ЖЭТФ, 2013, том 144, вып. 3 (9), стр. 552–559

СЕМЕЙСТВА РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ И СТРУКТУРНЫЕ ПЕРЕХОДЫ МЕЖДУ НИМИ

Ю. Н. Овчинников*

Max-Planck Institute for Physics of Complex Systems
01187, Dresden, Germany

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
117334, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 26 марта 2013 г.

Посвящается памяти академика Анатолия Ивановича Ларкина

Получены решения обобщенного уравнения Гинзбурга–Ландау в сверхпроводниках при значении параметра Гинзбурга–Ландау κ близком к единице. Исследованы семейства решений с произвольным числом n квантов потока в элементарной ячейке. Показано, что при определенных условиях в окрестности T_c возникает каскад фазовых переходов между различными структурами в магнитном поле. Получены алгебраические уравнения для определения границ сосуществования различных фаз на плоскости $\{T, H_0\}$.

DOI: 10.7868/S0044451013090083

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения Гинзбурга–Ландау [1] имеют N-вихревые решения при произвольном положении нулей, если параметр Гинзбурга–Ландау $\kappa = 1$ [2, 3]. При $\kappa = 1$ в приближении Гинзбурга–Ландау все три критических поля, H_{c2}, H_{c1} и H_{cm}, совпадают и коэффициенты разложения свободной энергии по степеням $H_{c2} - B$, начиная с квадратичного члена, обращаются в нуль [4]. По этой причине в приближении Гинзбурга–Ландау при $\kappa > 1$ в области полей $H_{c2} > H_0 > H_{c1}$ в основном состоянии всегда образуется треугольная решетка с одним квантом потока. Учет следующих членов в разложении свободной энергии по параметру $1 - T/T_c$ приводит к обобщенному функционалу свободной энергии [5], в котором указанное выше вырождение снимается, и реализуемое состояние определяется отношением трех малых параметров: $\kappa - 1$, $1 - H_0/H_{c2}$, $1 - T/T_c$.

Общее решение решеточного типа образует $2n + 1$-параметрические семейства, где n — число вихрей (нулей параметра порядка) в элементарной ячейке. При $n = 1$ этими тремя параметрами являются угол ϕ между векторами элементарной ячейки, величина магнитной индукции B, среднее значение квадрата модуля параметра потока порядка $\langle |\Delta|^2 \rangle$.

Ниже мы приведем явный вид для этих n-вихревых семейств решений и детально исследуем состояния с $n = \{1, 2\}$. В зависимости от значения параметров $\{\kappa - 1, 1 - H_0/H_{c2}, 1 - T/T_c\}$ в основном состоянии могут реализоваться треугольная решетка с одним квантом потока в ячейке, квадратная решетка с одним квантом потока в ячейке, а также решетка с двумя квантами потока в элементарной ячейке и векторами элементарной ячейки, образующими угол ϕ, равный $\{\pi/2, \pi/3\}$. Получено явное выражение для свободной энергии для трех семейств решений при $n = 2$ при произвольных значениях двух свободных параметров: $H_{c2} - B$ и относительной фазы двух «подрешеток». Физическому состоянию соответствует состояние, экстремальное по всем свободным параметрам. Среди этих состояний есть состояния, в которых свободная энергия имеет локальный минимум.

В рассматриваемом приближении возникает зависящая от температуры перенормировка параметра порядка Гинзбурга–Ландау κ. Эта перенормировка найдена ниже.

*E-mail: ovc@itp.ac.ru

2. ОБОБЩЕННЫЙ ФУНКЦИОНАЛ ГИНЗБУРГА – ЛАНДАУ

В модели БКШ обобщенный функционал свободной энергии был получен в работе [4]:

$$
\begin{aligned}
F_S - F_N = \nu \int d^3 r \left\{ -\ln\left(\frac{T_c}{T}\right) |\Delta|^2 + \right. \\
\left. + \frac{7\zeta(3)}{16\pi^2 T^2}|\Delta|^4 + \frac{\pi D}{8T}|\partial_- \Delta|^2 \right\} + \\
+ \frac{1}{8\pi}\int d^3 r (\operatorname{rot}\mathbf{A} - H_0)^2 + \\
+\nu \int d^3 r \left\{ -\frac{31\zeta(5)|\Delta|^6}{128\pi^4 T^4} - \frac{v^4(1/\tau - 1/\tau_2)}{288} a_1 |\partial_-^2 \Delta|^2 - \right. \\
- \frac{v^2}{24} a_2 |\partial_- \Delta|^2 |\Delta|^2 - \frac{v^2}{24}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial |\Delta|^2}{\partial r}\right)^2 + \right. \\
\left. + 2|\Delta|^2 |\partial_- \Delta|^2 \right) - \frac{v^4}{80} b_1 \left(|\partial_-^2 \Delta|^2 + 4e^2 \mathbf{H}^2 |\Delta|^2 - \right. \\
\left.\left. - \frac{2ie}{3}\nabla \times \mathbf{H}(\Delta^* \partial_- \Delta - \Delta \partial_+ \Delta^*) \right) \right\}, \quad (1)
\end{aligned}
$$

где $\nu = mp_0/2\pi^2$ и v — плотность состояний и скорость электронов на поверхности Ферми, $\partial_\pm = \partial/\partial\mathbf{r} \pm 2ie\mathbf{A}$, $\mathbf{A}$ — векторный потенциал, $\zeta(x)$ — дзета-функция Римана, «время» рассеяния τ_N определено стандартным образом [5]:

$$
\frac{1}{\tau_N} Y_N\left(\frac{\mathbf{P}}{|P|}\right) = nv \int \sigma_{\mathbf{P}\mathbf{P}_1} Y_N \left(\frac{\mathbf{P}_1}{|P|}\right) d\Omega_{\mathbf{P}_1},
$$

где $Y_N(\mathbf{P}/|P|)$ — сферическая функция. Выражение для коэффициентов $a_{1,2}$, $b_{1,2}$, D, справедливые при произвольных длине пробега и сечении рассеяния на примесях, приведены в Приложении.

Первые два члена в уравнении (1) дают обычный функционал Гинзбурга – Ландау, последний член в уравнении (1) — следующий член разложения свободной энергии по параметру $1 - T/T_c$. Выражение (1) справедливо при любом значении внешнего магнитного поля H_0 и произвольной длине пробега электронов.

Последний член в формуле (1) может быть учтен по теории возмущений даже в области, когда его вклад в свободную энергию не мал по сравнению со вкладом первых двух слагаемых.

Определим, прежде всего, значение критического поля H_{c2} и термодинамического критического поля H_{cm}. Из уравнения (1) в линейном по Δ приближении находим

$$
\begin{aligned}
\partial_-^2 \Delta = -2eH_{c2}\Delta, \\
\ln\left(\frac{T_c}{T}\right) - \frac{\pi D e}{4T} H_{c2} + \frac{e^2 v^4 H_{c2}^2}{8} \times \\
\times \left[\frac{a_1}{9}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_2}\right) + \frac{4}{5}b_1\right] = 0. \quad (2)
\end{aligned}
$$

Вблизи T_c последний член во второй формуле (2) мал и, учитывая его в первом порядке теории возмущений, получаем

$$
\begin{aligned}
H_{c2} = \frac{4T}{\pi e D}\ln\left(\frac{T_c}{T}\right)\left\{1 + \frac{2v^4 T^2}{\pi^2 D^2}\ln\left(\frac{T_c}{T}\right) \times \right. \\
\left. \times \left[\frac{a_1}{9}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_2}\right) + \frac{4}{5}b_1\right]\right\}. \quad (3)
\end{aligned}
$$

Термодинамическое критическое поле H_{cm} можно определить из условия равенства свободной энергии в однородном сверхпроводящем состоянии и нормальном состоянии. Из этого условия находим

$$
\frac{H_{cm}^2}{4\pi} = \nu \left\{\ln\left(\frac{T_c}{T}\right)\Delta^2 - \frac{31\Delta^6 \zeta(5)}{128\pi^4 T^4}\right\}, \quad (4)
$$

где параметр порядка Δ удовлетворяет уравнению

$$
\ln\frac{T_c}{T} = \frac{7\zeta(3)\Delta^2}{8\pi^2 T^2} - \frac{93\zeta(5)\Delta^4}{128\pi^4 T^4}. \quad (5)
$$

Учитывая поправки первого порядка, из уравнений (4), (5) получаем

$$
\begin{aligned}
H_{cm} = 4\pi T \ln\left(\frac{T_c}{T}\right)\sqrt{\frac{2\pi\nu}{7\zeta(3)}} \times \\
\times \left[1 + \frac{31\zeta(5)}{2(7\zeta(3))^2}\ln\frac{T_c}{T}\right]. \quad (6)
\end{aligned}
$$

Отметим, что поправка к единице в правой части формулы (6) не зависит от длины свободного пробега электронов. Поправка же к единице в правой части формулы (3) существенно зависит от рассеяния на примесях и выходит на конечные значения в «чистых» (формула (7a)) и «грязных» (формула (7b)) сверхпроводниках:

$$
H_{c2} = \frac{4T}{\pi e D}\ln\left(\frac{T_c}{T}\right)
\begin{cases}
1 + \dfrac{18}{5}\dfrac{31\zeta(5)}{(7\zeta(3))^2}\ln\dfrac{T_c}{T}, & (7a) \\
1 + \dfrac{28\zeta(3)}{\pi^4}\ln\dfrac{T_c}{T}. & (7b)
\end{cases}
$$

В результате возникает интересное явление: при понижении температуры от точки T_c параметр $\tilde{\kappa}$, определяемый как

$$
\tilde{\kappa} = \frac{H_{c2}(T)}{H_{cm}(T)} \quad (8)
$$

может проходить через единицу, если при $T = T_c$ он был меньше единицы.

В результате появляется узкая область значений параметров, $T_c - T \ll T_c$, $|\tilde{\kappa} - 1| \ll 1$, $|H_{c2} - H_0| \ll \ll H_{c2}$, в которой могут наблюдаться различные фазовые переходы.

3. МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ H_0, БЛИЗКИЕ К КРИТИЧЕСКОМУ ПОЛЮ H_{c2}

В области полей, близких к критическому полю H_{c2}, $(H_{c2} - B)/H_{c2} \ll 1$, параметр порядка Δ и векторный потенциал $\mathbf{A}$ могут быть представлены в виде рядов:

$$\begin{aligned} &\Delta = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots\,, \\ &(\Delta_0^* \Delta_1) = 0, \quad (\Delta_0^* \Delta_2) = 0, \\ &\mathbf{A} = (0, Bx, 0) + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \ldots\,, \\ &\mathbf{H} = \mathbf{B} + \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \ldots \end{aligned} \tag{9}$$

В калибровке $(\nabla \mathbf{A}) = 0$ величины $\mathbf{A}_{1,2,\ldots}$ — ограниченные функции на плоскости xy.

Функцию Δ_0, имеющую n нулей в элементарной ячейке, ищем в виде сумм n подрешеток

$$\begin{aligned} \Delta_0 = &\sum_{N=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} C_N^l \times \\ &\times \exp\left\{2ieB(Nx_1 - x_l^0)y - eB(x + x_l^0 - Nx_1)^2\right\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Эта функция является обобщением решения, предложенного Абрикосовым [6]. В уравнении (10) величины C_N^l, x_l^0 — константы, определяющие структуру ячейки. Поправку первого порядка Δ_1 к параметру порядка можно искать в виде [3]

$$\begin{aligned} &\Delta_1 = \sum_{M=1}^{\infty} \alpha_M \Delta_1^M, \\ &\Delta_1^M = \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} C_N^l \exp\left[2ieB(Nx_1 - x_l^0)y\right] \times \\ &\qquad \times D_M\left(\sqrt{2eB}(x + x_l^0 - Nx_1)\right), \end{aligned} \tag{11}$$

где D_M — функции параболического цилиндра [7],

$$D_M(z) = 2^{-M/2} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) H_M\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right), \tag{12}$$

H_M — полиномы Эрмита.

Прямая проверка показывает, что функция Δ_0 удовлетворяет важному соотношению

$$\Delta_0^* \partial_-^0 \Delta_0 - \Delta_0 \partial_+^0 \Delta_0^* = -i \nabla \times (0, 0, |\Delta_0|^2), \tag{13}$$

где

$$\partial_-^0 = \frac{\partial}{\partial r} - 2ie\mathbf{A}_0. \tag{14}$$

Выполняются также следующие два равенства:

$$\begin{aligned} &\left\langle |\partial_- \Delta|^2 |\Delta|^2 \right\rangle = 2eB \left\langle |\Delta|^4 \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{\partial |\Delta|^2}{\partial r}\right)^2 \right\rangle, \\ &- ie \left\langle \operatorname{rot} \mathbf{H}(\Delta^* \partial_- \Delta - \Delta \partial_+ \Delta^*) \right\rangle = \\ &= \frac{\pi^2 e^2 \nu D}{T} \left\{ 8eB \left\langle |\Delta|^4 \right\rangle - 3 \left\langle \left(\frac{\partial |\Delta|^2}{\partial r}\right)^2 \right\rangle \right\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Используя формулы (9), (13), (15), приведем выражение (1) для свободной энергии к виду

$$\begin{aligned} F_S - F_N = \nu \int d^3 r \Bigg\{ &-\ln\left(\frac{T_c}{T}\right) |\Delta_0|^2 + \frac{\pi D}{4T} eB |\Delta_0|^2 + \\ &+ \frac{7\zeta(3)|\Delta_0|^4}{16\pi^2 T^2} - \frac{31\zeta(5)|\Delta_0|^6}{128\pi^4 T^4} - \frac{v^4}{72}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_2}\right) \times \\ &\times e^2 B^2 a_1 |\Delta_0|^2 - \frac{v^4 e^2 B^2}{10} b_1 |\Delta_0|^2 - \frac{v^2 |\Delta_0|^4}{24} \times \\ &\times \left[2eBa_2 + 4eBb_2 + \frac{8}{5} eBb_1 \frac{\pi^2 e^2 \nu D v^2}{T}\right] + \\ &+ v^2 \left(\frac{\partial |\Delta|^2}{\partial r}\right)^2 \left[\frac{b_2 + a_2}{48} + \frac{b_1}{40T} \pi^2 e^2 v^2 \nu D\right] \Bigg\} + \\ &+ \frac{1}{8\pi} \int d^3 r [(B - H_0)^2 - H_1^2], \end{aligned} \tag{16}$$

где [5]

$$H_1^2 = \pi^2 \nu^2 \left(\frac{\pi e D}{T}\right)^2 (|\Delta_0|^2 - \left\langle |\Delta_0|^2 \right\rangle)^2. \tag{17}$$

Свободная энергия (16) в равновесии должна иметь экстремум по всем свободным параметрам, определяющим решение (10). В их число входят: угол ϕ между векторами элементарной ячейки, величина индукции B, а также свободные параметры, определяющие коэффициенты C_N^l.

Векторы элементарной ячейки $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ выбираем в виде

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}_1 = a\left(\cos(\phi/2), -\sin(\phi/2), 0\right), \\ &\mathbf{a}_2 = a\left(\cos(\phi/2), \sin(\phi/2), 0\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Для решетки с n нулями в ячейке выполняется условие

$$e(\mathbf{B} \cdot [\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2]) = \pi n. \tag{19}$$

Векторы обратной решетки $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ есть

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \frac{\pi}{a}\left(\frac{1}{\cos(\phi/2)}, \frac{1}{\sin(\phi/2)}, 0\right), \\ \mathbf{k}_2 &= \frac{\pi}{a}\left(\frac{1}{\cos(\phi/2)}, -\frac{1}{\sin(\phi/2)}, 0\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Условие периодичности функции $|\Delta|^2$ определяет величины $\{x_1, x_l^0, C_N^l\}$ в формуле (10):

$$\begin{aligned} & x_1 = a\cos(\phi/2), \quad x_l^0 = a\cos(\phi/2)l/n, \\ & l = 0, 1, \ldots, n-1, \\ & C_N^l = C_0^l \exp\left\{\frac{i\pi n}{2}N^2 - i\pi n\frac{x_l^0}{x_1}N\right\}. \end{aligned} \tag{21}$$

Переходя к новым координатам (t_1, t_2),

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_1 t_1 + \mathbf{a}_2 t_2, \tag{22}$$

представим величину $|\Delta_0|^2$ в виде

$$|\Delta_0|^2 = \sum_{L,K} C_{L,K} \exp[2\pi i(Lt_2 + Kt_1)], \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned} C_{L,K} = &\sum_{N_1,l,l_1} \delta_{K,L+nN_1+l-l_1} (C_0^{l_1})^* C_0^l \sqrt{\frac{1}{n}\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{\pi}{2n\sin\phi}(L^2 + K^2 - 2LK\cos\phi)\right) \times \\ &\times \exp\left(-\frac{i\pi K(K-L)}{n} - \frac{i\pi}{2n}(l^2 - l_1^2) + \frac{2i\pi}{n}lK\right). \end{aligned} \tag{24}$$

Из формул (22) и (23) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial|\Delta|^2}{\partial x} &= \frac{1}{2a\cos(\phi/2)}\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2}\right)|\Delta|^2, \\ \frac{\partial|\Delta|^2}{\partial y} &= \frac{1}{2a\sin(\phi/2)}\left(\frac{\partial}{\partial t_2} - \frac{\partial}{\partial t_1}\right)|\Delta|^2. \end{aligned} \tag{25}$$

Свободная энергия (16) определяется тремя функциями $\{\beta_A, \beta_{A_1}, \beta_{A_2}\}$:

$$\beta_A = \frac{\langle|\Delta_0|^4\rangle}{\langle|\Delta_0|^2\rangle^2}, \quad \beta_{A_1} = \frac{\langle|\Delta_0|^6\rangle}{\langle|\Delta_0|^2\rangle^3},$$

$$\beta_{A_2} = \frac{1}{eB\langle|\Delta_0|^2\rangle^2}\left\langle\left(\frac{\partial|\Delta|^2}{\partial r}\right)^2\right\rangle.$$

Учитывая формулу (25), находим

$$\begin{aligned} \beta_A &= \frac{1}{C_{00}^2}\sum_{L,K}|C_{L,K}|^2, \\ \beta_{A_1} &= \frac{1}{C_{00}^3}\sum_{L,K}\sum_{L_1,K_1} C_{L,K}C_{L_1,K_1}C^*_{L+L_1,K+K_1}, \\ \beta_{A_2} &= \frac{4\pi}{n\sin(\phi)}\frac{1}{C_{00}^2} \times \\ &\qquad \times \sum_{L,K}|C_{L,K}|^2(K^2 + L^2 - 2LK\cos\phi). \end{aligned} \tag{26}$$

Все три функции легко находятся с помощью формулы (24) и явно не зависят от B. Функция β_{A_2} связана с функцией β_A простым соотношением

$$\beta_{A_2} = 2\beta_A. \tag{27}$$

Для дальнейшего рассмотрения удобно сделать одно вычитание в формуле (15) для свободной энергии и переписать ее в виде

$$\begin{aligned} \frac{F_S - F_N}{V} = \nu\Bigg\{ &-\frac{\pi De}{4T}(H_{c2} - B)\langle|\Delta_0|^2\rangle + \frac{e^4v^4}{8} \times \\ &\times \left[\frac{a_1}{9}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_2}\right) + \frac{4}{5}b_1\right](H_{c2}^2 - B^2)\langle|\Delta|^2\rangle + \\ &+ \frac{7\zeta(3)}{16\pi^2T^2}\langle|\Delta_0|^4\rangle - \frac{31\zeta(5)\langle|\Delta_0|^6\rangle}{128\pi^4T^4} - \\ &- \frac{eBv^2\langle|\Delta_0|^4\rangle}{12}\left(a_2 + 2b_2 + \frac{4}{5}b_1\frac{\pi^2e^2v^2\nu D}{T}\right) + \\ &+ v^2\left(\frac{b_2 + a_2}{48} + \frac{b_1}{40T}\pi^2e^2v^2\nu D\right)\left\langle\left(\frac{\partial|\Delta|^2}{\partial r}\right)^2\right\rangle\Bigg\} + \\ &+ \frac{1}{8\pi}\Bigg[(B - H_0)^2 - \pi^2\nu^2\left(\frac{\pi eD}{T}\right)^2 \times \\ &\times \left(\langle|\Delta_0|^4\rangle - \langle|\Delta_0|^2\rangle^2\right)\Bigg], \end{aligned} \tag{28}$$

где V — объем образца.

В приближении Гинзбурга–Ландау свободная энергия зависит лишь от двух величин $\{\langle|\Delta_0|^2\rangle, B\}$. Минимализация по ним приводит к уравнениям [6]

$$\begin{aligned} \langle|\Delta|^2\rangle &= \frac{2\pi^3eDT}{7\zeta(3)}\frac{H_{c2} - B}{\beta_A - (\beta_A - 1)/\kappa^2}, \\ H_{c2} - H_0 &= (H_0 - B)\beta_A(\kappa^2 - 1), \end{aligned} \tag{29}$$

где

$$\kappa = \frac{1}{\pi^2eD}\sqrt{\frac{7\zeta(3)}{2\pi\nu}} \tag{30}$$

— параметр Гинзбурга–Ландау. Свободная энергия в этом случае равна

$$\frac{F_S - F_N}{V} = -\frac{1}{8\pi}(H_0 - B)^2 \beta_A (\kappa^2 - 1), \tag{31}$$

и ее зависимость от внутренних параметров (28) входит только через величину β_A. При приближении величины κ к единице область применимости формулы (31) сужается и существенными становятся следующие члены в разложении свободной энергии по величине параметра порядка Δ.

В общем случае условия экстремума свободной энергии (28) по параметрам $\{\langle|\Delta_0|^2\rangle, B\}$ приводятся к виду

$$\frac{\pi De}{4T}\langle|\Delta_0|^2\rangle - \frac{e^2v^4}{4}\times \\ \times B\left[\frac{a_1}{9}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_2}\right) + \frac{4}{5}b_1\right]\langle|\Delta_0|^2\rangle + \frac{B - H_0}{4\pi\nu} = 0,$$

$$-\frac{\pi eD}{4T}(H_{c2}-B) + \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2T^2}\left(\beta_A - \frac{\beta_A - 1}{\kappa^2}\right)\langle|\Delta_0|^2\rangle + \\ + \frac{e^2v^4}{8}\left[\frac{a_1}{9}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_2}\right) + \frac{4}{5}b_1\right](H_{c2}^2 - B^2) - \\ - \frac{93\zeta(5)}{128\pi^4T^4}\beta_{A_1}\langle|\Delta_0|^2\rangle^2 - \frac{eBv^2}{6}\times \\ \times\left(a_2 + 2b_2 + \frac{14\zeta(3)}{5\pi^3\kappa^2}\frac{v^2}{DT}b_1\right)\beta_A\langle|\Delta_0|^2\rangle + eBv^2\times \\ \times\left(\frac{b_2 + a_2}{24} + \frac{7\zeta(3)}{40\pi^3\kappa^2}\frac{v^2}{DT}b_1\right)\beta_{A_2}\langle|\Delta_0|^2\rangle = 0. \tag{32}$$

С учетом уравнений (32) выражение (28) для свободной энергии существенно упрощается:

$$\frac{F_S - F_N}{V} = \nu\left\{-\frac{\pi De}{8T}(H_{c2} - B)\langle|\Delta_0|^2\rangle + \frac{e^2v^4}{16}\times \right.\\ \times\left[\frac{a_1}{9}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_2}\right) + \frac{4}{5}b_1\right](H_{c2}^2 - B^2)\langle|\Delta_0|^2\rangle + \\ \left. + \frac{31\zeta(5)}{256\pi^4T^4}\beta_{A_1}\langle|\Delta_0|^2\rangle^3\right\} + \frac{(B - H_0)^2}{8\pi} = \\ = -\frac{1}{8\pi}(H_{c2} - H_0)(H_0 - B) + \frac{ev^4T}{16\pi^2D}(H_0 - B)^3\times \\ \times\left[\frac{a_1}{9}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_2}\right) + \frac{4}{5}b_1\right] + \\ + \frac{31\zeta(5)\kappa^4}{64(7\zeta(3))^2}\frac{eD(H_0 - B)^3}{T}\beta_{A_1}. \tag{33}$$

Система уравнений (32) определяет величину $H_0 - B$ как функцию $H_{c2} - H_0$ и имеет решение

$$\frac{93\zeta(5)\kappa^4}{2\zeta^2(3)}\beta_{A_1}z^2 - z\left\{\beta_A(\kappa^2 - 1) + \right.\\ + \frac{2ev^4H_{c2}T}{\pi D}\left[\frac{a_1}{9}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_2}\right) + \frac{4}{5}b_1\right] + \\ + \frac{4\pi^2eH_{c2}v^2\kappa^2T^2}{7\zeta(3)}\left[\frac{a_2 + b_2}{12}\beta_{A_2} - \frac{a_2 + 2b_2}{3}\beta_A + \right.\\ \left.\left. + \frac{7\zeta(3)}{5\pi^3\kappa^2}\frac{v^2}{DT}b_1\left(\frac{\beta_{A_2}}{4} - \frac{2\beta_A}{3}\right)\right]\right\} + \\ + \frac{\pi eD}{4T}(H_{c2} - H_0) = 0, \tag{34}$$

где, по определению,

$$z = \frac{\pi eD}{4T}(H_0 - B). \tag{35}$$

4. СТРУКТУРНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ $\{\beta_A, \beta_{A_1}\}$ РЕШЕТОК С ОДНИМ И ДВУМЯ КВАНТАМИ ПОТОКА В ЯЧЕЙКЕ

При $n = 1$ единственный свободный параметр — угол ϕ между векторами элементарной ячейки. Из симметрийных соображений следует, что экстремальными точками для свободной энергии являются значения углов $\phi = \{\pi/3, \pi/2\}$. При $n = 1$ численный счет для $\phi = \pi/3$ дает следующие значения величин $\{\beta_A, \beta_{A_1}\}$:

$$\beta_A = 1.159595, \quad \beta_{A_1} = 1.423012, \tag{36a}$$

а для $\phi = \pi/2$ —

$$\beta_A = 1.18034, \quad \beta_{A_1} = 1.497095. \tag{36b}$$

Напомним, что для всех решеток $\beta_{A_2} = 2\beta_A$.

При $n = 2$ существуют решетки двух видов: с одной и двумя подрешетками. При двух подрешетках появляется дополнительный свободный параметр — фаза χ, которую можно ввести как

$$C_0^1 = C_0^0\exp(i\chi). \tag{37}$$

При $n = 2$ структурные параметры в состояниях с одной подрешеткой не зависят от типа подрешетки $\{l = 0$ или $l = 1\}$ и для $\phi = \pi/3$ равны

$$\beta_A = 1.338985, \quad \beta_{A_1} = 2.025886, \\ \beta_{A_2} = 2\beta_A, \tag{38a}$$

а для $\phi = \pi/2$ —

$$\beta_A = 1.18034, \quad \beta_{A_1} = 1.497095, \quad \beta_{A_2} = 2\beta_A. \tag{38b}$$

При $n = 2$ и двух подрешетках, таких что $|C_0^0| = |C_0^1|$, структурные параметры не зависят от угла χ и для $\phi = \pi/3$ равны

$$\beta_A = 1.338985, \quad \beta_{A_1} = 2.025886, \quad \beta_{A_2} = 2\beta_A, \tag{39a}$$

а для $\phi = \pi/2$ —

$$\beta_A = 1.424797, \quad \beta_{A_1} = 2.31906, \quad \beta_{A_2} = 2\beta_A. \tag{39b}$$

Формулы (33), (34) полностью определяют все возможные состояния сверхпроводников со значением параметра κ, близким к единице вблизи T_c и внешним магнитным полем H_0, близким к H_{c2}. Свободная энергия (33) выражается через структурные параметры, значения которых для решеток с одним и двумя квантами потока в элементарной ячейке даются формулами (36), (38), (39). Коэффициенты в формулах (33), (36) зависят от характерных времен рассеяния на примесях [5]. В «чистом» (формула (40a)) и «грязном» (формула (40b)) сверхпроводниках имеем [5]

$$b_1 = b_2 = a_2 = \frac{31}{(\pi T)^4}\frac{\zeta(5)}{16}, \quad D_{cl} = \frac{7\zeta(3)v^2}{6\pi^3 T}, \tag{40a}$$

$$b_2 = \frac{\pi\tau_{tr}}{24T^3}, \quad D_{dir} = \frac{vl_{tr}}{3}, \quad a_1 = \frac{14\zeta(3)\tau_{tr}^2}{\pi^2T^2\,(1/\tau - 1/\tau_2)}, \tag{40b}$$

где $l_{tr} = v\tau_{tr}$ — длина свободного пробега электрона.

Уравнение (34) в предельных случаях («чистый» и «грязный» сверхпроводники) приобретает вид соответственно

$$\begin{gathered}\frac{93\zeta(5)}{2(7\zeta(3))^2}\beta_{A_1}z^2 - z\left\{\beta_A(\kappa^2-1) + \frac{ev^2H_{c2}}{\pi^2T^2}\frac{31\zeta(5)}{35\zeta(3)}\left(3 - \frac{13}{12}\beta_A\right)\right\} + \frac{7\zeta(3)ev^2}{24\pi^2T^2}(H_{c2}-H_0) = 0,\\ \frac{93\zeta(5)}{2(7\zeta(3))^2}\beta_{A_1}z^2 - z\left\{\beta_A(\kappa^2-1) + \frac{eH_{c2}D_{dir}}{T}\left(\frac{28\zeta(3)}{\pi^3} - \frac{\pi^3\beta_A}{28\zeta(3)}\right)\right\} + \frac{\pi e D_{dir}}{4T}(H_{c2}-H_0) = 0.\end{gathered} \tag{41}$$

Из первого из уравнений (32) следует, что для всех решеточных состояний вида (10) выполняется условие $H_0 > B$. Кроме того, поскольку мы ищем состояния со свободной энергией меньшей, чем в нормальном состоянии, должно выполняться уравнение (33), а также условие

$$H_{c2} > H_0. \tag{42}$$

Предположим, что при $T = T_c$ величина κ в образце близка к единице. Тогда при понижении температуры выражение в фигурных скобках в формуле (34) может проходить через нуль. Пусть T^*_{str} — величина температуры, зависящая от структуры решения, при которой выполняется уравнение

$$\left\{\beta_A(\kappa^2-1) + \frac{2ev^4}{\pi D}H_{c2}T\left[\frac{a_1}{9}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_2}\right) + \frac{4}{5}b_1\right] - \frac{2\pi^2 eH_{c2}T^2v^2\kappa^2}{21\zeta(3)}\beta_A\left[(a_2+3b_2) + \frac{7\zeta(3)}{5\pi^3\kappa^2}\frac{v^2}{DT}b_1\right]\right\}_{T=T^*_{str}} = 0. \tag{43}$$

Из уравнений (34) и (43) следует, что при H_0, достаточно близких к $H_{c2}(T)$, и значениях T, близких к T^*_{str}, существует область полей и температур такая, что решение уравнения (34), минимизирующее свободную энергию (33), дается выражением

$$z(T - T^*_{str})\left\{\beta_A\frac{\partial\kappa^2}{\partial T} + \frac{\partial H_{c2}}{\partial T} \times \left[\frac{2ev^4T}{\pi D}\left(\frac{a_1}{9}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_2}\right) + \frac{4}{5}b_1\right) - \frac{2\pi^2eT^2v^2\kappa^2}{21\zeta(3)}\beta_A\left((a_2+3b_2) + \frac{7\zeta(3)}{5\pi^3\kappa^2}\frac{v^2}{DT}b_1\right)\right]\right\} = \frac{\pi e D}{4T}(H_{c2}-H_0). \tag{44}$$

Из формулы (44) следует, что на плоскости (H_0, T) имеется каскад фазовых переходов

$$T^*(n=1,\phi=\pi/3) \to T^*(n=1,\phi=\pi/2) \to T^*(n=2,\phi=\pi/2) \to T^*(n=2,\phi=\pi/3) \to \ldots \tag{45}$$

Граница сосуществования фаз определяется из условия равенства свободных энергий фаз, определяемых алгебраическими формулами (33), (34), (35).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При значении параметра Гинзбурга–Ландау κ равном единице три критических поля H_{c1}, H_{c2}, H_{cm} оказываются равными. Возникающее вырождение снимается следующими членами разложения функционала свободной энергии по параметру $1-T/T_c$. Структура решений в этом случае зависит от трех параметров $\{1-T/T_c, \kappa^2-1, H_{c2}-H_0\}$. Нами получены и исследованы решения, обобщающие решение Абрикосова на случай «n» подрешеток (n — число квантов потока в элементарной ячейке). Получено выражение для свободной энергии таких состояний через структурные константы $(\beta_A, \beta_{A_1}, \beta_{A_2})$. Показано, что на плоскости (H_0, T) при определенных условиях возникает каскад фазовых переходов между полученными решеточными состояниями. Границы сосуществования фаз определяются алгебраическими уравнениями, полученными в тексте.

Работа выполнена при финансовой поддержке EOARD (грант № 097006) и в рамках программы SIMTECH (грант № 246937).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем значения коэффициентов $\{a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ D\}$, входящих в выражение для обобщенного функционала Гинзбурга–Ландау [5]:

$$D = \frac{v l_{tr}}{3}\eta(T),$$

$$\eta(T) = 1 - \frac{8T\tau_{tr}}{\pi}\left[\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4\pi T\tau_{tr}}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)\right],$$

$$b_2 = 2\pi T\sum_{\omega>0}\left[\omega^4\left(\omega+\frac{1}{2\tau_{tr}}\right)\right]^{-1} = \frac{\tau_{tr}}{4\pi^3T^3}\left\{\frac{\pi^4}{6} - 4\pi T\tau_{tr}[7\zeta(3) - 2\pi^3T\tau_{tr}\eta(T)]\right\},$$

$$a_2 = 2\pi T\sum_{\omega>0}\left[\omega^3\left(\omega+\frac{1}{2\tau_{tr}}\right)^2\right]^{-1} = \frac{\tau_{tr}^2}{\pi^2T^2}\left\{7\zeta(3) - 4\pi^3T\tau_{tr} - 4\pi T\tau_{tr}\psi'\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4\pi T\tau_{tr}}\right) + 3(4\pi T\tau_{tr})^2 \times \left[\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4\pi T\tau_{tr}}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\},$$

$$b_1 = 2\pi T \times \sum_{\omega>0}\left\{\omega^2\left(\omega+\frac{1}{2\tau_{tr}}\right)^2\left[\omega+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau_2}\right)\right]\right\}^{-1} = \frac{1}{16\pi^4T^4}\left\{\frac{2\pi^3T(4\pi T\tau_{tr})^2}{1/\tau-1/\tau_2} + \frac{(4\pi T)^3\tau_{tr}^2}{1/\tau_1-1/\tau_2} \times \psi'\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4\pi T\tau_{tr}}\right) - \frac{(4\pi T)^4}{(1/\tau-1/\tau_2)^2(1/\tau_1-1/\tau_2)^2} \times \left[\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4\pi T}\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau_2}\right)\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)\right] - (4\pi T)^3\tau_{tr}^2\left(\frac{8\pi T\tau_{tr}}{1/\tau_1-1/\tau_2} - \frac{4\pi T}{(1/\tau_1-1/\tau_2)^2}\right) \times \left[\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4\pi T\tau_{tr}}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\},$$

$$a_1 = 2\pi T\sum_{\omega>0}\left\{\omega^3\left(\omega+\frac{1}{2\tau_{tr}}\right)^2\left[\omega+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau_2}\right)\right]\right\}^{-1} = \frac{1}{32\pi^5T^5}\left\{7\zeta(3)\frac{(4\pi T)^3\tau_{tr}^2}{1/\tau-1/\tau_2} - \frac{(4\pi T)^4\tau_{tr}^3}{1/\tau_1-1/\tau_2} \times \psi'\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4\pi T\tau_{tr}}\right) + \frac{(4\pi T)^5}{(1/\tau-1/\tau_2)^3(1/\tau_1-1/\tau_2)^2} \times \left[\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4\pi T}\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau_2}\right)\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)\right] + (4\pi T)^5\tau_{tr}^3\left(\frac{3\tau_{tr}}{1/\tau_1-1/\tau_2} - \frac{1}{(1/\tau_1-1/\tau_2)^2}\right) \times \left[\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4\pi T\tau_{tr}}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)\right] + \frac{\pi^2}{2}(4\pi T)^4\left[\tau_{tr}^2\left(\frac{1}{(1/\tau_1-1/\tau_2)^2} - \frac{2\tau_{tr}}{1/\tau_1-1/\tau_2}\right) - \frac{1}{(1/\tau_1-1/\tau_2)^2(1/\tau-1/\tau_2)^2}\right]\right\},$$

$$D_{cl} = \frac{7\zeta(3)v^2}{6\pi^3 T}, \quad b_1^{(cl)} = \frac{31}{(\pi T)^4}\,\frac{\zeta(5)}{16},$$

где $\psi(x)$ — пси-функция Эйлера [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **20**, 1064 (1950).
2. Е. Б. Богомольный, ЯФ **24**, 861 (1976).
3. A. V. Efanov, Phys. Rev. B **56**, 7839 (1997).
4. Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ **112**, 1499 (1997).
5. Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ **115**, 726 (1999).
6. А. А. Абрикосов, ЖЭТФ **32**, 1442 (1957).
7. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматлит, Москва (1962).