

РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦ С ВНУТРЕННИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

С. В. Слипущенко^{a,b}, А. В. Тур^c, В. В. Яновский^{a,b*}

^a Институт монокристаллов Национальной академии наук Украины
61001, Харьков, Украина

^b Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина
61000, Харьков, Украина

^c Université de Toulouse [UPS], CNRS, Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie
31028, Toulouse, France

Поступила в редакцию 13 февраля 2013 г.

Рассмотрено рассеяние частиц с малым числом внутренних степеней свободы. Для исследования рассеяния двух таких структурно-сложных частиц применяется билиардный формализм. Установлены основные характеристики рассеяния. Обнаружены различные типы режимов рассеяния. В частности, найден режим, при котором скорость разлета таких частиц выше скорости их сближения до столкновения. Показано, что рассеяние таких частиц происходит после конечного числа столкновений. Предложен обобщенный ньютоновский закон для столкновения частиц с малым числом степеней свободы и установлен вид эффективного коэффициента восстановления.

DOI: 10.7868/S0044451013080105

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение столкновений макроскопических частиц начато достаточно давно. Собственно анализ таких столкновений позволил понять и установить основные законы взаимодействия [1] макроскопических частиц или масс. Для макроскопических частиц с гигантским числом внутренних степеней свободы столкновение, согласно гипотезе Ньютона, описывается соотношением

$$V_1' - V_2' = -e(V_1 - V_2),$$

где V_1 , V_2 и V_1' , V_2' — скорости макроскопических тел соответственно до и после столкновения, а e — коэффициент восстановления, не зависящий от скорости. Для упругих материалов гипотеза Ньютона хорошо согласуется с экспериментами [1]. Для абсолютно упругих столкновений $e = 1$, а для абсолютно неупругих — $e = 0$. При столкновении реальных макроскопических тел коэффициент восстановления лежит в диапазоне $0 < e < 1$. Другими словами, относительная скорость макроскопической частицы при рассеянии может только уменьшаться по

абсолютной величине. Это совершенно естественное свойство, оказывается, может нарушаться для частиц с небольшим числом внутренних степеней свободы.

Интерес к свойствам частиц с небольшим числом внутренних степеней свободы в последнее время возрастает благодаря интенсивным исследованиям нанообъектов. Ясно, что с уменьшением размеров частиц число внутренних степеней свободы уменьшается. Поэтому важно исследовать влияние небольшого числа внутренних степеней свободы на характер столкновений таких частиц. Простейшей моделью для изучения рассеяния таких частиц является пара сталкивающихся композитных частиц. Композитная частица состоит из оболочки с несколькими точечными частицами внутри [2]. Оболочки и внутренние частицы могут двигаться только вдоль выбранного направления, абсолютно упруго сталкиваясь друг с другом. Иными словами, внутренние степени свободы взаимодействуют друг с другом и с оболочкой абсолютно упруго, диссипация энергии в такой модели отсутствует.

Несмотря на простоту выбранной модели, полученные результаты носят достаточно общий характер и в определенном приближении относятся к рас-

*E-mail: yanovsky@isc.kharkov.ua

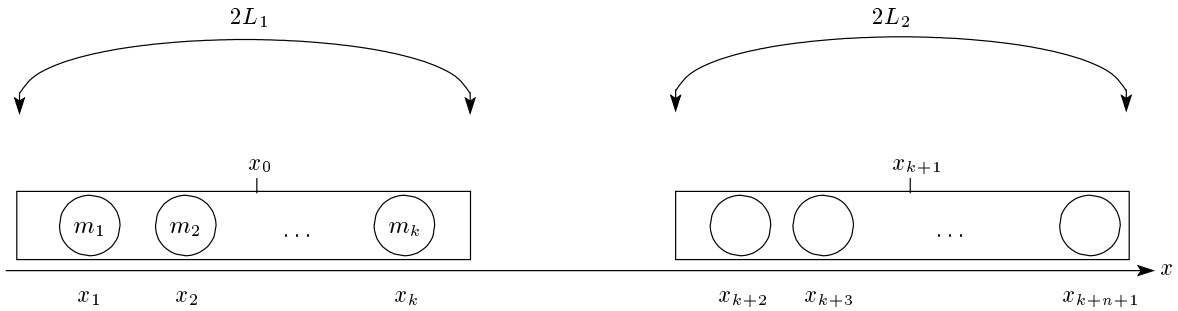


Рис. 1. Две композитные частицы: x_0, x_{k+1} — положения центров оболочек; массы внутренних частиц нумеруются в соответствии с нумерацией их координат. Для примера массы внутренних частиц первой композитной частицы приведены явно

сеянию и более сложных частиц с малым числом внутренних степеней свободы. Интересно подчеркнуть, что такие композитные частицы реализуются и экспериментально. Примером подобных структурно сложных частиц являются молекулы ротоксанов [3] и закрытые нанотрубки с фуллереном внутри (nanotube rearpods) [4, 5]. Молекула ротоксана состоит из стержневой молекулы с надетой на нее кольцевой молекулой. Кольцевая молекула может свободно двигаться вдоль стержня, отражаясь от утолщений на его концах. Таким образом, эти две молекулы оказываются объединенными в композитную частицу топологической связью. При низких температурах такая композитная частица обладает определенным числом внутренних степеней свободы, совпадающим с числом кольцевых молекул. Закрытые нанотрубки с фуллереном имеют похожую структуру. Они состоят из нанотрубки, закрытой с обоих концов, в которую помещены макромолекулы фуллерена. Такие композитные частицы являются перспективными компонентами наностроительств, нанороботов [6] и запоминающих элементов [7].

Для исследования столкновений композитных частиц в работе предложен метод построения эквивалентного бильярда. Движение точечной частицы в таком бильярде полностью определяет движение и взаимодействие всех компонент или составных элементов композитных частиц. Другими словами, показано, что рассеяние композитных частиц можно рассматривать как движение точечной частицы в специальном открытом бильярде. Применение такого подхода позволяет относительно просто установить ряд общих свойств столкновений композитных частиц. Так, была найдена полная матрица рассеяния композитных частиц, определяющая скорости всех компонент таких частиц после рассеяния по их скоростям до столкновения. Установле-

ны общие свойства матрицы рассеяния. Обнаружено, что, несмотря на абсолютно упругий характер взаимодействия всех элементов таких частиц, рассеяние заканчивается после конечного числа столкновений композитных частиц. Для небольшого числа внутренних степеней свободы максимально возможное число столкновений удается получить точно. В случае более сложных композитных частиц удается оценить число и время столкновений при их рассеянии. Кроме того, обнаружены необычные режимы рассеяния, при которых происходит обмен между внутренними и поступательными степенями свободы. Установлены эффекты, связанные с наличием у частиц небольшого числа внутренних степеней свободы.

2. БИЛЛИАРДНЫЙ ПОДХОД К СТОЛКНОВЕНИЮ ДВУХ КОМПОЗИТНЫХ ЧАСТИЦ

Рассмотрим столкновение двух композитных частиц в рамках бильярдного подхода. Под композитной частицей, следуя работе [2], будем понимать цилиндрическую оболочку с закрытыми торцами. Внутри оболочки находятся внутренние частицы, число которых соответствует числу внутренних степеней свободы такой сложной частицы. Разумеется, внутренние степени свободы взаимодействуют, или сталкиваются как друг с другом, так и с оболочкой. Будем предполагать, что столкновения между ними абсолютно упругие. В соответствии с этим первая частица характеризуется массой оболочки m_0 , ее длиной $2L_1$ и положением x_0 центра оболочки, а также массами и положениями внутренних точечных частиц, m_i и x_i (рис. 1). Целочисленный индекс i нумерует внутренние частицы и для первой компо-

зитной частицы принимает значения $i = 1, 2, \dots, k$. Вторая частица характеризуется подобным набором величин. Обозначим массу оболочки второй частицы m_{k+1} , положение ее центра x_{k+1} и ее длину $2L_2$. Число внутренних частиц во второй композитной частице обозначим целым числом n . В общем случае число внутренних степеней свободы частиц может не совпадать. Координаты внутренних частиц второй частицы обозначим $x_{k+2}, x_{k+3}, \dots, x_{k+n+1}$. Обратим внимание, что нумерация элементов каждой композитной частицы начинается с оболочки, а внутренние частицы нумеруются последовательно слева направо. Полная масса системы двух частиц

$$M = \sum_{i=0}^{k+n+1} m_i.$$

Положение всех компонент двух композитных частиц однозначно определяется вектором $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+n+1})$ в евклидовом пространстве размерности $k + n + 2$.

Теперь обсудим конфигурационное пространство двух композитных частиц. Конфигурационное пространство такой системы состоит из всех возможных положений композитных частиц и составляющих их компонент. Основное физическое ограничение заключается в непроницаемости всех компонент, образующих эти две композитные частицы. В одномерном случае, который и рассматривается в работе, это означает невозможность изменить первоначальный порядок расположения элементов или компонент вдоль одномерной оси их положений и движений (см. рис. 1).

Сформулируем условия, определяющие конфигурационное пространство. В первую очередь, это условие непроницаемости оболочек друг для друга:

$$x_{k+1} - x_0 \geq L_1 + L_2. \tag{1}$$

Геометрически это условие означает деление евклидового пространства \mathbb{R}^{k+n+2} гиперплоскостью размерности $k + n + 1$ на две части. Конфигурационное пространство принадлежит только одной из частей, соответствующей неравенству (1). Часть гиперплоскости $x_{k+1} - x_0 = L_1 + L_2$ образует его границу. Теперь учтем, что внутренние частицы каждой композитной частицы не могут ни покинуть оболочку, ни изменить порядок расположения внутри оболочки. Это приводит к следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &\geq -L_1, \\ x_2 - x_1 &\geq 0, \\ &\vdots \\ x_k - x_{k-1} &\geq 0, \\ x_0 - x_k &\geq -L_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Эта система неравенств определяет ограничения, возникающие для первой композитной частицы. Так, первое неравенство соответствует невозможности первой внутренней частицы выйти за пределы оболочки, т.е. стать левее ее. Следующие неравенства означают, что соответствующая внутренняя частица не может проникнуть через ближайшую внутреннюю частицу, расположенную левее ее. Наконец, последнее неравенство отражает невозможность самой правой внутренней частицы выйти за пределы оболочки и стать правее ее. Аналогичная система неравенств связана со второй композитной частицей:

$$\begin{aligned} x_{k+2} - x_{k+1} &\geq -L_2, \\ x_{k+3} - x_{k+2} &\geq 0, \\ &\vdots \\ x_{k+n+1} - x_{k+n} &\geq 0, \\ x_{k+1} - x_{k+n+1} &\geq -L_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Таким образом, возникает $k + n + 3$ условий или неравенств, определяющих конфигурационное пространство. Каждое из приведенных неравенств представляет собой гиперплоскость в евклидовом пространстве \mathbb{R}^{k+n+2} . В целом они ограничивают область пространства \mathbb{R}^{k+n+2} , которая и является конфигурационным пространством двух композитных частиц. Другими словами, конфигурационное пространство — это открытый выпуклый многогранник или полиэдр с границами, составленными из частей приведенных выше гиперплоскостей.

Разумеется, для описания динамики таких частиц следует задать не только положения, но и скорости движения оболочек и всех внутренних частиц. Между столкновениями их скорости постоянны и направлены вдоль оси x . Набор всех скоростей определим, вводя обозначение $\mathbf{v} = (\dot{x}_0, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{k+n+1})$. Этот набор сохраняется до момента столкновения внутренних частиц или внутренней частицы с оболочкой или самих оболочек. При этом изменение координат всех элементов композитных частиц определяется равенством $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$, где \mathbf{x}_0 — начальный набор положений всех элементов композитных частиц, принадлежащий конфигурационному пространству.

До момента столкновений движение всех элементов композитных частиц с постоянными скоростями задает параметрически прямую линию в конфигурационном пространстве. В момент столкновений эта линия достигает границы конфигурационного пространства. Границы конфигурационного пространства являются гиперповерхностями, определяемыми неравенствами (1)–(3). Каждая гиперплоскость, образующая границу, соответствует столкновению двух определенных элементов композитных частиц.

Таким образом, движение всех элементов композитных частиц между столкновениями можно рассматривать как движение одной бесструктурной частицы, но в конфигурационном пространстве размерности $k + n + 2$. При столкновении с границей конфигурационного пространства координаты этой бесструктурной частицы не меняются, а изменяются направление и величина ее скорости. Иными словами, происходит ее «отражение» от границ конфигурационного пространства. Характер изменения направления скорости и ее величины определяется законами сохранения энергии и импульса отдельных компонент. Легко заметить, что такое поведение напоминает движение частицы в многомерном полигональном бильярде. Для того чтобы аналогия стала полной, необходимо достичь правильного бильярдного закона отражения. Другими словами, при столкновении нормальная к гиперплоскости компонента скорости должна менять знак, а тангенциальная — сохраняться. Для достижения такого закона отражения перейдем к бильярдным координатам [2, 8]. В качестве бильярдных координат введем вектор $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{k+n+1})$, координаты которого связаны с исходными:

$$y_i = \sqrt{m_i} x_i, \quad i = 0, 1, \dots, k + n + 1,$$

Естественно, переход к таким координатам приводит к изменению компонент скоростей согласно

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (\dot{y}_0, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_{k+n+1}) = \\ &= (\sqrt{m_0} \dot{x}_0, \sqrt{m_1} \dot{x}_1, \dots, \sqrt{m_{k+n+1}} \dot{x}_{k+n+1}). \end{aligned}$$

Очевидное удобство таких координат заключается в том, что квадрат длины вектора скоростей теперь равен удвоенному значению кинетической энергии системы,

$$2E = \sum_{i=0}^{k+n+1} m_i \dot{x}_i^2 = \sum_{i=0}^{k+n+1} \dot{y}_i^2 = |\mathbf{u}|^2.$$

В бильярдных координатах закон сохранения энергии обеспечивает равенство длин векторов ско-

ростей до и после отражения от границ конфигурационного пространства. Легко проверить, что из закона сохранения импульса в новых координатах следует зеркальный закон отражения. Покажем это на примере отражения от границы, определяемой равенством в условии (1). В бильярдных координатах эта граница определяется уравнением

$$\frac{y_0}{\sqrt{m_0}} - \frac{y_{k+1}}{\sqrt{m_{k+1}}} = L_1 + L_2.$$

Эта граница представляет собой гиперплоскость с единичной нормалью

$$\mathbf{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{m_0 + m_{k+1}}} \times (-\sqrt{m_{k+1}}, 0, \dots, 0, \sqrt{m_0}, 0, \dots, 0). \quad (4)$$

Напомним, что при достижении этой границы бесструктурной частицей происходит столкновение только оболочек композитных частиц. Следовательно, меняются только скорости оболочек. Остальные элементы сохраняют свои скорости.

Теперь проверим бильярдный характер столкновения. Ясно, что для этого нужно проверить выполнение условий

$$\mathbf{u}_\perp = -\mathbf{u}'_\perp, \quad \mathbf{u}_\parallel = \mathbf{u}'_\parallel,$$

где $\mathbf{u}_\perp = u_\perp \mathbf{n}_0$ — нормальная к заданной гиперплоскости компонента скорости, а \mathbf{u}_\parallel — касательная. Штрихами помечены соответствующие компоненты скорости после столкновения. Вектор продольной скорости \mathbf{u}_\parallel определяется как скоростями внутренних частиц, не участвующих в столкновении оболочек, так и скоростями сталкивающихся оболочек. Компонента \mathbf{u}_\parallel , связанная с оболочками, может быть записана как $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau})$, где

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\sqrt{m_0 + m_{k+1}}} (\sqrt{m_0}, 0, \dots, 0, \sqrt{m_{k+1}}, 0, \dots, 0).$$

В координатном виде сохранение величины $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}$ записывается следующим образом:

$$\dot{y}_0 \sqrt{m_0} + \dot{y}_{k+1} \sqrt{m_{k+1}} = \dot{y}'_0 \sqrt{m_0} + \dot{y}'_{k+1} \sqrt{m_{k+1}}.$$

Возвращаясь к исходным координатам, легко заметить, что это равенство совпадает с законом сохранения импульса оболочек при столкновении:

$$m_0 \dot{x}_0 + m_{k+1} \dot{x}_{k+1} = m_0 \dot{x}'_0 + m_{k+1} \dot{x}'_{k+1}.$$

Проверим теперь изменение знака нормальной компоненты скорости \mathbf{u}_\perp . Для этого запишем равенство $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_0 = -\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}_0$ в координатной форме:

$$-\frac{\dot{y}_0}{\sqrt{m_0}} + \frac{\dot{y}_{k+1}}{\sqrt{m_{k+1}}} = -\frac{\dot{y}'_0}{\sqrt{m_0}} + \frac{\dot{y}'_{k+1}}{\sqrt{m_{k+1}}}.$$

Снова переходя к исходным координатам, получим закон упругого столкновения двух тел, известный со времен Ньютона [1]:

$$\dot{x}_0 - \dot{x}_{k+1} = -(\dot{x}'_0 - \dot{x}'_{k+1}).$$

При упругом столкновении двух тел разность их скоростей меняет знак. Этот закон — следствие законов сохранения энергии и импульса [1, 2]. Таким образом, отражение бесструктурной частицы от границы конфигурационного пространства происходит согласно зеркальному закону отражения. Абсолютно аналогично можно доказать зеркальность отражения от всех границ конфигурационного пространства в бильярдных координатах. Поэтому столкновение двух композитных частиц можно описывать как движение одной бесструктурной, точечной частицы в многомерном полигональном бильярде вида

$$\begin{aligned} \frac{y_0}{\sqrt{m_0}} - \frac{y_{k+1}}{\sqrt{m_{k+1}}} &\geq L_1 + L_2, \\ \frac{y_1}{\sqrt{m_1}} - \frac{y_0}{\sqrt{m_0}} &\geq -L_1, \\ \frac{y_2}{\sqrt{m_2}} - \frac{y_1}{\sqrt{m_1}} &\geq 0, \\ &\vdots \\ \frac{y_k}{\sqrt{m_k}} - \frac{y_{k-1}}{\sqrt{m_{k-1}}} &\geq 0, \\ \frac{y_0}{\sqrt{m_0}} - \frac{y_k}{\sqrt{m_k}} &\geq -L_1, \\ \frac{y_{k+2}}{\sqrt{m_{k+2}}} - \frac{y_{k+1}}{\sqrt{m_{k+1}}} &\geq -L_2, \\ \frac{y_{k+3}}{\sqrt{m_{k+3}}} - \frac{y_{k+2}}{\sqrt{m_{k+2}}} &\geq 0, \\ &\vdots \\ \frac{y_{k+n+1}}{\sqrt{m_{k+n+1}}} - \frac{y_{k+n}}{\sqrt{m_{k+n}}} &\geq 0, \\ \frac{y_{k+1}}{\sqrt{m_{k+1}}} - \frac{y_{k+n+1}}{\sqrt{m_{k+n+1}}} &\geq -L_2. \end{aligned}$$

Из приведенной системы уравнений видно, что форма этого бильярда в многомерном пространстве определяется исключительно значениями масс отдельных компонент системы и линейными размерами оболочек. Далее для изучения столкновений композитных частиц будем использовать такой бильярдный подход.

При описании формы бильярда в многомерном пространстве важное значение играют нормали к граням бильярда. Запишем выражения для внутренних нормалей всех граней бильярда. Нормаль для выбранной грани легко получить из равенства, определяющего эту грань. Как показано

выше, грань, соответствующая столкновению оболочек, имеет нормаль, вид которой задает выражение (4). Четыре грани, достижение траекторией которых соответствует столкновению крайних внутренних частиц с оболочками, имеют нормали вида

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= \frac{1}{\sqrt{m_0 + m_1}} (-\sqrt{m_1}, \sqrt{m_0}, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{n}_{k+1} &= \frac{1}{\sqrt{m_0 + m_k}} \times \\ &\times (\sqrt{m_k}, 0, \dots, 0, -\sqrt{m_0}, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{n}_{k+2} &= \frac{1}{\sqrt{m_{k+1} + m_{k+2}}} \times \\ &\times (0, \dots, 0, -\sqrt{m_{k+2}}, \sqrt{m_{k+1}}, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{n}_{k+n+2} &= \frac{1}{\sqrt{m_{k+1} + m_{k+n+1}}} \times \\ &\times (0, \dots, 0, \sqrt{m_{k+n+1}}, 0, \dots, 0, -\sqrt{m_{k+1}}). \end{aligned} \tag{5}$$

Остальные нормали к $k+n-2$ граням, соответствующим столкновениям между двумя внутренними степенями свободы, имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_p &= \frac{1}{\sqrt{m_{\gamma-1} + m_\gamma}} \times \\ &\times (0, \dots, 0, -\sqrt{m_{\gamma-1}}, \sqrt{m_\gamma}, 0, \dots, 0), \end{aligned} \tag{6}$$

где индекс p пробегает значения из диапазона $2, \dots, k, k+3, \dots, k+n+1$. Далее будем нумеровать грани бильярда и соответствующие нормали греческим индексом $\gamma = 0, 1, \dots, k+n+2$.

Естественно, что знание нормалей всех граней позволяет легко установить значения всех углов эффективного бильярда. В свою очередь, это определяет форму полиэдра. Знание углов важно и с другой точки зрения. Так, для замкнутых n -мерных бильярдов в форме полиэдра, углы которого соизмеримы с π , доказана конечность возможных направлений траектории движения в замкнутых многогранниках [8]. Для открытого бильярда, который получается удалением одной или двух граней такого полиэдра, это означает конечность возможных направлений вылета из открытого бильярда при заданном направлении влета в открытый бильярд. С физической точки зрения, это означает конечность спектра возможных скоростей после рассеяния двух композитных частиц при фиксированных начальных значениях скоростей отдельных компонент. Другими словами, при всевозможных положениях внутренних частиц в момент столкновения значения скоростей отдельных компонент после рассеяния будут принимать соответствующие значения только из конечного множества значений.

Естественно, что дискретность скоростей отдельных компонент скорости \mathbf{u} автоматически означает дискретность таких важных физических величин, как, например, скоростей центров масс сталкивающихся композитных частиц и относительных скоростей движения внутренних частиц:

$$v_{c1} = \frac{\sum_{i=0}^k \sqrt{m_i} u_i}{\sum_{i=0}^k m_i},$$

$$v_{c2} = \frac{\sum_{i=k+1}^{k+n+1} \sqrt{m_i} u_i}{\sum_{i=k+1}^{k+n+1} m_i}.$$

Здесь v_{c1} и v_{c2} — скорости центра масс соответственно первой и второй композитных частиц. Таким образом, в результате подобного рассеяния, в зависимости от состояния внутренних степеней свободы, скорости композитных частиц будут принимать лишь конечное число значений. Такое поведение совершенно не типично для классических систем. Оно более напоминает сценарий квантового рассеяния с конечным спектром.

Для понимания устройства границы бильярда важную роль играют несколько направлений в конфигурационном пространстве. Эти направления имеют простой физический смысл. Так, направление σ определяет величину скорости центра масс $u_c = \mathbf{u} \cdot \sigma$ двух композитных частиц. Это направление в конфигурационном пространстве определяется единичным вектором

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{M}} (\sqrt{m_0}, \sqrt{m_1}, \dots, \sqrt{m_{k+n+1}}).$$

Скорость центра масс композитных частиц сохраняется со временем даже при произвольных столкновениях их компонент.

Еще два важных направления определяют скорости центра масс отдельных композитных частиц, $u_{c1} = \mathbf{u} \cdot \sigma_1$ и $u_{c2} = \mathbf{u} \cdot \sigma_2$. Эти единичные векторы имеют компоненты

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{M_1}} (\sqrt{m_0}, \sqrt{m_1}, \dots, \sqrt{m_k}, 0, 0, \dots, 0),$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{M_2}} \times$$

$$\times (0, 0, \dots, 0, \sqrt{m_{k+1}}, \sqrt{m_{k+2}}, \dots, \sqrt{m_{k+n+1}}),$$

где $M_1 = \sum_{i=0}^k m_i$ и $M_2 = \sum_{i=k+1}^{k+n+1} m_i$ — массы соответствующих композитных частиц. Значение скоростей центра масс композитных частиц меняется только при отражении бильярдной траектории от

грани с нормалью (4); отражение от любых других граней не приводит к их изменению.

Важный смысл имеет также величина $\mathbf{u} \cdot (\sigma_2 - \sigma_1)$. Отрицательная величина этой разности для достаточно удаленных частиц однозначно указывает на неизбежность столкновения оболочек частиц в будущем, поскольку первая частица догоняет вторую. Верно и обратное. Положительная разность $\mathbf{u} \cdot (\sigma_2 - \sigma_1)$ означает, что столкновение произошло ранее и более не произойдет.

Вернемся теперь к обсуждению формы эффективного бильярда. Отметим, что в случае движения бильярдной траектории вдоль векторов σ_1 и σ_2 столкновения между отдельными внутренними степенями свободы будут отсутствовать. Как следствие, такая траектория может столкнуться только с одной гранью бильярда, которая соответствует столкновению оболочек частиц. Из этого следует, что рассматриваемый бильярд является открытым по направлениям $-\sigma_1$ и σ_2 . В рамках бильярдного подхода этот факт интерпретируется просто как возможность ухода частицы 1 на $-\infty$ и частицы 2 на $+\infty$. Эти соображения позволяют понять, что добавление двух граней к конфигурационному пространству приведет к закрытому бильярду в форме полиэдра. Действительно, можем поместить композитные частицы между двумя стенками, которые будут препятствовать уходу на бесконечность. Это соответствует добавлению к исходной системе неравенств (2), (3) пары условий:

$$\frac{y_0}{m_0} > C_1, \quad \frac{y_{k+1}}{m_k + 1} < C_2.$$

Для такого суммарного конфигурационного пространства отсутствуют направления движения, вдоль которых можно уйти в бесконечность, не встречая на пути препятствий. Это означает, что исходный бильярд, дополненный двумя гиперплоскостями, соответствующими приведенным неравенствам, будет закрытым. Следует заметить, что в выборе гиперплоскостей-«крышек» имеется некоторая свобода. Поэтому выберем в качестве таких гиперплоскостей две гиперплоскости, нормальные векторам $-\sigma_1$ и σ_2 . Это можно сделать, так как очевидно, что, ограничив положение центра массы частицы, мы ограничим и положение ее оболочки. Следовательно, исходный бильярд, дополненный парой гиперплоскостей с нормальями $-\sigma_1$ и σ_2 , станет закрытым.

Таким образом, мы полностью описали форму эквивалентного бильярда. Она представляет собой многомерный полиэдр, лишенный двух граней. По-

сколько все грани бильярда плоские, для изучения траекторий в нем удобно использовать метод спрямления траекторий или принцип Шварца [8, 9]. Этот принцип заключается в замене отражения траектории от грани отражением бильярда относительно этой грани с сохранением прямолинейного движения траектории в достроенном объеме.

Повторяя эту процедуру необходимое число раз, можно добиться полного спрямления участка траектории, соответствующего всему процессу рассеяния. В частности, используя простые соображения, можно понять, что количество столкновений при рассеянии композитных частиц будет конечным. Для этого рассмотрим полиэдр, закрытый гранями, которые описаны выше. Ясно, что возврат бильярдной траектории после столкновений с другими гранями на эти грани означает окончание процесса рассеяния и переход к кинематическому разлету композитных частиц.

Теперь используем теорему Пуанкаре о возврате траекторий в окрестность начальной точки за конечное время [10]. Это означает окончание рассеяния композитных частиц после конечного числа столкновений. Естественно, согласно этой теореме, мера нуль траекторий может не возвращаться в окрестность начальной точки. Для гамильтоновых систем общего положения этим свойством обладают неподвижные точки гиперболического и эллиптического типов и сепаратрисы, входящие и выходящие из гиперболических точек за бесконечное время. Однако для бильярдов в полигонах в фазовом пространстве отсутствуют неподвижные точки. Это следует из доказанной теоремы о выходе траекторий из многогранного угла [8, 11] за конечное время. Поэтому следует ожидать, что в замкнутом полиэдре бильярдная траектория после конечного числа столкновений возвращается на соответствующие начальные грани, с которых началась бильярдная траектория. Более того, поскольку интересующая нас окрестность возврата представляет собой всю отсутствующую грань бильярда, а не малую окрестность точки, число столкновений с гранями будет относительно невелико.

Перейдем теперь к описанию характеристик рассеяния композитных частиц. Основное внимание сосредоточим на матрице рассеяния, полностью описывающей процесс рассеяния композитных частиц. Вначале определим матрицу рассеяния при столкновении бильярдной траектории с гранью γ бильярда. Эта матрица \hat{S}^γ показывает, как преобразуется скорость бильярдной частицы при столкновении с

соответствующей гранью бильярда:

$$\mathbf{u}' = \hat{S}^\gamma \mathbf{u}.$$

Чтобы определить компоненты этой матрицы, выясним, как преобразуются компоненты скорости бильярдной частицы в результате столкновения с гранью γ . Как уже обсуждалось выше, при таком столкновении будет выполняться зеркальный закон отражения. Иными словами, компонента скорости \mathbf{u}_\perp , нормальная к выбранной грани с нормалью \mathbf{n}^γ ($\mathbf{u}_\perp \equiv \mathbf{n}^\gamma (\mathbf{n}^\gamma \cdot \mathbf{u})$), изменит знак на противоположный, а тангенциальная компонента скорости ($\mathbf{u}_\parallel \equiv \mathbf{u} - \mathbf{n}^\gamma (\mathbf{n}^\gamma \cdot \mathbf{u})$) сохранится:

$$\mathbf{u}'_\perp = -\mathbf{u}_\perp, \quad \mathbf{u}'_\parallel = \mathbf{u}_\parallel.$$

В результате преобразование скорости при отражении от грани γ с нормалью \mathbf{n}^γ имеет вид

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u}'_\perp + \mathbf{u}'_\parallel = \mathbf{u} - 2\mathbf{n}^\gamma (\mathbf{n}^\gamma \cdot \mathbf{u}).$$

Это преобразование легко переписать в матричном виде, определив, таким образом, матричные коэффициенты матрицы рассеяния \hat{S}^γ_{ij} :

$$\mathbf{u}'_i = \hat{S}^\gamma_{ij} \mathbf{u}_j = (\delta_{ij} - 2n_i^\gamma n_j^\gamma) \mathbf{u}_j. \quad (7)$$

Таким образом, после первого столкновения с гранью под номером 0, соответствующей столкновению оболочек, вектор скорости преобразуется как

$$\mathbf{u}' = \hat{S}^0 \mathbf{u}.$$

Каждое последующее столкновение с соответствующей гранью γ будет приводить к умножению матрицы преобразования скоростей на матрицу рассеяния \hat{S}^γ . Процесс будет продолжаться до последнего столкновения траектории с гранью, соответствующей последнему столкновению оболочек. В результате полная матрица рассеяния \hat{S} будет иметь вид

$$\hat{S}(m_0, \dots, m_{n+k+1}, \Gamma) = \hat{S}^0 \dots \hat{S}^\gamma \dots \hat{S}^0, \quad (8)$$

где Γ означает маршрут $(0, \dots, \gamma, \dots, 0)$, по которому траектория сталкивается с гранями бильярда. В результате каждому маршруту соответствует строго определенная матрица рассеяния, зависящая только от величин масс всех компонент сталкивающихся композитных частиц. Этот результат является очень важным, поскольку означает, что матрица рассеяния не зависит явно от вектора скорости частицы. Она определяется гораздо более грубой характеристикой — маршрутом посещения траекторией

граней бильярда в процессе рассеяния. С физической точки зрения, это означает, что она определяется порядком столкновения компонент композитных частиц. Для композитных частиц с малым числом внутренних степеней свободы (k, n) общее число таких маршрутов относительно невелико. Оно может быть оценено через максимальное число возможных столкновений N_{max} как $(N_{max} - 2)^{k+n+2}$. Здесь учтено, что в маршруте первая и последняя грани фиксированы и что нельзя столкнуться с одной гранью два раза подряд. Таким образом, число маршрутов определяет точное число возможных матриц рассеяния при фиксированных массах всех компонент композитной частицы.

В наиболее простом случае рассеяния композитной частицы с одной степенью свободы на бесструктурной частице число столкновений легко находится (см. разд. 3). Для более сложного случая рассеяния композитной частицы с одной степенью свободы на другой такой же композитной частице величина N_{max} оценена в разд. 4. В общем случае оценку числа N_{max} можно получить, основываясь на значении N_{max} для случая рассеяния двух композитных частиц с одной внутренней степенью свободы. Для этого достаточно заменить все внутренние степени свободы одной с массой, равной сумме масс внутренних степеней свободы.

Конечность числа столкновений означает, что множество матриц рассеяния, определяющих рассеяние композитных частиц с внутренними степенями свободы, также конечно. Более того, набор этих матриц легко получить аналитически (см. соотношение (8)). Интересно отметить, что такая своеобразная дискретность матриц рассеяния не характерна для классических систем и скорее напоминает процесс квантового рассеяния с дискретным энергетическим спектром. С увеличением числа внутренних степеней свободы число матриц рассеяния в спектре быстро растет, превращая его в сплошной.

В заключение раздела обратим внимание, что сохранение скорости движения бесструктурной частицы вдоль оси σ указывает на возможность изучения ее поведения с помощью проекции траекторий на гиперплоскость, перпендикулярную этому вектору. При таком проектировании получаем бильярд меньшей размерности $k + n + 1$. В случаях столкновений композитной частицы с одной внутренней степенью свободы с бесструктурной частицей ($k = 1$ и $n = 0$) и двух композитных частиц с одной внутренней степенью свободы ($k = 1$ и $n = 1$) проекция конфигурационного пространства оказывается соответственно двумерной и трехмерной. Поэтому дви-

жение траекторий в таких бильярдах может быть полностью исследовано. Ниже рассмотрим детально эти два простых случая столкновений композитных частиц.

3. СТОЛКНОВЕНИЯ КОМПОЗИТНОЙ ЧАСТИЦЫ С ОДНОЙ ВНУТРЕННЕЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ С БЕССТРУКТУРНОЙ ЧАСТИЦЕЙ

Упругие столкновения двух бесструктурных частиц были изучены еще при возникновении классической механики. Собственно эти исследования привели к пониманию роли законов сохранения энергии и импульса. В идеализированном виде основные свойства таких столкновений сводятся к нулевому времени взаимодействия или столкновения и сохранению разности скоростей частиц до и после удара. Рассмотрим теперь, какие принципиально новые явления могут наблюдаться в случае наличия у частиц внутренних степеней свободы. Начнем с самого простого случая столкновения частицы, обладающей одной внутренней степенью свободы, с обычной бесструктурной частицей. Этот случай соответствует столкновению композитных частиц при частном выборе значений параметров

$$k = 1, \quad n = 0, \quad m_3 = 0, \quad L_2 = 0.$$

Конфигурационное пространство такой системы упрощается и задается неравенствами

$$-\frac{y_0}{\sqrt{m_0}} + \frac{y_2}{\sqrt{m_2}} \geq L_1,$$

$$-\frac{y_0}{\sqrt{m_0}} + \frac{y_1}{\sqrt{m_1}} \geq -L_1,$$

$$\frac{y_0}{\sqrt{m_0}} - \frac{y_1}{\sqrt{m_1}} \geq -L_1.$$

Теперь конфигурационное пространство — это область в трехмерном пространстве, ограниченная тремя плоскостями (рис. 2). Как и ранее, столкновение композитной частицы с бесструктурной эквивалентно движению одной точечной частицы в конфигурационном пространстве, показанном на рис. 2, с зеркальными отражениями от его границ. Достижение бильярдной траекторией граней этого бильярда соответствует столкновению двух определенных компонент. Так, достижение «нижней» грани с нормалью

$$\mathbf{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{m_0 + m_2}} (-\sqrt{m_2}, 0, \sqrt{m_0})$$

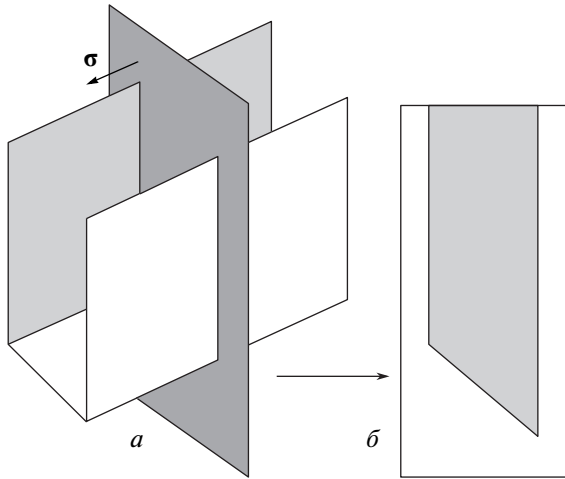


Рис. 2. Конфигурационное пространство столкновения композитной частицы с бесструктурной и сечение его плоскостью с нормалью σ (а) и граница сечения этой плоскости конфигурационным пространством (б)

соответствует столкновению оболочки композитной частицы с бесструктурной частицей. Достижение «боковых» граней с нормальными

$$\mathbf{n}_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{m_0 + m_1}} (-\sqrt{m_1}, \sqrt{m_0}, 0)$$

соответствует столкновению внутренней частицы с левой или правой границей оболочки композитной частицы. Очевидно, что такой билиард является открытым по двум направлениям, каждое из которых соответствует уходу на бесконечность композитной и бесструктурной частиц. Проекция скорости вдоль билиардной траектории на направление

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{M}} (\sqrt{m_0}, \sqrt{m_1}, \sqrt{m_2})$$

определяет величину скорости движения центра масс бесструктурной и композитной частиц. Эта скорость не меняется даже при столкновении частиц. Геометрически это соответствует тому, что грани билиарда параллельны этому вектору (см. рис. 2). Поэтому сконцентрируем внимание на нетривиальной динамике билиардных траекторий в системе отсчета центра масс. Для этого выберем сечение конфигурационного пространства плоскостью, например $\mathbf{y} \cdot \sigma = 0$, и спроецируем билиардную траекторию на эту плоскость. Проекция исходного трехмерного билиарда на такую плоскость будет представлять собой полубесконечную полосу шириной

$$2L_1 \sqrt{m_0 m_1 / (m_0 + m_1)},$$

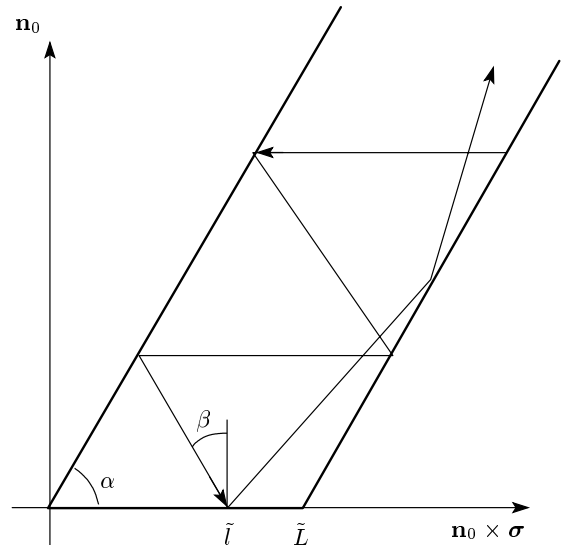


Рис. 3. Билиард, эквивалентный столкновению композитной частицы с бесструктурной в проекции на плоскость, перпендикулярную направлению σ . Угол α определяет форму билиарда, β — угол первого падения траектории на грань, соответствующую столкновению бесструктурной частицы и оболочки композитной частицы;
 $l = l \sqrt{m_1(m_0 + m_2)}/M$

срезанную под углом

$$\alpha = \arctg \sqrt{m_0 M / m_1 m_2}$$

(рис. 3). Этот угол фактически является единственным параметром, который определяет форму билиарда. Длина основания полосы

$$\tilde{L} = 2L_1 \sqrt{m_1(m_0 + m_2)}/M.$$

Важно отметить тот факт, что процедура проецирования на плоскость, перпендикулярную σ , сохраняет билиардные свойства траектории. Это следует из свойства сохранения вектора скорости вдоль σ . Другими словами, для описания взаимодействия частиц в системе центра масс достаточно рассмотреть движение траекторий в простом планарном билиарде, изображенном на рис. 3. Используя принцип Шварца спрямления траектории [8, 9], легко найти число столкновений N композитной частицы с бесструктурной частицей в процессе рассеяния (см. Приложение):

$$N = 1 + \left[\frac{\beta + \arccos(l \cos \beta / 2L_1)}{2\alpha} \right],$$

где квадратными скобками обозначена целая часть числа, l — расстояние между бесструктурной и внутренней частицами в момент первого столкновения

композиционной частицы с бесструктурной, а β — угол падения траектории на нижнюю грань в этот момент. Эти параметры играют роль начальных условий. Именно они определяют число столкновений композиционной частицы с бесструктурной частицей в процессе рассеяния.

Кроме того, при спрямлении траектории легко вычислить длину Δl траектории между первым и последним столкновениями оболочки с бесструктурной частицей. Соответственно, зная скорость u движения эффективной точечной частицы в бильярде, легко оценить время рассеяния:

$$\Delta t_{int} = \frac{\Delta l}{u} \approx \sqrt{\frac{m_1(m_0 + m_2)}{M}} \times \frac{2L_1}{\sqrt{2E - P^2/M}} \frac{\sin(2\alpha)(N - 1)}{\cos \beta},$$

где E — суммарная кинетическая энергия, а P — суммарный импульс системы сталкивающихся частиц. Легко заметить, что время взаимодействия существенно зависит от числа столкновений N и начальных условий β . В зависимости от значений параметров α , β и l/L_1 число столкновений меняется в интервале $1 \leq N \leq N_{max}$. Следует подчеркнуть, что максимально возможное число столкновений $N_{max} = 1 + [\pi/2\alpha]$ определяется только соотношением масс и не зависит от условий столкновения. Для вырожденного случая, при котором угол 2α соизмерим с $\pi = 2k\alpha$, где k — целое число, имеем $N_{max} = 1 + \pi/2\alpha$.

Таким образом, при рассеянии композиционной частицы с очень легкой оболочкой ($m_0 \ll m_1, m_2$) на бесструктурной частице число столкновений может быть сколь угодно велико. Интересно отметить, что при отсутствии информации о начальных данных (β и l) возникает специфическая непредсказуемость даже числа столкновений при рассеянии таких частиц. В этом случае можно указать только спектр возможных значений.

Следующей важной количественной характеристикой столкновения частиц является матрица рассеяния. Матрица рассеяния \hat{S} связывает начальные скорости всех компонент с их скоростями после рассеяния:

$$\begin{pmatrix} u'_0 \\ u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \hat{S} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь u_i — скорости соответствующих компонент ($i = 0, 1, 2$) до первого столкновения, а u'_i — скорости после последнего столкновения бесструктурной

частицы с оболочкой композиционной частицы. Полученный с использованием принципа Шварца точный вид матрицы рассеяния \hat{S} приведен в Приложении (формула (15)).

Важно отметить универсальность матрицы рассеяния. Действительно, из вида матрицы рассеяния \hat{S} (см. Приложение) ясно, что изменение скоростей в результате рассеяния частиц определяется только соотношением масс и числом столкновений N . Более тонкие детали не влияют на характер рассеяния. Зависимость процесса рассеяния от начальных условий содержится только в общем числе столкновений. Еще одно важное свойство — это унитарность матрицы \hat{S} . Это означает, что $\hat{S} \cdot \hat{S}^+ = I$, где I — единичная матрица, а «+» обозначает транспонирование матрицы. Действительно, при использовании спрямления траектории ясно, что длина вектора скорости не меняется. Возврат к исходному бильярду сводится к поворотам и отражениям, что не меняет величину скорости, а меняет только ее направление.

От скоростей отдельных компонент в бильярдной системе координат (u_0, u_1, u_2) удобно перейти к величинам, имеющим ясный физический смысл: скорости центра масс композиционной частицы,

$$v_c = \frac{\sqrt{m_0}u_0 + \sqrt{m_1}u_1}{m_0 + m_1},$$

скорости движения внутренней частицы относительно центра масс композиционной частицы,

$$v_i = \sqrt{\frac{m_0}{m_1}} \frac{-\sqrt{m_1}u_0 + \sqrt{m_0}u_1}{m_0 + m_1},$$

и скорости бесструктурной частицы, $v_2 = u_2/\sqrt{m_2}$. Относительную скорость v_i можно рассматривать как «температуру» композиционной частицы. Закон изменения этих величин в результате столкновений имеет вид

$$\begin{pmatrix} v'_c \\ v'_i \\ v'_2 \end{pmatrix} = \hat{S}_r \begin{pmatrix} v_c \\ v_i \\ v_2 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Точный вид матрицы рассеяния \hat{S}_r также получен в Приложении (см. соотношение (16)). Соотношение (9) однозначно определяет характеристики скоростей композиционной и бесструктурной частиц после рассеяния. Однако интересно обсудить, как модифицируется закон столкновения Ньютона $e(V_1 - V_2) = -(V'_1 - V'_2)$ при наличии внутренней степени свободы композиционной частицы.

Для этого запишем матрицу поворота, входящую в \hat{S}_r , в базисе собственных векторов (см. Приложе-

ние). В результате получим следующие три соотношения между величинами v_c , v_i и v_2 до и после рассеяния:

$$\begin{aligned} v'_c - v'_2 - \frac{m_1}{m_0} v'_i &= (v_c - v_2) \times \\ &\times \left[\cos(2N\alpha) - \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_0 M}} \sin(2N\alpha) \right] - \\ &- \frac{m_1}{m_0} v_i \left[\cos(2N\alpha) + \sqrt{\frac{M m_0}{m_1 m_2}} \sin(2N\alpha) \right], \\ v'_c - v'_2 + \frac{M}{m_2} v'_i &= (v_c - v_2) \times \\ &\times \left[\cos(2N\alpha) + \sqrt{\frac{M m_0}{m_1 m_2}} \sin(2N\alpha) \right] + \\ &+ \frac{M}{m_2} v_i \left[\cos(2N\alpha) - \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_0 M}} \sin(2N\alpha) \right], \\ (m_0 + m_1) v_c + m_2 v_2 &= (m_0 + m_1) v'_c + m_2 v'_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Очевидно, что третье соотношение соответствует закону сохранения импульса.

Два первых уравнения играют роль дополнительных уравнений, определяющих столкновения частиц. Из этих соотношений следует обобщенный закон Ньютона для столкновения композитной и бесструктурной частиц:

$$v'_c - v'_2 = -e(v_c - v_2) - e_t(v'_i - v_i). \quad (11)$$

Далее будем называть e и e_t коэффициентами рассеяния. Простым, но важным следствием этого соотношения является зависимость скоростей частиц после столкновений от изменения скорости внутренней частицы. Прежде всего заметим, что коэффициенты, входящие в это соотношение, точно вычисляются в явном виде:

$$\begin{aligned} e &= 1, \\ e_t &= \sqrt{\frac{m_1 M}{m_0 m_2}} \frac{\sin(2N\alpha)}{1 - \cos(2N\alpha)}. \end{aligned}$$

Равенство коэффициента e единице указывает на упругую природу отдельных столкновений в процессе рассеяния. Из вида выражения для коэффициента e_t следует, что его величина может принимать любые положительные значения и зависит от числа столкновений N . Это означает чувствительность этого коэффициента к состоянию внутренней степени свободы в начальный момент столкновений. В определенном смысле возникает специфическая непредсказуемость результата рассеяния при отсутствии данных о внутренних степенях свободы.

Однако в качестве характеристики рассеяния частиц можно ввести эффективный коэффициент восстановления e_{eff} . Определим этот эффективный коэффициент восстановления согласно соотношению

$$V'_1 - V'_2 = -e_{eff}(V_1 - V_2).$$

Обратим внимание, что величина эффективного коэффициента восстановления легко определяется экспериментально. Важно подчеркнуть, что этот коэффициент, в отличие от обычного коэффициента восстановления, зависит не только от свойств материала, но и от относительных скоростей сближения частиц. Из соотношений (10) можно получить зависимость e_{eff} от начальных параметров столкновения:

$$\begin{aligned} e_{eff} &= -\frac{v'_c - v'_2}{v_c - v_2} = \\ &= -\left[\cos(2N\alpha) + \sqrt{\frac{m_1 M}{m_0 m_2}} \frac{v_i}{v_c - v_2} \sin(2N\alpha) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Легко заметить, что этот коэффициент достаточно удобен в качестве характеристики степени неупругости столкновений частиц. Соотношение (12) позволяет проанализировать процесс рассеяния в ряде предельных случаев.

Наиболее простой из них — случай легкой внутренней частицы, $m_1 \rightarrow 0$. В этом случае очевидно, что рассеяние произойдет за одно столкновение $N = 1$, а из зависимости α от масс следует, что $\alpha \rightarrow \pi/2$ и, соответственно, $\cos(2N\alpha) \rightarrow -1$. Иными словами выполняется обычный закон Ньютона для упругих столкновений пары тел с $e_{eff} \approx 1$.

Также легко получить выражение для эффективного коэффициента восстановления легкой бесструктурной частицы ($m_2 \rightarrow 0$) на композитной в случае однократного столкновения. При этом рост величины $\sqrt{m_1 M / m_0 m_2}$ компенсируется уменьшением величины $\sin(2\alpha) \rightarrow 0$. В результате получим

$$e_{eff} \approx 1 - 2 \frac{m_1}{m_0} \frac{v_i}{v_c - v_2}.$$

Основной особенностью в этом предельном случае можно считать зависимость эффективного коэффициента восстановления от скорости сближения частиц до столкновения.

Третьим важным предельным случаем является случай рассеяния композитной частицы с легкой оболочкой, $m_0 \rightarrow 0$. Поскольку для такой частицы $v_i \rightarrow 0$, процесс рассеяния будет происходить с большим числом столкновений $N \gg 1$, таким что $2N\alpha \rightarrow \pi$. Благодаря этому величина $v_i \sin(2N\alpha)$

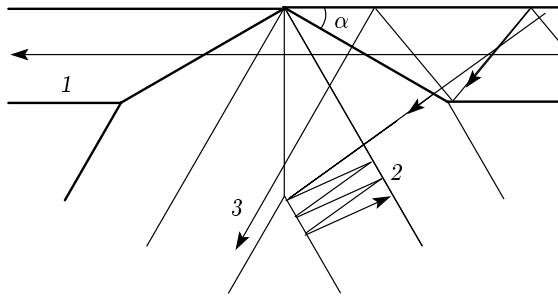


Рис. 4. Траектории, соответствующие особым режимам рассеяния композитной частицы на бесструктурной: 1 — «квазиупругое» рассеяние; 2 — нагрев внутренней степени свободы; 3 — охлаждение внутренней степени свободы

стремится к нулю быстрее, чем $\sqrt{m_0}$. В результате сохраняется обычный закон Ньютона для столкновения упругих тел, $e_{eff} \approx 1$.

Также отметим важный частный случай, когда $\cos(2N\alpha) = 1$. При этом $e_{eff} = 1$, иными словами, рассеяние происходит по упругому закону, несмотря на многократные соударения частиц в процессе рассеяния и конечное время взаимодействия. В определенном смысле можно говорить об особом типе упругих столкновений, когда изменение скоростей подчиняется упругому закону, но время взаимодействия конечно и может быть достаточно большим. В графической интерпретации такой режим рассеяния будет выглядеть, как траектория 1 на рис. 4.

Вернемся к тому факту, что величина e_{eff} , согласно соотношению (12), зависит от $v_c - v_2$ по гиперболическому закону, т. е. с уменьшением разности скоростей сталкивающихся частиц коэффициент восстановления растет, а при увеличении — стремится к определенной константе (рис. 5). На фоне этой общей зависимости легко заметить наличие резких скачков в величине (12). Этот интересный эффект скачкообразного характера изменения эффективного коэффициента восстановления определяется наличием малого числа внутренних степеней свободы. Структура этих скачков усложняется в режимах с большим числом $N_{max} \gg 1$. Следует ожидать, что при увеличении числа внутренних степеней свободы амплитуды скачков будут убывать и в пределе макроскопического числа внутренних степеней свободы исчезнут.

В экспериментах по определению упругих свойств материалов обычно измеряется эффективный коэффициент восстановления при столкновении двух шаров из исследуемого материала.

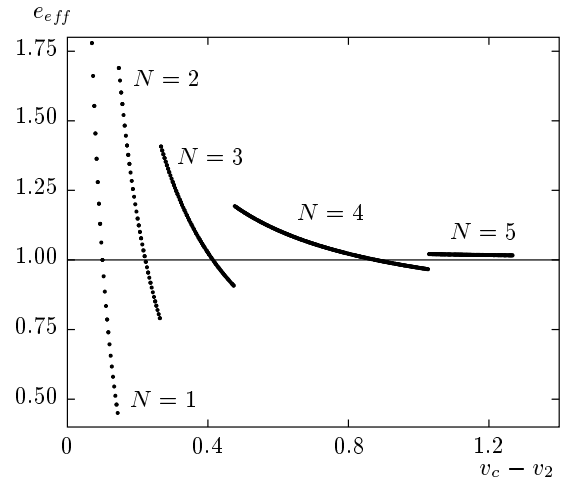


Рис. 5. Зависимость эффективного коэффициента восстановления от относительной скорости центров масс сталкивающихся частиц. Параметры частиц: $m_0 = 1.1$, $m_1 = 2.0$, $m_2 = 1.0$, $v_i = 0.2$, $N_{max} = 2$. Отдельные гладкие участки зависимости соответствуют рассеянию с одинаковым числом столкновений N

Любопытно отметить, что в экспериментах с реальными материалами графики зависимости этого коэффициента от относительной скорости сталкивающихся тел качественно ведут себя похожим образом. При больших относительных скоростях столкновения металлических шаров коэффициент восстановления выходит на стационарное значение. При уменьшении этой скорости коэффициент восстановления увеличивается, но по понятным причинам не может превысить единицу [12].

Обсудим теперь новые эффекты, возникающие при столкновении таких частиц. Прежде всего заметим, что относительная скорость разлета композитной и бесструктурной частиц может превышать начальную скорость сближения частиц до столкновения. Это достаточно необычный и интересный эффект, связанный с наличием внутренней степени свободы у композитной частицы, особенно с учетом упомянутого выше закона столкновения макроскопических тел. Согласно ньютоновскому закону, скорость разлета тел меньше скорости столкновений, и только при абсолютно упругих столкновениях эти скорости равны по величине. Разумеется, такой характер движения после столкновений рассмотренных выше частиц также возможен при определенных соотношениях масс и начальных скоростей. С физической точки зрения, относительная скорость поступательного движения частиц при столкновении изменяет-

ся лишь за счет энергии внутренней степени свободы композитной частицы. Это указывает на перераспределение энергии между этими двумя степенями свободы при рассеянии частиц. Важно отметить, что направление и количество переданной энергии для заданного числа столкновений определяются лишь числом и массами отдельных элементов системы, т. е., в определенном смысле, параметрами «материала».

Рассмотрим специфические режимы рассеяния, возникающие в процессе столкновения композитной и бесструктурной частиц. Для этого используем графическую интерпретацию, выполненную в рамках бильярдных представлений и с применением принципа спрямления траектории. На рис. 4 представлено несколько особых траекторий для различных режимов рассеяния. Как уже упоминалось ранее, траектория 1 соответствует вырожденному случаю — «квазиупругому» сценарию рассеяния. Для простой интерпретации закономерностей процесса рассеяния достаточно помнить, что проекция скорости на ось полосы бильярда соответствует относительной скорости движения композитной и бесструктурной частиц, а проекция на поперечное направление — скорости внутренней частицы. Исходя из этого, легко понять, что в результате рассеяния в общем случае будет происходить перераспределение энергии между внутренней степенью свободы и кинетической энергией относительного движения частиц. При этом возможны два предельных случая. Например, при реализации траектории 2 почти вся энергия относительного движения перешла в энергию внутренней степени свободы композитной частицы. Иными словами, эффективный коэффициент восстановления e_{eff} в данном случае близок к нулю. Более того, используя соотношение (12), легко получить оценку отношения скоростей $v_i/(v_c - v_2)$, при котором такой эффект будет наблюдаться для случая однократного столкновения частиц в процессе рассеяния:

$$\frac{v_i}{v_c - v_2} \approx -\frac{1}{2} \left(\frac{m_2}{M} - \frac{m_0}{m_1} \right).$$

Отметим при этом, что из-за обычных свойств эквивалентного бильярда невозможно рассеяние с $e_{eff} = 0$, поскольку наличие такой бильярдной траектории приводило бы к нарушению обратимости по времени. Однако для определенных значений масс величину e_{eff} можно сделать сколь угодно близкой к нулю. Например, при $m_0 = 0.25$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ минимальное значение $e_{eff} \approx 0.066$ при $v_i/(v_c - v_2) = -0.12$.

В случае, соответствующем траектории 3 на

рис. 4, наблюдается обратная ситуация. Видно, что произошли практически полная остановка внутренней частицы и возрастание относительной скорости движения композитной и бесструктурной частиц после столкновения. Критерий такого режима рассеяния легко получить, поскольку из анализа соотношений (10) следует, что

$$v'_i = -v_i \cos(2N\alpha) + (v_c - v_2) \sqrt{\frac{m_0 m_2}{m_1 M}} \sin(2N\alpha).$$

Соответственно, при

$$\frac{v_i}{v_c - v_2} = \sqrt{\frac{m_0 m_2}{m_1 M}} \operatorname{tg}(2N\alpha)$$

будет происходить полное охлаждение внутренней степени свободы.

Таким образом, в рамках бильярдного подхода установлены точные закономерности столкновения бесструктурной частицы с композитной частицей с одной внутренней степенью свободы и полностью описаны все возможные режимы столкновений.

4. СТОЛКНОВЕНИЯ КОМПОЗИТНЫХ ЧАСТИЦ С ОДНОЙ ВНУТРЕННЕЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Перейдем к рассмотрению более сложного случая рассеяния двух композитных частиц, каждая из которых обладает одной внутренней степенью свободы. Как уже обсуждалось выше, динамика такой системы сводится к движению бесструктурной частицы в определенном бильярде в четырехмерном евклидовом пространстве. Конфигурационное пространство и форма этого бильярда определяются неравенствами

$$\begin{aligned} \frac{y_0}{\sqrt{m_0}} - \frac{y_2}{\sqrt{m_2}} &\geq L_1 + L_2, \\ \left| \frac{y_1}{\sqrt{m_1}} - \frac{y_0}{\sqrt{m_0}} \right| &\geq -L_1, \\ \left| \frac{y_3}{\sqrt{m_3}} - \frac{y_2}{\sqrt{m_2}} \right| &\geq -L_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Учитывая сохранение скорости центра масс частиц, можно выделить направление σ , движение вдоль которого будет равномерным и прямолинейным:

$$\sigma = \frac{1}{M} (\sqrt{m_0}, \sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \sqrt{m_3}).$$

Поэтому удобно спроецировать такой четырехмерный бильярд на гиперповерхность, ортогональную

вектору σ . Важно отметить, что поскольку все нормали четырехмерного бильярда ортогональны σ , проекция траектории сохраняет бильярдные свойства. С физической точки зрения, такой прием соответствует разделению движений на продольное, в направлении σ , и поперечное к нему. В качестве ортов на гиперповерхности, ортогональной вектору σ , удобно выбрать следующие три вектора:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{m_0 + m_1}} (-\sqrt{m_1}, \sqrt{m_0}, 0, 0),$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{m_2 + m_3}} (0, 0, -\sqrt{m_3}, \sqrt{m_2}),$$

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{M}} \left(\sqrt{m_0 \frac{m_2 + m_3}{m_0 + m_1}}, \sqrt{m_1 \frac{m_2 + m_3}{m_0 + m_1}}, -\sqrt{m_2 \frac{m_0 + m_1}{m_2 + m_3}}, -\sqrt{m_3 \frac{m_0 + m_1}{m_2 + m_3}} \right).$$

Отметим, что переход к базису (e_1, e_2, e_3, σ) является не более чем поворотом системы координат, а потому траектория системы в конфигурационном пространстве сохраняет бильярдные свойства. Выбор именно таких ортов продиктован, в первую очередь, их простым физическим смыслом. Проекция вектора из конфигурационного пространства на орты e_1 и e_2 несет информацию об относительном положении внутренних частиц в соответствующих оболочках, а проекция на орт e_3 содержит информацию о расстоянии между центрами масс композитных частиц. В таком базисе проектирование на гиперплоскость, ортогональную σ , становится тривиальной процедурой. Далее будем рассматривать все свойства бильярда и траекторий системы в координатном представлении, построенном на базисе векторов (e_1, e_2, e_3) , используя координаты z_1, z_2, z_3 :

$$z = (z_1, z_2, z_3) = (y \cdot e_1, y \cdot e_2, y \cdot e_3).$$

Сечение четырехмерного бильярда (13) гиперплоскостью, ортогональной σ , приводит к трехмерному бильярду. Легко показать, что границы этого трехмерного бильярда в координатах z определяются следующими неравенствами:

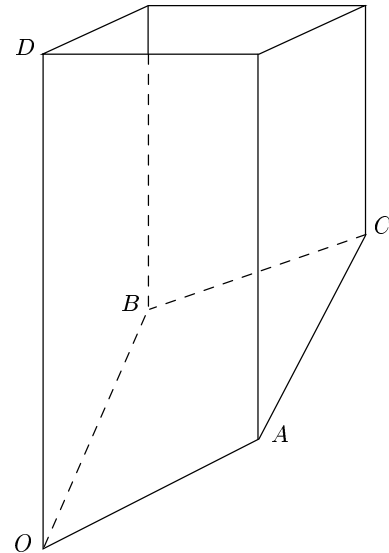


Рис. 6. Часть трехмерного открытого бильярда, который возникает при сечении четырехмерного конфигурационного пространства гиперплоскостью, ортогональной направлению σ . Верхняя часть этого бильярда уходит на бесконечность

$$-\sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_0 + m_1)(m_0 + m_2)}} z_1 + \sqrt{\frac{m_0 m_3}{(m_0 + m_2)(m_2 + m_3)}} z_2 + \sqrt{\frac{M m_0 m_2}{(m_0 + m_2)(m_0 + m_1)(m_2 + m_3)}} z_3 \geq (L_1 + L_2) \sqrt{\frac{m_0 m_2}{m_0 + m_2}},$$

$$|z_1| \leq L_1 \sqrt{\frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}}, \quad |z_2| \leq L_2 \sqrt{\frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}}.$$

Вид соответствующего бильярда приведен на рис. 6. Этот открытый бильярд имеет форму бесконечного «цилиндра» прямоугольного сечения, часть которого ограничивается секущей плоскостью. Достижение бильярдной траекторией вертикальных стенок соответствует столкновениям внутренних частиц с оболочками. Столкновение траектории с «нижней» гранью, образованной секущей плоскостью, эквивалентно столкновению оболочек. Интересной особенностью этого бильярда является то, что все углы в нем определяются исключительно соотношением масс отдельных элементов композитных частиц. Форма такого бильярда полностью

определяется тремя геометрическими параметрами: соотношением сторон в прямоугольном сечении,

$$\rho = \frac{L_2}{L_1} \sqrt{\frac{m_2 m_3 (m_0 + m_1)}{m_0 m_1 (m_2 + m_3)}},$$

и двумя углами между «стенками» цилиндра и его «дном»,

$$\alpha_1 = \arccos \sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_0 + m_2)(m_0 + m_1)}},$$

$$\alpha_2 = \arccos \sqrt{\frac{m_0 m_3}{(m_0 + m_2)(m_2 + m_3)}}.$$

Иными словами, два бильярда с одинаковыми ρ , α_1 и α_2 будут обладать одинаковыми характеристиками рассеяния. В определенном смысле эти величины можно рассматривать как критерии подобия рассеяния частиц с внутренними степенями свободы.

Форма полученного бильярда удобна для того, чтобы оценить максимальное число столкновений оболочек композитных частиц, N_{max} , в процессе рассеяния. Действительно, движение вдоль оси z_3 связано с относительным движением композитных частиц. Если координата z_3 уменьшается, то частицы сближаются и наоборот. Поскольку столкновение частицы с вертикальными стенками бильярда не может привести к изменению компоненты скорости, направленной вдоль оси z_3 , для определения числа столкновений оболочек в процессе рассеяния необходимо подсчитать число столкновений с нижней гранью бильярда $OABC$ (см. рис. 6). Напомним, что достижение бильярдной траекторией грани $OABC$ и соответствует столкновению оболочек.

Таким образом, для оценки числа столкновений можно ограничиться рассмотрением движения частицы внутри трехгранного угла при вершине O , как показано на рис. 6, поскольку в оставшейся части число столкновений не превышает двух. Этот угол образован тремя двугранными углами, которые легко вычислить зная нормали к соответствующим граням. Величины этих углов составляют

$$\arccos \sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_0 + m_2)(m_0 + m_1)}},$$

$$\arccos \sqrt{\frac{m_0 m_3}{(m_0 + m_2)(m_2 + m_3)}},$$

$$\frac{\pi}{2}.$$

Поскольку угол, образуемый гранями DOB и DOA , — прямой, удобно объединить четыре такие фигуры в одну с общим ребром OD . Разумеется, это

согласовано с принципом Шварца спрямления траектории. В результате образуется четырехгранный угол, каждая грань которого соответствует столкновению оболочек композитных частиц. Величина этого телесного угла составляет

$$\Omega = 4 \left(\arccos \sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_0 + m_2)(m_0 + m_1)}} + \arccos \sqrt{\frac{m_0 m_3}{(m_0 + m_2)(m_2 + m_3)}} - \frac{\pi}{2} \right).$$

В процессе спрямления траектории каждое новое достроенное отражение такого четырехгранного угла не пересекается с предыдущим. При этом все достроенные углы имеют общую вершину O . Очевидно, что все отражения в сумме будут заполнять не более чем половину полного телесного угла 4π . Это означает, что сумма углов всех достроенных бильярдов при вершине O не может превышать величину 2π . Таким образом, оценка верхней границы числа соударений оболочек при столкновении двух частиц примет следующий вид:

$$N_{max} = 2 + \left[\frac{2\pi}{\Omega} \right] =$$

$$= 2 + \left[\frac{\pi}{2} \left(\arccos \sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_0 + m_2)(m_0 + m_1)}} + \arccos \sqrt{\frac{m_0 m_3}{(m_0 + m_2)(m_2 + m_3)}} - \frac{\pi}{2} \right)^{-1} \right]. \quad (14)$$

Здесь квадратными скобками обозначена целая часть числа. Важным следствием этой формулы является независимость величины N_{max} от скоростей компонент взаимодействующих частиц. Она определяется лишь значениями масс и их геометрическими размерами.

Отдельно рассмотрим частный случай столкновения одинаковых композитных частиц, $m_0 = m_2$, $m_1 = m_3$. Этот случай приобретает особое значение при рассмотрении, например, газа композитных частиц. Поскольку массы оболочек в этом случае равны, их взаимодействие сводится в точности к обмену импульсами. При этом оболочки как бы проникают друг в друга. Это позволяет приближенно рассматривать задачу столкновения двух композитных частиц как задачу столкновения композитной частицы, имеющей удвоенную массу оболочки, с бесструктурной частицей. Однако стоит учитывать, что фактически оболочка состоит из двух половинок. Поэтому оценка максимального числа столкновений из предыдущего раздела обобщается на случай столкнове-

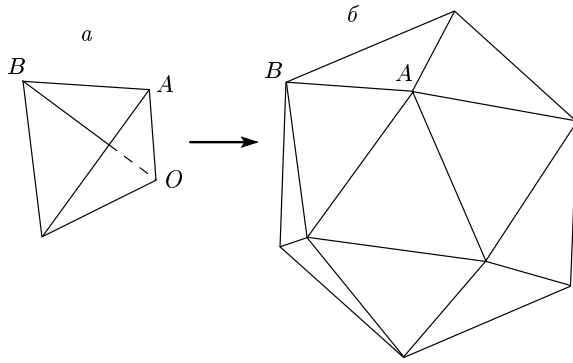


Рис. 7. Трехгранный угол со специально выбранными углами при вершине O (*а*) и результат применения к нему принципа Шварца (*б*). Пролет по прямолинейной траектории через полученный многогранник дает представление о числе столкновений частиц, равному числу пересечений с невидимыми гранями OAB , которые расположены внутри многогранника. Точки O , A и B соответствуют приведенным на рис. 6

ния двух одинаковых композитных частиц следующим образом:

$$N_{max} \approx 2 \left(1 + \frac{\pi}{\arctan \sqrt{2 + 2m_0/m_1}} \right).$$

Для оценки максимального времени взаимодействия композитных частиц заметим, что фигура, построенная по принципу Шварца, находится внутри некоторой сферы (рис. 7). Радиус этой сферы соответствует диагонали нижней грани OC бильярда. Поскольку движение вдоль бильярдной траектории происходит с постоянной скоростью, верхнюю границу времени взаимодействия можно оценить как время, затрачиваемое на пролет такой сферы по диаметру:

$$\tau_{max} = \frac{2}{\sqrt{E}} \sqrt{\frac{m_0 + m_2}{M}} \times \sqrt{L_1^2 m_1 \left(1 + \frac{m_3}{m_2} \right) + L_2^2 m_3 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)}.$$

Таким образом, время столкновений двух композитных частиц при рассеянии конечно. Важно отметить, что эффекты, связанные с наличием внутренних степеней свободы, проявляются в необычном характере рассеяния. Как показано выше, несмотря на абсолютную упругость взаимодействий всех элементов композитных частиц, режим свободного движения начинается только после конечного числа столк-

новений $N \geq N_{max}$ и процесс рассеяния занимает конечное время $t \leq \tau_{max}$. Это качественно отличается от упругого рассеяния бесструктурных частиц.

Перейдем теперь к получению матрицы рассеяния для случая двух композитных частиц с одной внутренней степенью свободы. В разд. 2 обсуждалось устройство этой матрицы в общем случае. Как уже обсуждалось, матрица рассеяния двух композитных частиц состоит из произведения матриц, соответствующих столкновению отдельных компонент системы, записанных в порядке отражения бильярдной траектории от граней эквивалентного бильярда. В рассматриваемом случае граней бильярда пять, однако различных матриц рассеяния на грани всего три. Параллельные боковые грани имеют одинаковые матрицы рассеяния. Матрица, соответствующая столкновению оболочек композитных частиц между собой, имеет вид

$$\hat{S}_0 = \begin{pmatrix} \frac{m_0 - m_2}{m_0 + m_2} & 0 & \frac{2\sqrt{m_0 m_2}}{m_0 + m_2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2\sqrt{m_0 m_2}}{m_0 + m_2} & 0 & \frac{m_2 - m_0}{m_0 + m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а матрицы, определяющие столкновение оболочек композитных частиц с соответствующими внутренними частицами, —

$$\hat{S}_1 = \begin{pmatrix} \frac{m_0 - m_1}{m_0 + m_1} & \frac{2\sqrt{m_0 m_1}}{m_0 + m_1} & 0 & 0 \\ \frac{2\sqrt{m_0 m_1}}{m_0 + m_1} & \frac{m_1 - m_0}{m_0 + m_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} & \frac{2\sqrt{m_2 m_3}}{m_2 + m_3} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{m_2 m_3}}{m_2 + m_3} & \frac{m_3 - m_2}{m_2 + m_3} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, скорость бильярдной траектории в процессе рассеяния преобразуется как

$$\mathbf{u}' = \hat{S}_0 \dots \hat{S}_\gamma \dots \hat{S}_0 \mathbf{u} = \hat{S}(m_0, \dots, m_{n+k+1}, \Gamma) \mathbf{u},$$

$$\gamma = 0, 1, 2,$$

где $\Gamma = (0, \dots, \gamma, \dots, 0)$ — порядок отражения от граней бильярда, или маршрут траектории. Как

уже обсуждалось ранее, общее число вариантов матрицы \hat{S} конечно. Иными словами, для фиксированного направления исходной траектории можно указать конечный набор возможных маршрутов посещения граней при рассеянии. Этот факт несколько напоминает квантовый процесс рассеяния. Разумеется, для выбранной определенной траектории будет реализован лишь один определенный вариант матрицы рассеяния. Отметим, что матрицы S_1 и S_2 коммутируют друг с другом и поэтому маршруты, различающиеся перестановкой этих матриц или, точнее, соответствующих им адресов, приводят к одинаковым матрицам рассеяния. Таким образом, конечное множество различных полных матриц рассеяния уменьшается.

Общий вид матрицы рассеяния позволяет вывести обобщение ньютоновского закона рассеяния и в рассматриваемом случае. Для этого следует проанализировать, как изменяются в процессе рассеяния величины скорости центра масс системы, разности скоростей центров масс композитных частиц и скорости внутренних частиц относительно скоростей центров масс соответствующих композитных частиц. Естественно, что эти величины связаны со значениями скорости в бильярдном пространстве u_i простыми линейными соотношениями:

$$v_c = \frac{\sqrt{m_0}u_0 + \sqrt{m_1}u_1 + \sqrt{m_2}u_2 + \sqrt{m_3}u_3}{m_0 + m_1 + m_2 + m_3},$$

$$v_{c1} - v_{c2} = \frac{\sqrt{m_0}u_0 + \sqrt{m_1}u_1}{m_0 + m_1} - \frac{\sqrt{m_2}u_2 + \sqrt{m_3}u_3}{m_2 + m_3},$$

$$v_{i1} = \frac{u_1}{m_1} - v_{c1}, \quad v_{i2} = \frac{u_3}{m_3} - v_{c2}.$$

Из вида этих соотношений следует, что существует и обратное преобразование. Поскольку величины u_i преобразуются в результате рассеяния в u'_i по линейному закону, очевидно, что набор величин $(v_c, v_{c1} - v_{c2}, v_{i1}, v_{i2})$ также будет преобразовываться по линейному закону. Из закона сохранения импульса следует, что $v'_c = v_c$, следовательно, в процессе рассеяния тройка величин $(v_{c1} - v_{c2}, v_{i1}, v_{i2})$ линейным образом преобразуется в $(v'_{c1} - v'_{c2}, v'_{i1}, v'_{i2})$ отдельно от v_c . Благодаря этому можно записать обобщение закона Ньютона на рассматриваемый случай рассеяния композитных частиц:

$$v'_{c1} - v'_{c2} = \beta_0(v_{c1} - v_{c2}) + \beta_1(v'_{i1} - v_{i1}) + \beta_2(v'_{i2} - v_{i2}),$$

где величины β_i определяются матрицей рассеяния и поэтому зависят от масс всех компонент сталкива-

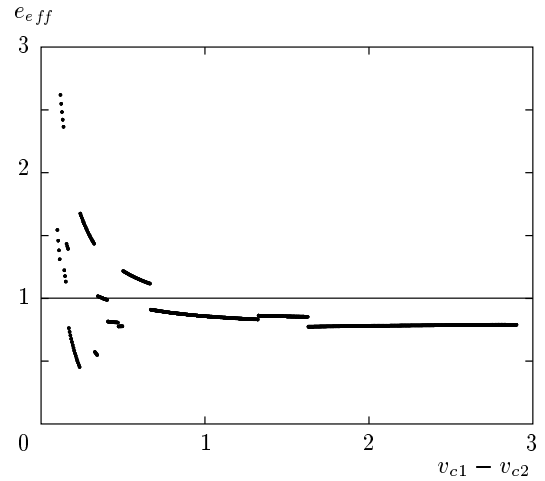


Рис. 8. Зависимость эффективного коэффициента восстановления от разности скоростей центров масс сталкивающихся композитных частиц с одной внутренней степенью свободы. Параметры частиц: $m_0 = 0.7, m_1 = 1.2, m_2 = 0.6, m_3 = 1.5, v_{i1} = -0.2, v_{i2} = -0.3$. Отдельные гладкие участки зависимости соответствуют рассеянию с одинаковым порядком столкновений компонент частиц в процессе рассеяния

ющихся частиц и от маршрута столкновений в процессе рассеяния. Величину

$$\begin{aligned} \beta_1(v'_{i1} - v_{i1}) + \beta_2(v'_{i2} - v_{i2}) &= \\ &= \left(\sum_{i=1}^2 \beta_i \right) \frac{\beta_1(v'_{i1} - v_{i1}) + \beta_2(v'_{i2} - v_{i2})}{\left(\sum_{i=1}^2 \beta_i \right)} \equiv \\ &\equiv \left(\sum_{i=1}^2 \beta_i \right) \langle (v'_i - v_i) \rangle \end{aligned}$$

можно рассматривать как усредненное значение изменения скоростей внутренних степеней свободы. Поэтому, с этой точки зрения, коэффициенты $\beta_i / \sum_{i=1}^2 \beta_i$ можно интерпретировать как вероятности изменения скорости i -ой внутренней степени свободы в процессе рассеяния. Таким образом, обобщенный закон столкновений композитных частиц можно записать в виде

$$v'_{c1} - v'_{c2} = \beta_0(v_{c1} - v_{c2}) + \left(\sum_{i=1}^2 \beta_i \right) \langle (v'_i - v_i) \rangle.$$

Следует ожидать, что такая форма обобщенного закона столкновений сохранится и в случае большего числа внутренних степеней свободы. Из этого закона следует, что механизм перераспределения энергии между внутренними степенями свободы и кине-

тической энергией поступательного движения имеет место и в рассматриваемом случае. Действительно, результаты численного расчета зависимости эффективного коэффициента e_{eff} от скорости сталкивающихся частиц (рис. 8) показывают возможность рассеяния с величиной $e_{eff} > 1$. Кроме того, характерные скачки эффективного коэффициента восстановления наблюдаются и в этом случае. Отдельные участки между скачками соответствуют движению траекторий по одному маршруту.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследованы новые эффекты, возникающие в процессе рассеяния двух композитных частиц. Результаты носят общий характер и распространяются на рассеяния любых частиц, содержащих малое число внутренних степеней свободы. Важным для этих эффектов является только взаимодействие между внутренними степенями свободы и поступательной степенью свободы объекта. Получена матрица рассеяния композитных частиц и установлены ее общие свойства. Выведен обобщенный ньютоновский закон столкновений двух композитных частиц, инвариантный относительно числа внутренних степеней свободы. Есть все основания утверждать, что такой модифицированный ньютоновский закон столкновений будет справедливым для процессов рассеяния композитных частиц с любым числом степеней свободы. Полученный закон столкновения прямо указывает на механизм перехода к неупругому рассеянию частиц, все компоненты которых взаимодействуют абсолютно упругим образом. Его суть состоит в перераспределении энергии между кинетической энергией движения композитных частиц и энергией их внутренних степеней свободы. Найдены критерии, при выполнении которых этот механизм приводит как к абсолютно неупругому рассеянию, так и к рассеянию с коэффициентом восстановления, превышающим единицу.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Определим N — общее число столкновений между композитной частицей с одной степенью свободы и бесструктурной частицей. Рассмотрим движение точечной частицы в бильярде, приведенном выше на рис. 3. Для поиска N используем метод спрямления траектории, реализация которого показана на рис. 9. При попадании траектории на грань бильярда вместо отражения траектории происхо-

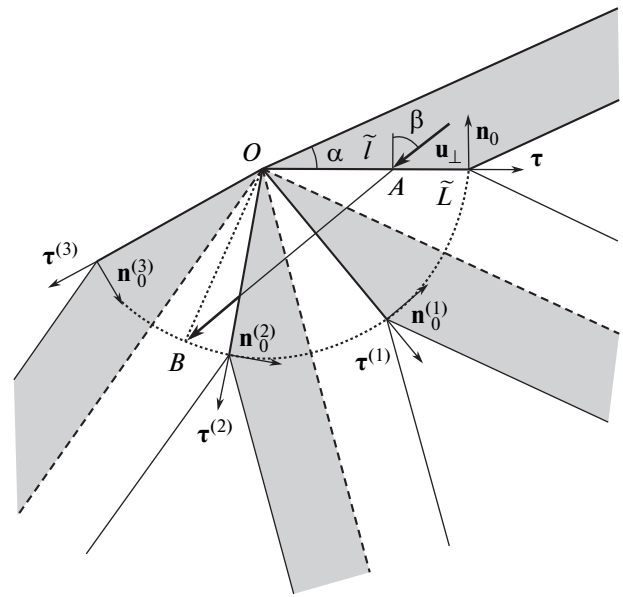


Рис. 9. Прием Шварца спрямления траектории для бильярда в ограниченной полосе. Видно, что преобразование базиса $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}$, связанного с гранью OA , сводится к повороту в выбранной системе координат на угол, кратный 2α . Для изображенного случая базис векторов $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}$ в результате рассеяния поворачивается на угол $-\beta\alpha$

дит отражение бильярда относительно этой грани. При этом траектория проникает в отраженный бильярд, сохраняя свое направление. Грань бильярда OA соответствует столкновению бесструктурной частицы с оболочкой композитной частицы. Поэтому процесс рассеяния можно рассматривать как пересечение прямолинейной траекторией всех образов грани OA , возникающих при последовательных отражениях. Из построения очевидно, что все такие отражения будут иметь общую точку O . Длина этой грани составляет \tilde{L} . Поэтому спрямленная траектория может пересекать отражения грани OA лишь внутри окружности с центром в точке O и радиуса \tilde{L} . Выход за эту окружность будет означать окончание процесса рассеяния (точка B) и переход к кинематическому разлету частиц. Соответственно, количество отражений грани OA , которые пересекает прямолинейная траектория, определяет N — полное число столкновений частиц в процессе рассеяния. Чтобы определить N , используем теорему синусов для треугольника OAB :

$$\frac{\tilde{L}}{\cos \beta} = \frac{\tilde{l}}{\sin(\pi - \beta - \angle AOB)},$$

где

$$\tilde{L} = 2L_1 \sqrt{\frac{m_1(m_0+m_2)}{M}}, \quad \tilde{l} = l \sqrt{\frac{m_1(m_0+m_2)}{M}},$$

а l — расстояние между бесструктурной и внутренней частицами в момент первого столкновения композитной частицы с бесструктурной. Учитывая, что нас интересует, сколько целых углов 2α помещается в $\angle AOB$, получаем

$$N = 1 + \left\lfloor \frac{\angle AOB}{2\alpha} \right\rfloor.$$

В итоге формула для общего числа столкновений будет иметь такой вид:

$$N = 1 + \left\lfloor \frac{1}{2\alpha} \left[\beta + \arccos \left(\frac{l}{2L_1} \cos \beta \right) \right] \right\rfloor.$$

Прием спрямления траектории позволяет не только вычислить число столкновений, но и определить, как преобразуются скорости компонент си-

стемы в результате рассеяния. Из рис. 9 легко понять, что искомое преобразование сводится к разложению неизменного вектора скорости в новом базисе $(\boldsymbol{\tau}^{(N)}, \mathbf{n}^{(N)}, \boldsymbol{\sigma})$, повернутом на угол $-2N\alpha$ в плоскости рисунка относительно исходного базиса $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma})$. Это означает, что в базисе $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma})$ преобразование скорости сводится к простому повороту ее вектора на угол $2N\alpha$ вокруг вектора $\boldsymbol{\sigma}$. Иными словами, матрица рассеяния $\hat{S}_{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma}}$ в таком базисе имеет простой вид:

$$\hat{S}_{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \cos(2N\alpha) & \sin(2N\alpha) & 0 \\ -\sin(2N\alpha) & \cos(2N\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы перейти к базису, связанному со скоростями $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, необходимо поместить матрицу рассеяния $\hat{S}_{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma}}$ в обкладку, соответствующие представлению векторов $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma}$ в исходном базисе:

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{m_2}{m_0+m_2}} & -\sqrt{\frac{m_1 m_0}{M(m_0+m_2)}} & \sqrt{\frac{m_0}{M}} \\ 0 & \sqrt{\frac{m_0+m_2}{M}} & \sqrt{\frac{m_1}{M}} \\ \sqrt{\frac{m_0}{m_0+m_2}} & -\sqrt{\frac{m_1 m_2}{M(m_0+m_2)}} & \sqrt{\frac{m_2}{M}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2N\alpha) & \sin(2N\alpha) & 0 \\ -\sin(2N\alpha) & \cos(2N\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{m_2}{m_0+m_2}} & 0 & \sqrt{\frac{m_0}{m_0+m_2}} \\ -\sqrt{\frac{m_1 m_0}{M(m_0+m_2)}} & \sqrt{\frac{m_0+m_2}{M}} & -\sqrt{\frac{m_1 m_2}{M(m_0+m_2)}} \\ \sqrt{\frac{m_0}{M}} & \sqrt{\frac{m_1}{M}} & \sqrt{\frac{m_2}{M}} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Такая матрица рассеяния \hat{S} описывает преобразование скоростей отдельных компонент системы \mathbf{u}_i в процессе рассеяния:

$$\begin{pmatrix} u'_0 \\ u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \hat{S} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Далее следует перейти к более физически понятным величинам v_c, v_i и v_2 , которые описывают соответственно скорость центра масс композитной частицы, относительную скорость внутренней степени свободы и скорость бесструктурной частицы:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} v'_c \\ v'_i \\ v'_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{m_0}}{m_0 + m_1} & \frac{\sqrt{m_1}}{m_0 + m_1} & 0 \\ -\frac{\sqrt{m_0}}{m_0 + m_1} & \frac{m_0}{\sqrt{m_1}(m_0 + m_1)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{m_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{m_2}{m_0 + m_2}} & -\sqrt{\frac{m_1 m_0}{M(m_0 + m_2)}} & \sqrt{\frac{m_0}{M}} \\ 0 & \sqrt{\frac{m_0 + m_2}{M}} & \sqrt{\frac{m_1}{M}} \\ \sqrt{\frac{m_0}{m_0 + m_2}} & -\sqrt{\frac{m_1 m_2}{M(m_0 + m_2)}} & \sqrt{\frac{m_2}{M}} \end{pmatrix} \times \\
 &\times \begin{pmatrix} \cos(2N\alpha) & \sin(2N\alpha) & 0 \\ -\sin(2N\alpha) & \cos(2N\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{m_2}{m_0 + m_2}} & 0 & \sqrt{\frac{m_0}{m_0 + m_2}} \\ -\sqrt{\frac{m_1 m_0}{M(m_0 + m_2)}} & \sqrt{\frac{m_0 + m_2}{M}} & -\sqrt{\frac{m_1 m_2}{M(m_0 + m_2)}} \\ \sqrt{m_0/M} & \sqrt{m_1/M} & \sqrt{m_2/M} \end{pmatrix} \times \\
 &\times \begin{pmatrix} \sqrt{m_0} & -\frac{m_1}{\sqrt{m_0}} & 0 \\ \sqrt{m_1} & \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c \\ v_i \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Такая запись результата процесса рассеяния, несмотря на некоторую громоздкость, позволяет найти комбинации величин v_c , v_i и v_2 , преобразующиеся наиболее простым способом. Для этого запишем матрицу поворота вокруг оси σ в базе собственных векторов:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} v'_c \\ v'_i \\ v'_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{m_0}}{m_0 + m_1} & \frac{\sqrt{m_1}}{m_0 + m_1} & 0 \\ -\frac{\sqrt{m_0}}{m_0 + m_1} & \frac{m_0}{\sqrt{m_1}(m_0 + m_1)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{m_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{m_2}{m_0 + m_2}} & -\sqrt{\frac{m_1 m_0}{M(m_0 + m_2)}} & \sqrt{\frac{m_0}{M}} \\ 0 & \sqrt{\frac{m_0 + m_2}{M}} & \sqrt{\frac{m_1}{M}} \\ \sqrt{\frac{m_0}{m_0 + m_2}} & -\sqrt{\frac{m_1 m_2}{M(m_0 + m_2)}} & \sqrt{\frac{m_2}{M}} \end{pmatrix} \times \\
 &\times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -i & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2N\alpha) + i \sin(2N\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2N\alpha) - i \sin(2N\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 & 0 \\ 1/2 & i/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \\
 &\times \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{m_2}{m_0 + m_2}} & 0 & \sqrt{\frac{m_0}{m_0 + m_2}} \\ -\sqrt{\frac{m_1 m_0}{M(m_0 + m_2)}} & \sqrt{\frac{m_0 + m_2}{M}} & -\sqrt{\frac{m_1 m_2}{M(m_0 + m_2)}} \\ \sqrt{m_0/M} & \sqrt{m_1/M} & \sqrt{m_2/M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{m_0} & -\frac{m_1}{\sqrt{m_0}} & 0 \\ \sqrt{m_1} & \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c \\ v_i \\ v_2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Из этой записи видно, что существуют три комбинации величин v_c , v_i и v_2 , которые преобразуются

в процессе рассеяния просто умножением на некоторую величину:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{m_2}{m_0+m_2}} & 0 & \sqrt{\frac{m_0}{m_0+m_2}} \\ -\sqrt{\frac{m_1 m_0}{M(m_0+m_2)}} & \sqrt{\frac{m_0+m_2}{M}} & -\sqrt{\frac{m_1 m_2}{M(m_0+m_2)}} \\ \sqrt{m_0/M} & \sqrt{m_1/M} & \sqrt{m_2/M} \end{pmatrix} \times \\
\times \begin{pmatrix} \sqrt{m_0} & -\frac{m_1}{\sqrt{m_0}} & 0 \\ \sqrt{m_1} & \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_c \\ v'_i \\ v'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2N\alpha) + i \sin(2N\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2N\alpha) - i \sin(2N\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \\
\times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{m_2}{m_0+m_2}} & 0 & \sqrt{\frac{m_0}{m_0+m_2}} \\ -\sqrt{\frac{m_1 m_0}{M(m_0+m_2)}} & \sqrt{\frac{m_0+m_2}{M}} & -\sqrt{\frac{m_1 m_2}{M(m_0+m_2)}} \\ \sqrt{m_0/M} & \sqrt{m_1/M} & \sqrt{m_2/M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{m_0} & -\frac{m_1}{\sqrt{m_0}} & 0 \\ \sqrt{m_1} & \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c \\ v_i \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

После вычислений оказывается, что две комбинации, в совокупности с законами их преобразования, эквивалентны друг другу с точностью до эрмитова сопряжения. Поэтому можно рассматривать преобразование действительной и мнимой частей исходной комплексной комбинации отдельно. Таким образом, для величин v_c , v_i и v_2 в результате рассеяния выполняются соотношения (10). Первые два из них позволяют получить обобщение ньютоновского закона столкновения на случай рассеяния композитной частицы с одной степенью свободы на бесструктурной частице. Третье соотношение соответствует закону сохранения импульса в системе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Козлов, Д. В. Трещев, *Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами*, Изд-во МГУ, Москва (1991), с. 168.
2. В. В. Яновский, А. В. Тур, Ю. Н. Масловский, *ЖЭТФ* **133**, 220 (2008).
3. Г. Шилл, *Катенаны, ротаксаны и узлы*, Мир, Москва (1973).
4. B. W. Smith, M. Monthioux, and D. E. Luzzi, *Nature* **396**, 323 (1998).
5. M. Monthioux, *Carbon* **40**, 1809 (2002).
6. B. Wang, L. Vukovic, and P. Kral, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 186808 (2008).
7. J. E. Green, J. W. Choi, A. Boukai et al., *Nature* **445**, 414 (2007).
8. Г. А. Гальперин, А. Н. Земляков, *Математические бильярды*, Наука, Москва (1990).
9. Г. А. Гальперин, Н. И. Чернов, *Биллиарды и хаос*, Знание, Москва (1991).
10. H. Poincaré, *Acta Matem.* **13**, 1 (1890).
11. Я. Г. Синай, *УМН* **33**, 229 (1987).
12. В. Гольдсмит, *Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел*, Изд-во лит-ры по строительству, Москва (1965).