, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 26 ноября 2012 г.

На основе численного решения уравнения Больцмана методом прямого статистического моделирования исследовано течение Куэтта с теплопередачей в широком диапазоне отношения температур пластин и чисел Маха движущейся пластины. Предложена классификация режимов течения по виду зависимостей потока энергии и напряжения трения от числа Кнудсена Kn. Эти зависимости могут быть одновременно монотонны, а могут быть одновременно немонотонны и иметь максимумы. Возможны ситуации, при которых зависимость потока энергии, передаваемой пластине, от Kn имеет минимум, а зависимость напряжения трения монотонна или даже имеет максимум. Существуют также режимы, при которых зависимость потока энергии от Kn имеет максимум, а зависимость напряжения трения монотонна, и наоборот.

DOI: 10.7868/S0044451013060207

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача Куэтта о течении и теплопередаче между параллельными бесконечными пластинами, движущимися в разреженном газе друг относительно друга, исследовалась многими авторами. На этой задаче опробованы основные методы решения уравнения Больцмана. Кроме того, задача интересна сама по себе как пример совместного влияния числа Кнудсена Kn, числа Маха M и температур поверхностей на течение разреженного газа. Результаты исследований течения Куэтта в переходном режиме представлены в работах [1–6]. Среди полученных результатов можно выделить ряд эффектов: немонотонность по Kn напряжения трения [2] и потока энергии, передаваемого пластине [3, 4] при больших числах Маха, а также эффект изменения знака потока энергии при изменении числа Кнудсена [5]. Однако всестороннего исследования течения Куэтта в известной литературе не проводилось. В данной работе продолжено изучение влияния параметров задачи на характер течения и проведена систематизация различных режимов течения Куэтта в разреженном газе с целью построения общей картины влияния чисел Маха, Кнудсена и отношения температур пластин на поток энергии, передаваемой пластине, и напряжение трения.

[*] E-mail: alabr54@progtech.ru
[**] E-mail: albutkov@mail.ru

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для исследования возникающего в задаче Куэтта стационарного течения необходимо решить уравнение Больцмана

$$\xi_x \frac{df}{dx} = J(f,f) \tag{1}$$

с граничными условиями для функции распределения молекул на пластинах:

$$f = n_{r1}(2\pi R T_1)^{-3/2} \exp\left[-\frac{\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2}{2RT_1}\right], \quad \xi_x > 0, \quad x = 0, \tag{2}$$

$$f = n_{r2}(2\pi R T_2)^{-3/2} \exp\left[-\frac{\xi_x^2+(\xi_y-U)^2+\xi_z^2}{2RT_2}\right], \quad \xi_x < 0, \quad x = 1. \tag{3}$$

Здесь $J(f,f)$ — интеграл столкновений молекул [1]; ξ_x, ξ_y, ξ_z — декартовы компоненты скорости молекул, причем ξ_x направлена перпендикулярно граничным поверхностям; поперечная координата x

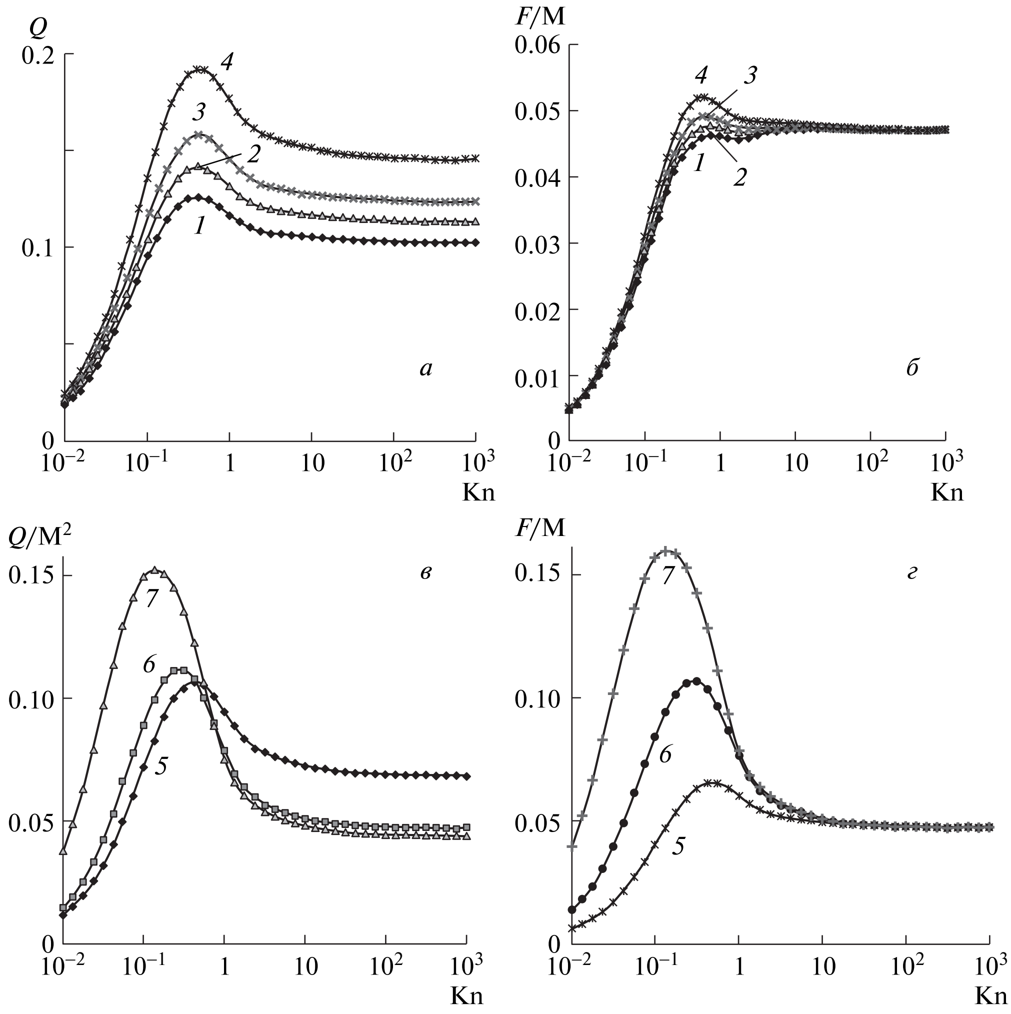

Рис. 1. Зависимости потока энергии, передаваемой неподвижной пластине, (*а,в*) и напряжения трения (*б,г*) от числа Кнудсена. $t = 0.01$; М $= 0.05$ (*1*), 0.5 (*2*), 0.7 (*3*), 1 (*4*), 2 (*5*), 5 (*6*), 10 (*7*)

нормирована на расстояние между пластинами L; T_1, T_2 — температуры пластин; n_{r1} и n_{r2} — параметры функции распределения, соответствующие отраженным молекулам, которые находятся из условия баланса падающих и отраженных молекул; $U = U_2$ — скорость движения одной пластины (другая пластина неподвижна: $U_1 = 0$); R — газовая постоянная. Предполагается, что отражение молекул от пластин происходит диффузно с максвелловским распределением, соответствующим температуре поверхности. Для решения задачи (1)–(3) необходимо задать среднюю плотность газа между пластинами n_{aver} и закон взаимодействия молекул при столкновении друг с другом. Среди макропараметров наибольший интерес представляют поток энергии, передаваемой пластине, и напряжение трения. Обозначим через Q безразмерную разность потоков энергии молекул, падающих на поверхность неподвижной пластины и отраженных ею, и через F — безразмерное напряжение трения:

$$Q = \frac{E}{kT_2 c n_{aver}}, \quad E = -\int \xi_x \frac{m\xi^2}{2} f(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi},$$

$$c = \sqrt{\frac{2kT_2}{m}}, \quad \mathrm{M} = \frac{U_2}{\sqrt{kRT_2}}, \quad t = \frac{T_1}{T_2},$$

$$F = \frac{|P_{xy}|}{2kT_2 n_{aver}}, \quad P_{xy} = \int m\xi_x\xi_y f(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi},$$

где k — постоянная Больцмана, m — масса молекулы. Положительным направлением потока энергии выбрано направление от движущейся пластины к неподвижной.

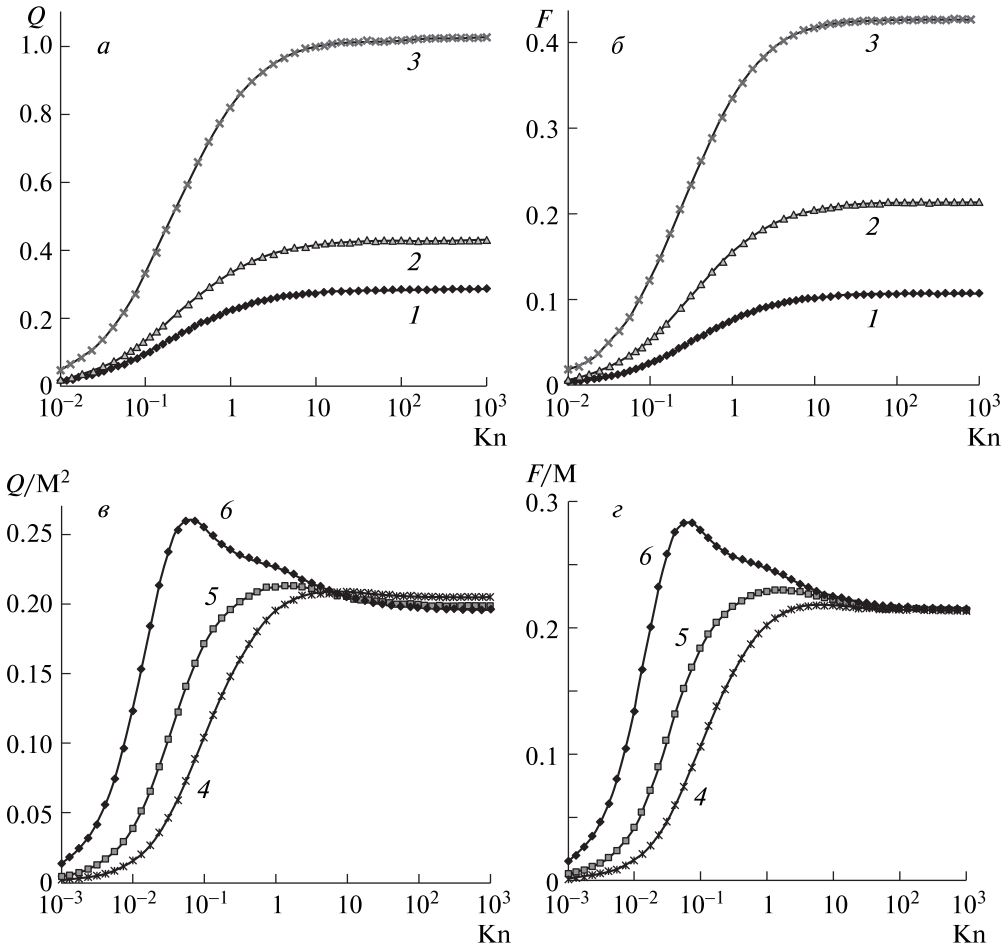

Рис. 2. Зависимости потока энергии, передаваемой неподвижной пластине, (*а,в*) и напряжения трения (*б,г*) от числа Кнудсена. $t = 0.5$; $\mathrm{M} = 0.5$ (*1*), 1 (*2*), 2 (*3*), 5 (*4*), 10 (*5*), 20 (*6*)

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для решения задачи методом прямого статистического моделирования применялась процедура установления с некоторым достаточно малым шагом по времени Δt. При этом пространство между плоскостями $x = 0$ и $x = 1$ разбивалось на ячейки размером, меньшим длины свободного пробега молекул. Внутри ячеек плотность, скорость и температура газа считались постоянными. В ячейки помещались моделирующие течение молекулы. В эволюции системы частиц на временно́м интервале Δt, меньшем среднего времени между столкновениями молекул, можно выделить два этапа: 1) свободный перелет молекул за время Δt; 2) столкновение молекул, принадлежащих данной ячейке [7]. Макропараметры в ячейках вычислялись путем усреднения по времени вдоль траекторий молекул соответствующих микроскопических величин [8]. Расчеты проводились для модели молекул в виде псевдомаксвелловских сфер с сечением взаимодействия $\sigma = \sigma_0/g$, где σ_0 — постоянная, g — относительная скорость сталкивающихся молекул. Безразмерный поток энергии, передаваемой пластине, и безразмерное напряжение трения зависят от числа Маха M движущейся пластины, отношения температур пластин и числа Кнудсена $\mathrm{Kn} = \lambda/L$, где λ — характерная длина свободного пробега молекул. Для модели псевдомаксвелловских молекул $\lambda = c(n_{aver}\sigma_0)^{-1}$.

4. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В работе [5] показано, что при $t \ll 1$ и $\mathrm{M} = 0$ немонотонность зависимости $Q(\mathrm{Kn})$ возрастает с уменьшением t, достигая при $t = 0.001$ несколь-

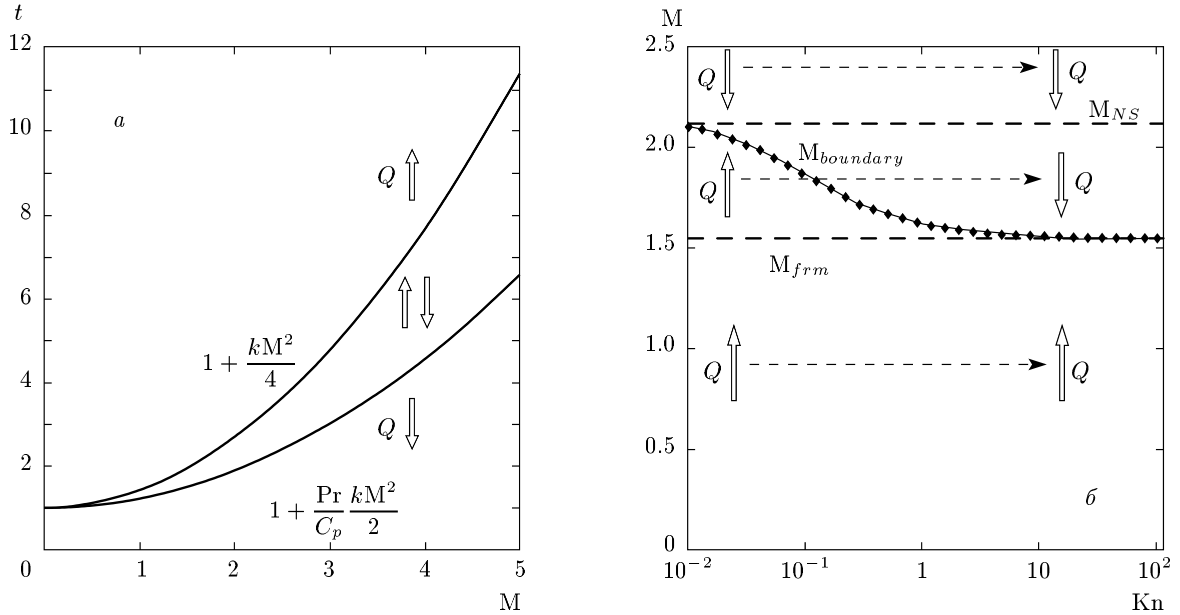

Рис. 3. Области с различными направлениями потока энергии: a — плоскость (M, t), $б$ — плоскость $(\mathrm{Kn}, \mathrm{M})$ при $t = 2$

ких сот процентов. Эта немонотонность аналогична немонотонности силы, действующей на пластину в гиперзвуковом потоке разреженного газа, и связана с наличием в газе двух групп молекул с существенно различающимися средними скоростями молекул [1]. Существующая при $\mathrm{M} = 0$ немонотонность $Q(\mathrm{Kn})$, естественно, должна сохраниться при $\mathrm{M} > 0$. Однако, поскольку в обеих группах молекул средний продольный импульс имеет один и тот же порядок, зависимость $F(\mathrm{Kn})$ при $\mathrm{M} \ll 1$ не должна иметь выраженного экстремума.

На рис. 1 приведены зависимости $Q(\mathrm{Kn})$ и $F(\mathrm{Kn})$ при $t = 0.01$ и различных значениях M. Как видно из графиков, при малых числах Маха напряжение трения, в отличие от потока энергии, возрастает почти монотонно. Здесь и в дальнейшем под монотонностью будем понимать монотонность с графической точностью. Как видно на рис. 1*б*, при $\mathrm{M} = 1$ зависимость $F(\mathrm{Kn})$ имеет выраженный максимум, лежащий выше свободномолекулярного предела. По мере возрастания числа Маха этот максимум увеличивается

На рис. 1*в,г* видно, что при $\mathrm{M} \gg 1$ обе зависимости, как и следовало ожидать, приобретают ярко выраженные максимумы.

Зависимости $Q(\mathrm{Kn})$ и $F(\mathrm{Kn})$ при $t = 0.5$ и различных числах Маха приведены на рис. 2. Как и следовало ожидать, исходя из результатов [2, 5], при числах Маха, меньших или порядка единицы, обе зависимости монотонны, а при $\mathrm{M} \gg 1$ обе имеют максимумы.

В работе [5] показано, что при $t > 1$ число Маха влияет на характер зависимости $Q(\mathrm{Kn})$ иначе, чем при $t \le 1$. Это связано с тем, что при $t > 1$ поток энергии, передаваемой неподвижной пластине, при некотором числе Маха становится равным нулю.

В пределе Навье – Стокса (NS) [9] $Q < 0$ при $\mathrm{M} < \mathrm{M}_{NS}$, $Q > 0$ при $\mathrm{M} > \mathrm{M}_{NS}$, где

$$\mathrm{M}_{NS} = \sqrt{\frac{2C_p(t-1)}{k\,\mathrm{Pr}}}, \quad \mathrm{Pr} = \frac{2}{3}, \quad C_p = \frac{5}{2}.$$

С другой стороны, в свободномолекулярном пределе $Q < 0$ при $\mathrm{M} < \mathrm{M}_{frm}$, $Q > 0$ при $\mathrm{M} > \mathrm{M}_{frm}$, где

$$\mathrm{M}_{frm} = 2\sqrt{\frac{t-1}{k}}.$$

Значение $\mathrm{M}_{boundary}$ числа Маха, при котором поток энергии на неподвижную пластину меняет знак, зависит от числа Кнудсена и отношения температур пластин и находится в диапазоне $\mathrm{M}_{frm} < \mathrm{M}_{boundary} < \mathrm{M}_{NS}$. Таким образом, плоскость (M, t) делится на три части, при этом в двух из них знак потока энергии постоянен, а в третьей зависит от числа Kn. Эти области показаны на рис. 3*а*.

Кривая $\mathrm{M}_{boundary}(\mathrm{Kn})$, разделяющая области знакопостоянства потоков энергии на неподвижную пластину при $t = 2$ приведена на рис. 3*б*.

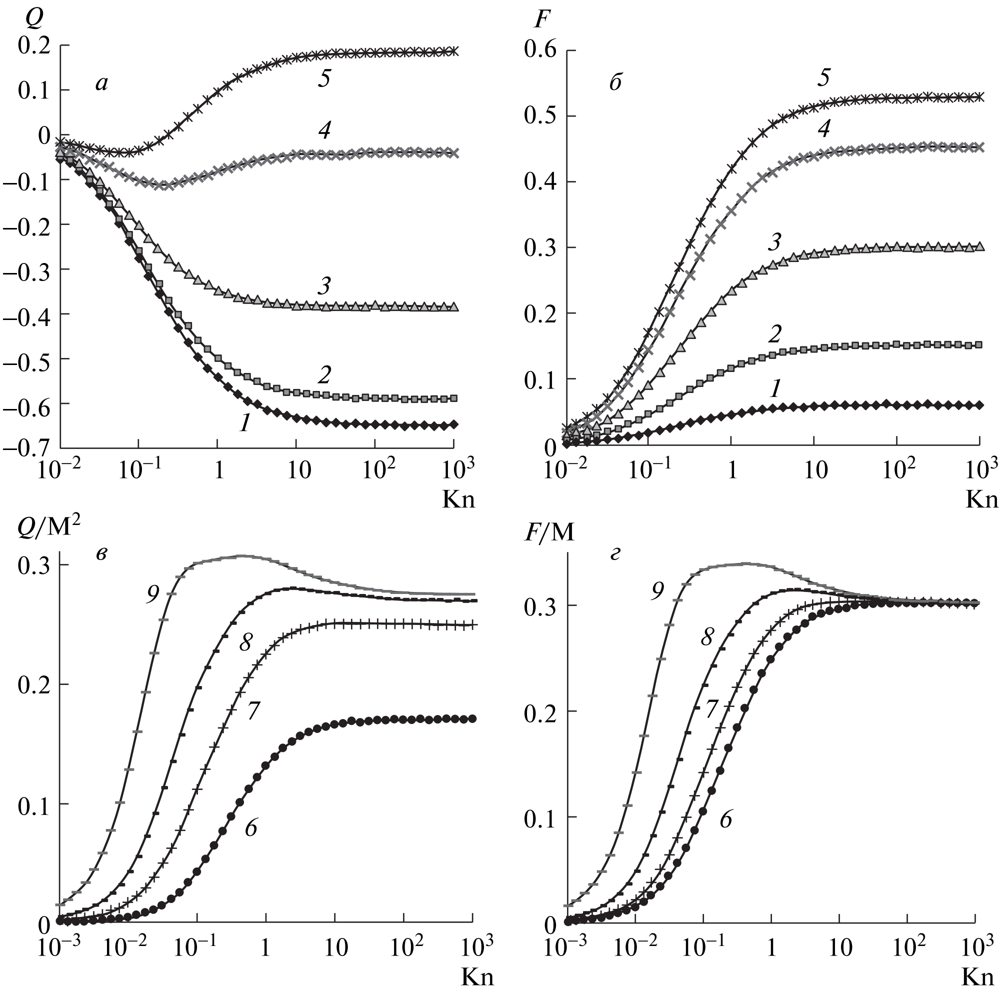

Рис. 4. Зависимости потока энергии, передаваемой неподвижной пластине, (a,$в$) и напряжения трения ($б$,$г$) от числа Кнудсена. $t = 2$; M $= 0.2$ (*1*), 0.5 (*2*), 1 (*3*), 1.5 (*4*), 1.75 (*5*), 2.5 (*6*), 5 (*7*), 10 (*8*), 20 (*9*)

Как видно из графика, при $\mathrm{M}_{frm} < \mathrm{M}_{boundary} < \mathrm{M}_{NS}$ увеличение числа Кнудсена может приводить к изменению знака потока энергии на неподвижную пластину.

На рис. 4 представлены зависимости $Q(\mathrm{Kn})$ и $F(\mathrm{Kn})$ при $t = 2$ и различных значениях M. Как видно из графиков, вначале увеличение числа Маха не приводит к изменению вида кривых $Q(\mathrm{Kn})$. Однако при увеличении M до значений, при которых $Q(0.5)$ приблизительно равно свободномолекулярному значению потока энергии, зависимость $Q(\mathrm{Kn})$ становится немонотонной. Модуль потока энергии сначала с увеличением Kn возрастает, как и следовало ожидать, в соответствии с элементарной кинетической теорией для режимов течения, близких к режиму течения в сплошной среде [1]. Затем, достигнув максимума в переходной области, он начинает уменьшаться, приближаясь к свободномолекулярному пределу. При $\mathrm{M} > \mathrm{M}_{frm}$ этот предел положителен и увеличение числа Кнудсена приводит к тому, что при $\mathrm{M}_{frm} < \mathrm{M} < \mathrm{M}_{NS}$ поток энергии, передаваемой пластине, меняет знак. При $\mathrm{M} > \mathrm{M}_{NS}$ зависимость $Q(\mathrm{Kn})$ вначале вновь становится монотонной, а затем, когда M достигает значений, много больших единицы, у этой зависимости возникает максимум. В то же время зависимость $F(\mathrm{Kn})$ становится немонотонной лишь при $\mathrm{M} \gg 1$.

На рис. 5, 6 представлены зависимости $Q(\mathrm{Kn})$ и $F(\mathrm{Kn})$ при $t = 100$ и различных значениях M.

Как видно из графиков, функция $Q(\mathrm{Kn})$ существенно немонотонна при всех рассмотренных значениях M, за исключением узкой области около M_{NS}, в которой она близка к монотонной. Напряжение трения $F(\mathrm{Kn})$ существенно немонотонно всюду за исключением области $\mathrm{M} \ll 1$.

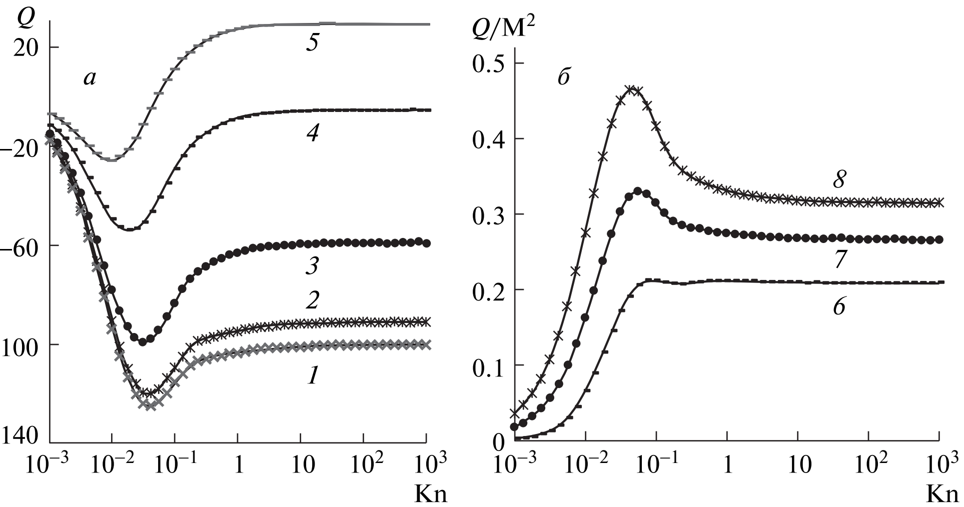

Рис. 5. Зависимости потока энергии, передаваемой неподвижной пластине, от числа Кнудсена. $t = 100$; М $= 2$ (*1*), 5 (*2*), 10 (*3*), 15 (*4*), 17.5 (*5*), 21.5 (*6*), 25 (*7*), 30 (*8*)

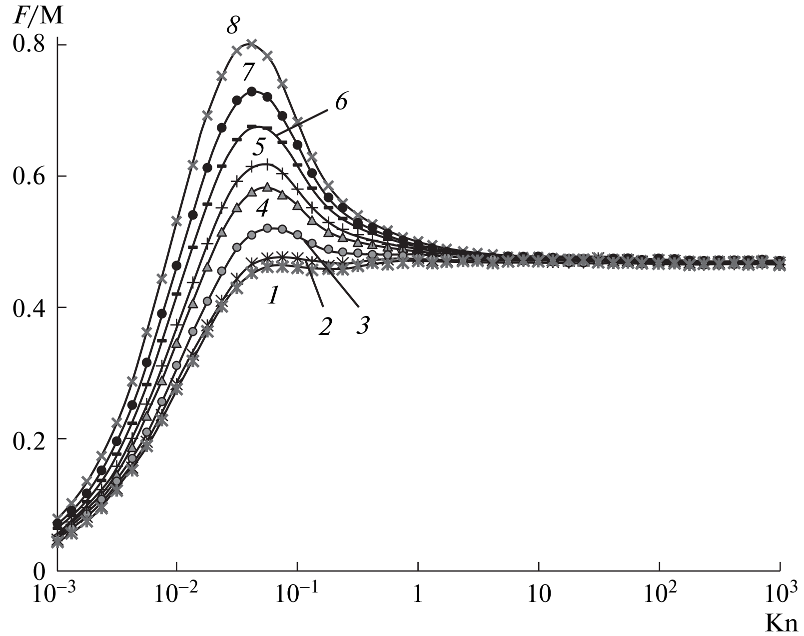

Рис. 6. Зависимости напряжения трения от числа Кнудсена. $t = 100$; М $= 2$ (*1*), 5 (*2*), 10 (*3*), 15 (*4*), 17.5 (*5*), 21.5 (*6*), 25 (*7*), 30 (*8*)

5. СИСТЕМАТИЗАЦИЯ РЕЖИМОВ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА

Исходя из анализа результатов расчетов, проведенных в данной работе и в работах [2–5], на плоскости (M, t) можно выделить следующие шесть областей с различным видом зависимостей $Q(\mathrm{Kn})$ и $F(\mathrm{Kn})$.

1. Области параметров (M, t), при которых поток энергии, предаваемой пластине, $Q(\mathrm{Kn})$ и напряжение трения $F(\mathrm{Kn})$ монотонно (как минимум, с графической точностью — 2 %) возрастают при увеличении числа Кнудсена.

1а. $0.01 \ll t \le 1$ и М меньше или порядка единицы. В этой области $Q(\mathrm{Kn}) > 0$.

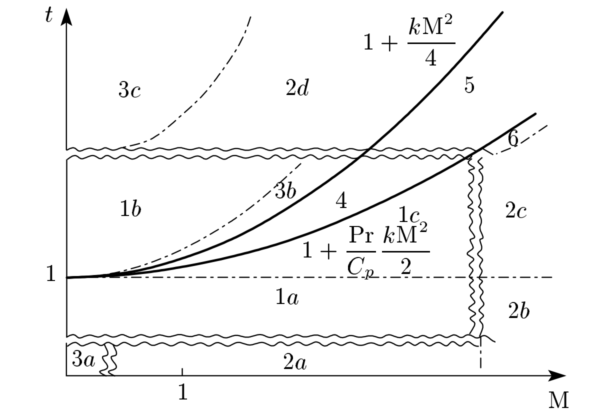

Рис. 7. Режимы течения Куэтта на плоскости (M, t)

1b. $1 < t \ll 100$ и $\mathrm{M} < \mathrm{M}_Q(t)$, где $\mathrm{M}_Q < \mathrm{M}_{frm}$; $Q(\mathrm{Kn}) < 0$.

1c. $1 < t \ll 100$ и $\mathrm{M}_{NS}(t) < \mathrm{M} \ll 10$; $Q(\mathrm{Kn}) > 0$.

2. Области, в которых $Q(\mathrm{Kn})$ и $F(\mathrm{Kn})$ немонотонны.

2a. $t \ll 1$, $\mathrm{M} \gtrsim 1$; $Q(\mathrm{Kn}) > 0$.

2b. $t < 1$, $\mathrm{M} \gg 1$; $Q(\mathrm{Kn}) > 0$.

2c. $t > 1$, $\mathrm{M} \gg 1$, $\mathrm{M} > \mathrm{M}_{NS}$; $Q(\mathrm{Kn}) > 0$.

2d. $t \gg 1$ и $\mathrm{M}_F(t) < \mathrm{M} < \mathrm{M}_{frm}$, где $\mathrm{M}_F(t)$ — возрастающая функция; $Q(\mathrm{Kn}) < 0$.

3. Области, в которых функция $Q(\mathrm{Kn})$ существенно немонотонна, а $F(\mathrm{Kn})$ монотонна или близка к монотонной.

3a. $t \ll 1$, $M \ll 1$; $Q(\mathrm{Kn}) > 0$.

3b. $1 < t \ll 100$, $\mathrm{M}_{nonmon} < \mathrm{M} < \mathrm{M}_{frm}$; $Q(\mathrm{Kn}) < 0$.

3c. $t \gg 1$ и $\mathrm{M} < \mathrm{M}_F(t)$; $Q(\mathrm{Kn}) < 0$.

4. Область, в которой функция $Q(\mathrm{Kn})$ немонотонна и знакопеременна, а $F(\mathrm{Kn})$ монотонна: $1 < t \ll 100$ и $\mathrm{M}_{frm} < \mathrm{M} < \mathrm{M}_{NS}$.

5. Область, в которой $Q(\mathrm{Kn})$ немонотонна и знакопеременна, а $F(\mathrm{Kn})$ немонотонна: $t \gg 1$ и $\mathrm{M}_{frm} < \mathrm{M} < \mathrm{M}_{NS}$.

6. Область, в которой $Q(\mathrm{Kn})$ близка к монотонной, а $F(\mathrm{Kn})$ существенно немонотонна: $t \gg 1$, $\mathrm{M} \approx \mathrm{M}_{NS}$; $Q(\mathrm{Kn}) > 0$.

Эти области условно изображены на рис. 7.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе анализа поведения зависимостей теплового потока, передаваемого пластине, и напряжения трения от числа Кнудсена проведена систематизация решений задачи Куэтта с теплопередачей в разреженном газе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-08-00-832).

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Н. Коган, *Динамика разреженного газа*, Наука, Москва (1967).

2. Е. М. Шахов, МЖГ № 5, 16 (1969).

3. A. K. Rebrov and P. A Skovorodko, in *Rarefied Gas Dynamics–1996, 20th Int. Symposium Proc.*, ed. by Ching Shen, Peking Univ. Press, Beijing, China (1997), p. 215.

4. P. A. Skovorodko, in *Rarefied Gas Dynamics–2000, 22nd Int. Symposium*, ed. by T. J. Bartel and M. A. Gallis, American Institute of Physics, Melville, New York (2001), p. 182.

5. А. А. Абрамов, А. В. Бутковский, МЖГ № 1, 167 (2010).

6. В. Г. Черняк, А. Ф. Поликарпов, ЖЭТФ **137**, 165 (2010).

7. О. М. Белоцерковский, В. Е. Яницкий, Ж. вычислит. матем. и матем. физ. **15**, 1195 (1975), *ibid* 1553 (1975).

8. А. А. Абрамов, ДАН СССР **271**(2), 315 (1983).

9. А. А. Абрамов, Н. К. Макашев, Уч. зап. ЦАГИ **10**(5), 35 (1979).