

ПАРАДОКС НЕЛИНЕЙНОГО СВЕТОДЕЛИТЕЛЯ И ЕГО РАЗРЕШЕНИЕ

А. В. Белинский, Д. В. Волков, А. В. Дмитриев, М. Х. Шульман*

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119992, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 6 декабря 2012 г.
после переработки 15 мая 2013 г.

Показано, что нелинейный светоделитель является интересным объектом исследования по следующим причинам. Во-первых, классическая и квантовая теории его описания дают прямо противоположные результаты поведения фазовых флуктуаций: согласно классической — фаза неизменна, согласно квантовой — флуктуации фазы растут или уменьшаются в зависимости от подавления или роста амплитудных флуктуаций. Выявлена фундаментальная причина этих различий. Во-вторых, квантовые флуктуации входной моды могут быть разделены на амплитудные и фазовые, так что в одну выходную моду, скажем отраженную, направляются преимущественно фазовые флуктуации, а в другую (проходящую) — амплитудные.

DOI: 10.7868/S0044451013110011

1. ВВЕДЕНИЕ

На пути поиска адекватной интерпретации квантовой теории важную роль играет выявление существенно неклассических эффектов, описание которых квантовой и классической теориями дают радикально отличающиеся друг от друга результаты. Собственно говоря, именно такой эффект — ультрафиолетовая катастрофа — и положил начало новому разделу физики. Существенного продвижения в поисках смысла квантового формализма достиг Эйнштейн с его знаменитым парадоксом ЭПР [1]. Дальнейшие вехи такого рода исследований — теорема и серия парадоксов Дж. Белла [2] (и см., например, [3]), эффекты многофотонной интерференции [4, 5] и квантовые системы с насыщением [6, 7].

Чем же интересны квантовые системы с насыщением? Аналогично классическим устройствам с насыщением, квантовые системы позволяют стабилизировать амплитудные флуктуации света. Например, в нелинейном оптическом резонаторе, заполненном нелинейной средой с кубической нелинейностью, происходит подавление фотонных флуктуаций за счет эффекта фазовой самомодуляции [7–11]. При этом формируется так называемое субпуассо-

новское квантовое состояние, в котором дисперсия флуктуаций числа фотонов в объеме квантования меньше, чем в идеальном лазере, т. е. в когерентном состоянии с пуассоновским распределением. Интересно следующее обстоятельство. Не только квантовые, но и классические флуктуации интенсивности можно подавлять в таком многолучевом интерферометре в силу идентичности результатов квантового и классического описаний линейных и линеаризованных систем в пределах адекватности такой линеаризации. При этом интерферометр работает в режиме насыщения: приращение интенсивности на входе ведет к существенно меньшему приращению выходной интенсивности в некотором интервале пространственно-временных частот. Если же стабилизация классических шумов в нелинейных системах с насыщением может распространяться и на область квантовых флуктуаций, то целесообразно рассмотреть различные виды стабилизации на предмет использования их для приготовления субпуассоновских состояний. Действительно, при нелинейном двухфотонном поглощении, а также при генерации второй и высших гармоник, сопровождаемой истощением накачки, возможно снижение дисперсии фотонных флуктуаций (см., например, [12–14]). Дело в том, что в этих процессах изъятие фотонов из исходного пучка накачки происходит парами (двухфотонное поглощение и генерация второй гармоники), тройка-

*E-mail: belinsky@inbox.ru

ми (генерация третьей гармоники) и т. п. Прореживание пучка происходит в местах наибольшей концентрации фотонов, т. е. во флуктуационных всплесках интенсивности. В результате эти всплески изымаются, и поток фотонов становится более регулярным. К сожалению, эффективность подавления фотонных флуктуаций в этих нелинейных процессах невысока.

Еще один пример — абсорбционная оптическая бистабильность системы двухуровневых атомов в резонаторе [15], при которой нижней ветви гистерезисного цикла зависимости пропускания такого резонатора от интенсивности света соответствует амплитудная стабилизация. Механизм тут простой: вначале увеличение интенсивности света (начиная с нуля) на входе ведет к возбуждению двухуровневых атомов — переходу их с нижнего уровня на верхний. При этом интенсивность света на выходе почти не растет, и происходит стабилизация амплитудных флуктуаций. Субпуассоновский свет в таких системах получен экспериментально.

Насыщение, однако, не всегда сопровождается снижением фотонных флуктуаций. Например, насыщение активной среды лазера при превышении порога генерации не приводит к амплитудной стабилизации квантовых шумов: статистика фотонов в лучшем случае остается пуассоновской [16–19]. Ведь когерентное состояние генерируется лишь в идеальном одномодовом лазере, дающем когерентную моду с постоянной фазой, чего трудно достичь на практике (см., например, [20]). Однако не диффузия фазы портит фотонную статистику, а то, что механизм насыщения активной среды аналогичен механизму однофотонных диссипативных потерь, когда из регулярной череды случайно изымаются отдельные фотоны. Это губительно сказывается на эффективности подавления фотонных флуктуаций ниже уровня когерентного состояния с пуассоновской статистикой (аналогично губительному действию на субпуассоновский свет потерь в фотодетекторе с квантовой эффективностью $\eta < 1$). Итак, универсального правила, описывающего влияние насыщения на квантовые шумы, нет. Поэтому проанализируем еще один из вариантов его реализации [6, 21, 22] более подробно, тем более что он интересен не только в смысле приготовления субпуассоновских состояний, но и представляет фундаментальный интерес в связи с возникающим в нем квантовым парадоксом.

Рассмотрим плоскую поверхность прозрачного тела. Она будет отражать свет. Пусть теперь тело обладает кубической керровской нелинейностью, причем такой, что с ростом интенсивности света ее по-

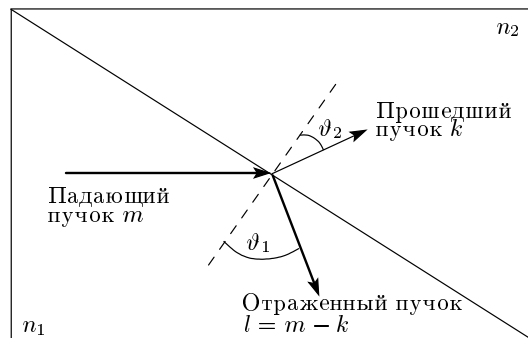


Рис. 1. Схема светоделиителя. ϑ_1 и ϑ_2 — углы падения и преломления. На границу раздела падает m фотонов, отражается l , а проходит $k = m - l$

казатель преломления уменьшается. Это так называемая нелинейность самодефокусировки, поскольку в такой среде световой пучок с плоским фазовым фронтом и гауссовым профилем интенсивности становится расходящимся. Ясно, что с ростом интенсивности света разность показателей преломления среды и воздуха уменьшается, следовательно, уменьшается и френелевский коэффициент отражения, стабилизируя флуктуации интенсивности в отраженном пучке по сравнению с падающим. А фаза при этом не меняется. Если такая стабилизация распространяется не только на классические, но и на фотонные флуктуации, то как быть с принципом неопределенности? Ведь неопределенности амплитуды и фазы связаны между собой и уменьшение одной должно сопровождаться увеличением другой.

Более интересным объектом исследования с точки зрения эффективности амплитудной стабилизации, однако, является нелинейный светоделиитель, представляющий собой границу раздела двух прозрачных диэлектриков (рис. 1). Пусть один из них обладает кубической керровской самофокусирующей нелинейностью, обуславливающей увеличение показателя преломления с ростом интенсивности излучения. Коэффициенты пропускания и отражения такой границы раздела изменяются с изменением интенсивности света в соответствии с формулами Френеля. Пусть линейная среда предшествует нелинейной и показатель преломления второго диэлектрика в рабочем режиме, т. е. с учетом нелинейной добавки, превышает показатель преломления первого: тогда с увеличением интенсивности излучения увеличивается и показатель преломления, следовательно, увеличивается коэффициент отражения границы раздела, а коэффициент пропускания снижается. Поэтому флуктуационное увеличение интен-

сивности входного пучка будет частично компенсироваться уменьшением коэффициента пропускания. Таким образом, происходит насыщение или некоторое «запирание» системы, приводящее к стабилизации интенсивности прошедшего света. Ощутимая стабилизация может проявляться и в отраженном от границы раздела пучке, если показатель преломления с увеличением интенсивности излучения, напротив, уменьшается либо изменено соотношение показателей преломления: первый больше второго.

Рассмотрим одноименный случай плоских монохроматических волн. Фаза плоской волны (отраженной либо прошедшей) вблизи плоской границы раздела прозрачных сред инвариантна с точностью до возможного скачка на π в отраженном пучке. При этом складывается парадоксальная ситуация: амплитудные флуктуации прошедшего либо отраженного пучка могут уменьшаться, а фазовые должны оставаться неизменными, что, конечно, приведет к нарушению принципа неопределенности Гейзенберга. Исследованию возникающей при этом коллизии и посвящена данная работа.

Для того чтобы не учитывать фазовый набег в прозрачных средах, мы рассматриваем пучки именно вблизи (на расстоянии не более длины волны) границы раздела. Кроме того, выделение такого узкого слоя (например, в результате размещения его между двумя плоскопараллельными пластинами из линейных материалов) избавляет нас от эффекта неустойчивости плоской волны в среде с самофокусирующей нелинейностью, являющегося классическим результатом нелинейной оптики, поскольку на малой длине распространения света неустойчивости не возникает.

Отметим также, что изучение приготовления субпикосекундных состояний, в частности, посредством нелинейного светоделителя, имеет не только фундаментальный интерес, но и широкие перспективы практического применения для создания сверхточных измерительных систем. Если в источнике света подавлены фотонные флуктуации по сравнению с когерентным состоянием, являющимся суперпозицией идеального нефлуктуирующего сигнала и вакуума, то можно повысить точность измерительной системы или разрешающую способность изображения сверх квантового предела, определяемого вакуумными шумами.

2. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СВЕТОДЕЛИТЕЛЯ

Рассмотрение преломления света на границе раздела двух сред естественно начать с закона Снелли-

уса:

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2, \quad (1)$$

и формулы Френеля для амплитудного коэффициента отражения [23]:

$$\rho = -\frac{\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \quad (2)$$

которая справедлива в случае плоско-поляризованного света с вектором напряженности электрического поля, перпендикулярным плоскости чертежа (так называемая *s*-поляризация). Для другой, взаимно ортогональной поляризации (*p*-поляризации), синусы заменяются тангенсами.

Если нет потерь, то коэффициенты пропускания и отражения связаны простым соотношением

$$\tau^2 + \rho^2 = 1, \quad (3)$$

следующим из закона сохранения энергии.

Сразу отметим, что анализируются только случаи режимов прохождения света, а полное внутреннее отражение из рассмотрения исключается, поскольку эффекта подавления фотонных флуктуаций при его реализации мы не получим.

Нелинейность одной из граничащих сред означает зависимость ее свойств от интенсивности пронизывающего ее излучения. Например, керровская нелинейность не меняет частотный спектр света, но влияет на показатель преломления. В случае второй нелинейной среды

$$n_2 = n_{20} + \chi k, \quad n_1 = \text{const}, \quad (4)$$

где n_{i0} — показатель преломления в темноте, а χ — коэффициент, пропорциональный кубической нелинейности среды $\chi^{(3)}$. Для удобства сопоставления с квантовым подходом, интенсивность света мы условно измеряем числами фотонов в некотором объеме квантования. Эти безразмерные величины, разумеется, пропорциональны интенсивностям рассматриваемых плоских монохроматических волн.

Совместное решение системы уравнений (1)–(4) с учетом очевидных соотношений для комплексных амплитуд прошедшей и отраженной волн:

$$a_t = \tau a_i, \quad a_r = \rho a_i, \quad (5)$$

даст искомое соотношение между входной и выходными волнами. Индексы t , r , i относятся соответственно к проходящему, отраженному и падающему пучкам.

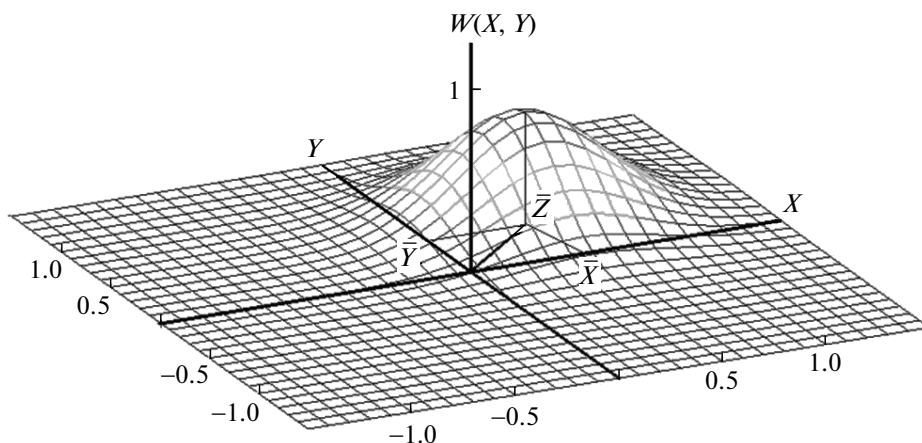


Рис. 2. Распределение Вигнера когерентного состояния: вектор $\bar{z} = \{\bar{X}, \bar{Y}\}$ — средняя комплексная амплитуда, а \bar{X} и \bar{Y} — ее средние квадратурные компоненты. В отличие от [24] нам удобнее использовать именно квадратурные компоненты X и Y , а не обобщенные координату и импульс q и p , которые больше в $\sqrt{2}$ раз

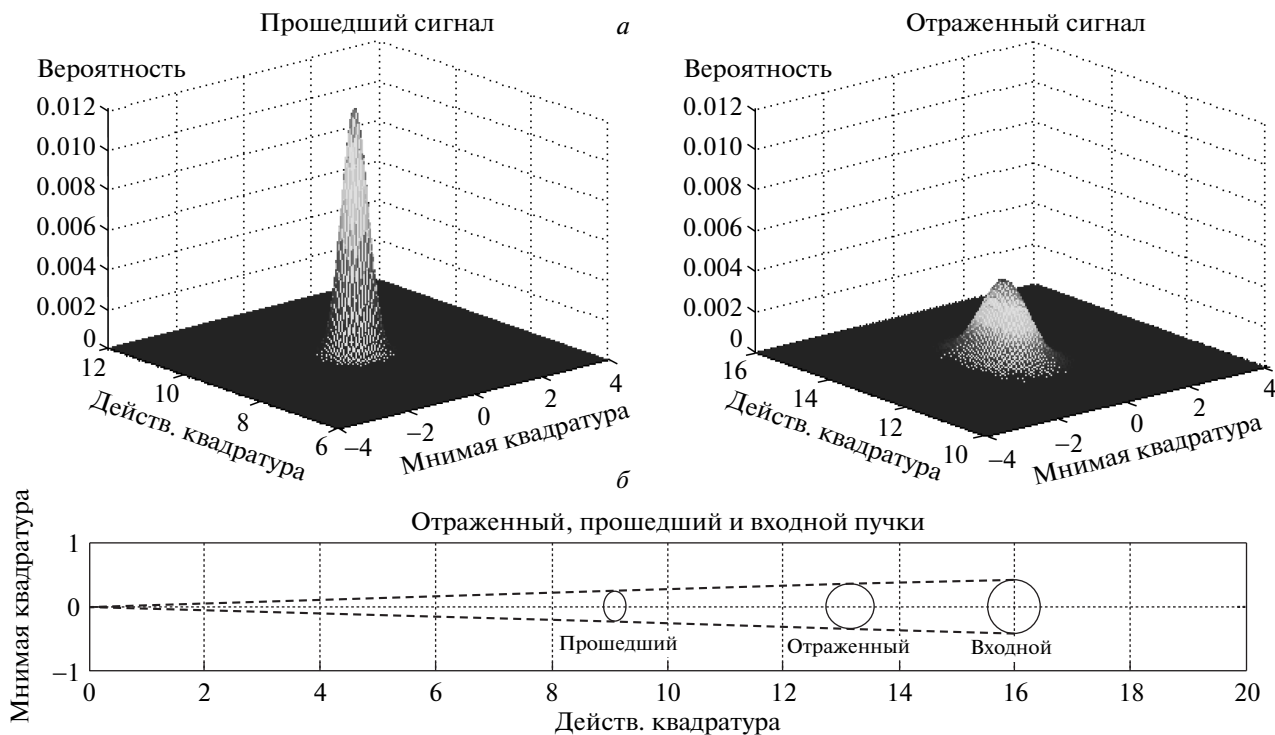


Рис. 3. Трехмерные распределения вероятностей комплексных амплитуд выходных пучков (а) и их сечения (б), которые точно вписываются в один и тот же угол, характеризующий флуктуации фазы. Первая среда линейна, $n_1 = 1.5$. Вторая среда нелинейна: $n_2 = 1.51 + 0.001k$. Стабилизируется проходящий пучок. Угол падения 88°

Аналитического решения, к сожалению, получить не удастся. Поэтому для исследования статистических характеристик такого пассивного нелинейного преобразователя приходится прибегать к численному эксперименту. Наиболее информатив-

ным представлением результатов будет трехмерное распределение вероятностей комплексных амплитуд прошедшего и отраженного пучков в зависимости от такового распределения на входе. Итак, осветим наш светоделитель излучением идеального лазера.

Распределение Вигнера $W(X, Y)$, описывающее двумерную плотность вероятности того, что действительная составляющая комплексной амплитуды равна квадратурной компоненте X , а мнимой — Y , для когерентного света идеального лазера, как известно, представляет собой гауссоид вращения, сдвинутый на величину средней амплитуды [24]:

$$W_{coh}(X, Y) = \frac{2}{\pi} \exp \left\{ -2 \left[(X - \bar{X})^2 + (Y - \bar{Y})^2 \right] \right\},$$

показанный на рис. 2. Нормировка квадратурных компонент выбрана так, чтобы средняя интенсивность света $\bar{X}^2 + \bar{Y}^2$ была равна среднему числу фотонов в моде.

Что же будет на выходах? Зная функциональную зависимость комплексных амплитуд выходов от входной амплитуды (и обратно), можно найти распределения вероятностей этих амплитуд. Поскольку аналитическое описание весьма громоздко, можно использовать численный метод Монте-Карло. Результат компьютерного расчета представлен на рис. 3. Видно, что для проходящего пучка сечение получается «сплюсненным» по действительной компоненте, которая при действительной средней амплитуде определяет флуктуации интенсивности света. Таким образом, эти флуктуации на самом деле стабилизируются. В отраженном пучке — наоборот, хотя бы в силу закона сохранения энергии. Ведь наша система пассивна и недиссипативна. Это видно и в распределениях интенсивностей проходящего $P(|a_t|^2)$ и отраженного $P(|a_r|^2)$ пучков, представленных на рис. 4.

Для более детального анализа можно не просто выделить отдельные сечения трехмерных распределений вероятностей, но перейти к анализу так называемых тел неопределенности. Они получаются так. Действительная и мнимая оси наших распределений представляют собой квадратурные компоненты комплексных амплитуд:

$$X = \frac{a + a^*}{2}, \quad Y = \frac{a - a^*}{2i}. \quad (6)$$

При анализе шумов нас интересуют прежде всего флуктуационные компоненты этих квадратур:

$$\Delta X = X - \bar{X}, \quad \Delta Y = Y - \bar{Y}. \quad (7)$$

Среднюю амплитуду по-прежнему полагаем действительной, равной средней квадратуре \bar{X} . Тогда ΔX определяет амплитудные флуктуации, а ΔY — фазовые. Последние приблизительно равны

$$\Delta \phi \approx \frac{\Delta Y}{\bar{X}} \quad (8)$$

при $\bar{X} \gg 1$.

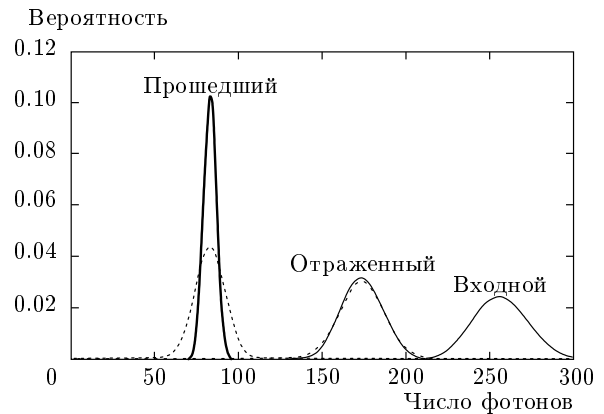


Рис. 4. Распределения вероятностей интенсивностей отраженного, прошедшего и входного пучков при тех же параметрах системы, что и для рис. 3. Для сравнения пунктирной линией показаны пуассоновские распределения, характерные для когерентного состояния

Дисперсии квадратур $\langle \Delta X^2 \rangle$, $\langle \Delta Y^2 \rangle$ и их среднеквадратические отклонения $\sqrt{\langle \Delta X^2 \rangle}$, $\sqrt{\langle \Delta Y^2 \rangle}$ характеризуют только флуктуации вдоль действительной и мнимой осей распределений вероятностей. Флуктуации более общего вида определяются обобщенной квадратурой:

$$\Delta Q(\theta) = \frac{\Delta a e^{-i\theta} + \Delta a^* e^{i\theta}}{2}, \quad (9)$$

которая при вращении на угол θ даст нам все возможные значения флуктуационных квадратур. Например, при $\theta = 0$ это просто ΔX , а при $\theta = \pi/2$ она переходит в ΔY . На рис. 5 представлены тела неопределенности $R(\theta) = \sqrt{\langle \Delta Q^2(\theta) \rangle}$ отраженного и проходящего излучений. Видно, что амплитудные флуктуации проходящего пучка подавлены, а отраженного — наоборот. Фазовые же флуктуации в силу инвариантности фазы одинаковы для всех трех пучков: падающего, отраженного и проходящего. Это ясно и из рис. 3б: все три сечения распределений вероятностей точно вписываются в один и тот же угол, характеризующий фазовые флуктуации пучков. Сравним теперь эти результаты со строгим квантовым рассмотрением.

3. ТОЧНОЕ КВАНТОВОЕ РЕШЕНИЕ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ШРЕДИНГЕРА

Задачи квантовой нелинейной оптики за редкими исключениями (например, квантовые шредингеровские солитоны), как правило, точно решить

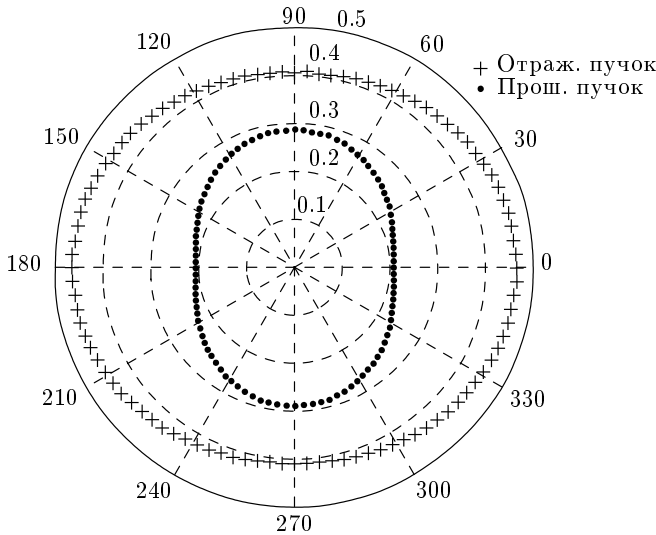


Рис. 5. Тела неопределенности выходных пучков. Для когерентных состояний это были бы круги

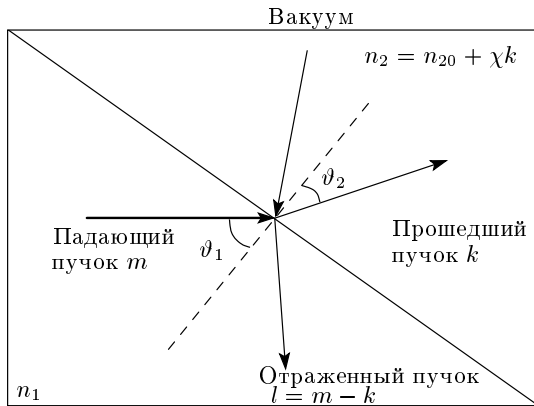


Рис. 6. Нелинейный светоделитель со второй нелинейной средой. ϑ_1 и ϑ_2 — углы падения и преломления. На первом входе когерентная мода с плоским волновым фронтом, а на втором — вакуум

не удастся. Не удавалось это вначале и в случае рассматриваемой задачи. Однако необходимость детального анализа возникшего парадокса потребовала сосредоточить усилия именно в этом направлении, что в конечном счете и увенчалось успехом [6].

Пусть светоделитель (см. рис. 6) освещается слева модой в фокковском состоянии $|m\rangle$ с определенным числом фотонов m . Но потенциально у него есть и другой вход, расположенный сверху. Даже при отсутствии на нем излучения, там будет вакуум $|0\rangle$. Если бы светоделитель был линейным, то состояние на выходе описывалось бы вектором [24]

$$|\psi\rangle = \sum_{k=0}^m \sqrt{C_k^m} \tau^k \rho^{m-k} |k\rangle|l\rangle. \quad (10)$$

Здесь прошло k фотонов, а отразилось $l = m - k$, τ и ρ — френелевские амплитудные коэффициенты пропускания и отражения, C_k^m — биномиальный коэффициент.

Это соотношение является точным квантовым результатом, однако оно имеет простой физический смысл: фотоны в данном случае ведут себя как обычные классические несвязанные частицы. Например, вероятность прохождения одного фотона равна τ^2 , а k фотонов — τ^{2k} . Вероятность того, что прошло k фотонов, а отразилось $l = m - k$, равна произведению $(\tau^2)^k (\rho^2)^{m-k}$. Биномиальный коэффициент

$$C_k^m = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

появляется вследствие эквивалентности всех возможных сочетаний прошедших и отраженных фотонов. А поскольку вектор состояния представляет собой не саму вероятность, а ее амплитуду, извлекаем квадратный корень.

Нелинейность можно учесть зависимостью τ и ρ от k в случае второй нелинейной среды. При этом можно использовать обычные формулы зависимости τ и ρ от показателей преломления сред (2) и (3) с учетом того, что нелинейная добавка показателя преломления пропорциональна числу фотонов в среде, а коэффициент пропорциональности χ , в свою очередь, пропорционален коэффициенту кубической нелинейности $\chi^{(3)}$.

При произвольном состоянии на входе $|\rangle$, например, когерентном $|z\rangle$, его можно разложить по фокковскому базису:

$$|\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} D_m |m\rangle. \quad (11)$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &\propto \sum_{m=0}^{\infty} D_m \sum_{k=0}^m \sqrt{C_k^m} \tau^k \rho^l(k) |k\rangle|m-k\rangle \equiv \\ &\equiv \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \Lambda_{k,m-k} |k\rangle|l\rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь τ и ρ зависят от интенсивности света в нелинейной среде. В силу нелинейности задачи приходится проводить перенормировку, чтобы выполнялось соотношение $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

В этом переходе есть одна тонкость. Если на входе было фокковское состояние, то на выходах, разу-

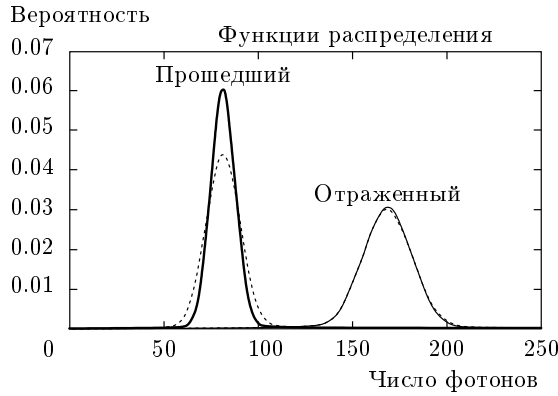


Рис. 7. Распределения вероятностей чисел фотонов в выходных пучках. Для сравнения пунктирной линией показаны пуассоновские распределения. Исходные параметры системы такие же, как и на рис. 3. Наиболее вероятное число отраженных фотонов — 169, наиболее вероятное число прошедших фотонов — 81 (среднее число входных фотонов — 250)

меется, нет: числа фотонов k и l могут быть разными. Точнее, выходные состояния представляют собой суперпозицию фоковских. Так какому же из них должна соответствовать нелинейность? Будем рассуждать операционально. Если мы детектируем на выходах фотоны, то в каждой реализации получим вполне определенные их числа k и l . Именно этими числами и будет определяться нелинейность, что и отражено в формуле (12). И на входе их было, таким образом, тоже определенное число $m = k + l$.

Физический смысл квадратов коэффициентов

$$\Lambda_{k,l}^2 = |\langle l | \langle k | \psi \rangle|^2$$

очень прост: это вероятность того, что пройдет k фотонов и одновременно отразится l , т.е. мы имеем дело с двумерной условной вероятностью. Теперь нетрудно найти распределения вероятностей обнаружить определенное число фотонов в отраженном и проходящем пучках:

$$P_l = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_{k,l}^2, \quad P_k = \sum_{l=0}^{\infty} \Lambda_{k,l}^2, \quad (13)$$

которые представлены на рис. 7. Видно, что в проходящем пучке сформировалось субпуассоновское состояние, а в отраженном — суперпуассоновское, т.е. качественно все это напоминает классические результаты (рис. 4).

Особенности приближенного расчета коэффициентов $\Lambda_{k,l}$ рассмотрены в Приложении.

Более подробную информацию о квантовом состоянии световых полей можно получить из распределений Вигнера, являющихся квантовыми аналогами классических распределений на рис. 3. Они получаются следующим образом.

Для того чтобы не потерять информацию о фазе, можно построить проекцию нашего вектора состояния $|\psi\rangle$ на когерентное состояние $|z\rangle$, т.е. найти скалярное произведение $\langle\psi|z\rangle$. Квадрат его модуля даст так называемое Q -распределение:

$$Q(X, Y) = |\langle\psi|z\rangle|^2. \quad (14)$$

Варьируя среднюю комплексную амплитуду когерентного состояния $z = \{X, Y\}$ по комплексной плоскости, мы «прошупываем» наше состояние $|\psi\rangle$ как бы измерительным прибором с аппаратной функцией

$$W_{coh}(X, Y) = \frac{2}{\pi} \exp \left\{ -2 \left[(X - \bar{X})^2 + (Y - \bar{Y})^2 \right] \right\}$$

когерентного состояния (рис. 2). Иными словами, $Q(X, Y)$ представляет собой свертку распределения Вигнера $W(X, Y)$ с таковым для когерентного состояния [24]:

$$Q(X, Y) = \iint_{-\infty}^{\infty} W(X', Y') \times W_{coh}(X - X', Y - Y') dX' dY'. \quad (15)$$

Оно представлено на рис. 8.

Итак, вычислив $Q(X, Y)$ согласно (14), с помощью прямого и обратного фурье-преобразований получаем выражение для $W(X, Y)$:

$$W(X, Y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} Q(x, y) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy}{\iint_{-\infty}^{\infty} W_{coh}(x, y) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy} \times e^{i(\xi X + \eta Y)} d\xi d\eta. \quad (16)$$

Но как вычислить $Q(X, Y)$ отдельно для проходящего и отраженного пучков, если вектор состояния $|\psi\rangle$ нам описывает их одновременно? Строго говоря, надо искать двойное скалярное произведение $\langle\psi|z_t\rangle|z_r\rangle$, т.е. условную вероятность того, что амплитуда проходящего пучка равна z_t , а отраженно — z_r . Перейти к описанию только одного пучка,

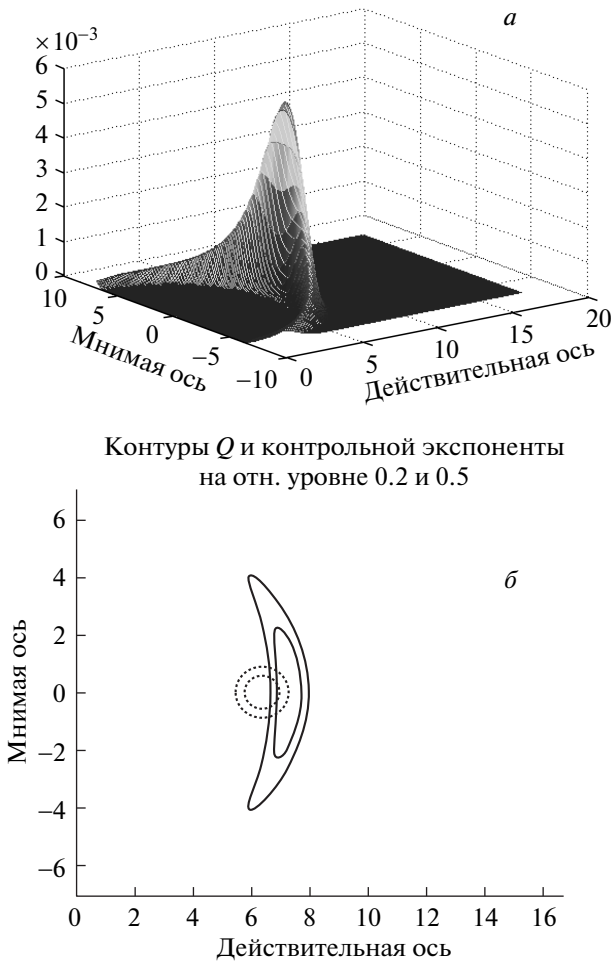


Рис. 8. Q -распределение (а) проходящего пучка и его сечения (б). Для сравнения на сечениях рис. 6 приведены круги, характерные для когерентного состояния

следовательно, можно, просуммировав вероятности всех возможных амплитуд другого:

$$Q_t(X, Y) = \sum_l |\langle \psi | z_t | l \rangle|^2. \quad (17)$$

Качественно распределение Вигнера похоже на Q -распределение, показанное на рис. 8, только имеет более резкие очертания. Это типично субпуассоновское распределение с подавленными амплитудными флуктуациями — серповидностью с растянутостью по дуге окружности, и увеличенными фазовыми флуктуациями. Собственно говоря, другого результата трудно было ожидать: ведь принцип неопределенности Гейзенберга никто не отменял. Но каков механизм «раскачивания» фазы? Какая сила «трясет» фазу в нашем эксперименте? Принцип неопределенности дает формальное, математическое объ-

яснение. Но хотелось бы иметь хоть какую-то и физическую модель. На эти вопросы мы будем искать ответы в следующих двух разделах. А пока уточним наши результаты более детальным описанием.

Как и в классическом случае, фазовые флуктуации можно оценить с помощью квадратурных компонент X и Y . Пусть среднее значение комплексной амплитуды z входного состояния $|z\rangle$ действительно: $\bar{z} = \bar{X}$. Используя операторы рождения (\hat{a}^\dagger) и уничтожения (\hat{a}) фотона, введем квадратурные компоненты

$$\hat{X} = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{2}, \quad \hat{Y} = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{2i},$$

тогда дисперсия флуктуаций первой будет определять амплитудные флуктуации, а второй — фазовые, причем согласно принципу неопределенности Гейзенберга

$$\langle \Delta \hat{X}^2 \rangle \langle \Delta \hat{Y}^2 \rangle \geq \frac{1}{16}. \quad (18)$$

Аналогично (9) вводится и обобщенная квадратура:

$$\Delta \hat{Q}(\theta) = \frac{\Delta \hat{a} e^{-i\theta} + \Delta \hat{a}^\dagger e^{i\theta}}{2},$$

с помощью которой нетрудно построить тела неопределенности, представленные на рис. 9. Видно, что в проходящем пучке преобладают фазовые флуктуации, а в отраженном — амплитудные. Эффект, правда, незначительный, но заметный.

4. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

Первое, что приходит в голову при сопоставлении противоречивых классических и квантовых результатов, это неучет вакуума в первом случае. Действительно, на втором входе — сверху (см. рис. 6) — не пустота, а флуктуации с нулевым средним. В остальном распределение Вигнера вакуума такое же, как и когерентного состояния:

$$W_{vac}(X, Y) = \frac{2}{\pi} \exp \{ -2(X^2 + Y^2) \}.$$

Добавим к нашему численному эксперименту эту плоскую шумовую волну. Результаты представлены на рис. 10. Видно, что такое уточнение модели приближает нас к истине: фазовые флуктуации перестают быть инвариантными. Но это не является чем-то из ряда вон выходящим и присущим только нашему нелинейному светоделителю. Даже в линейном светоделителе когерентный свет осветителя остается когерентным на обоих выходах с неизменным телом неопределенности в виде кружка единичного диаметра именно за счет вакуума на втором входе.

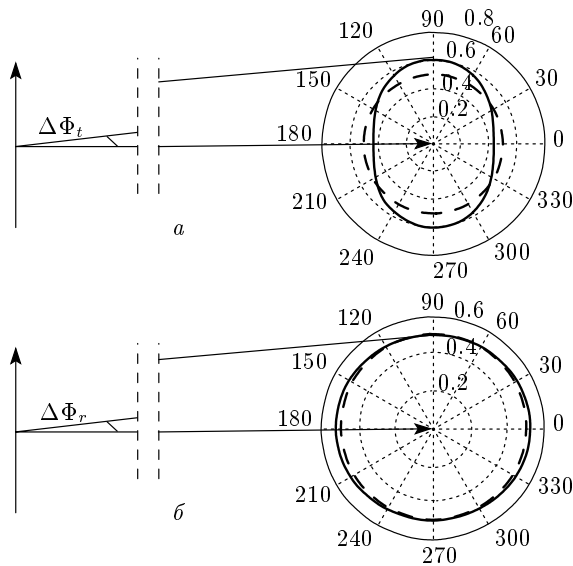


Рис. 9. Тела неопределенности для проходящего (а) и отраженного (б) пучков на комплексной плоскости. Вектор — среднее значение комплексной амплитуды (в данном случае — действительное). Среднеквадратические отклонения фазовых флуктуаций определяются углами $\Delta\Phi_t$ и $\Delta\Phi_r$. Для сравнения показаны тела неопределенности когерентного состояния — пунктирные круги единичного диаметра. Видно, что при вытянутом в вертикальном направлении теле неопределенности (а) фазовые флуктуации растут, а амплитудные — уменьшаются (по сравнению с когерентным состоянием). В отраженном пучке (б), наоборот, растут амплитудные флуктуации. Нелинейна вторая среда, угол падения 88.5° , $n_1 = 1.50$, $n_2 = 1.50 + 0.00001k$. Среднее число отраженных фотонов — 36, среднее число прошедших фотонов — 214, среднее число входных фотонов — 250

В противном случае кружок бы уменьшался вместе с уменьшением средней амплитуды выходных пучков. А если средняя амплитуда уменьшается, а тело неопределенности остается неизменным, значит, увеличиваются фазовые флуктуации. Итак, их инвариантность удалось объяснить. Более того, распределения вероятностей интенсивностей для квантового и квазиклассического описаний практически полностью совпадают (рис. 10в).

Но как быть с дисперсией мнимой квадратуры? Не только глядя на рис. 10, но и из чисто качественных классических соображений совершенно очевидно, что она должна быть неизменной, поскольку в нашем светоделителе происходит преобразование исключительно амплитуды сигнала и связанной с ним действительной квадратуры. А дисперсия мни-

мой квадратуры лишь складывается с вакуумной и должна оставаться неизменной. В этом мы сейчас еще раз убедимся на основании линейризованного приближения. Итак, вопрос о неформальном объяснении парадокса нелинейного светоделителя остается открытым, поскольку принцип неопределенности Гейзенберга (18) по-прежнему нарушается.

5. ЛИНЕАРИЗОВАННОЕ ПО ФЛУКТУАЦИЯМ ПРИБЛИЖЕНИЕ. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Для того чтобы нелинейная фазовая самомодуляция была эффективной, средняя амплитуда интенсивности света должна быть достаточно большой. На ее фоне флуктуационные составляющие незначительны и их вполне корректно можно описывать, линейризуя задачу вблизи средних значений. Итак, если $|\bar{z}|^2 \gg 1$, т.е. входная мода достаточно интенсивна и среднее число фотонов в моде велико, то

$$|\bar{z}|^2 = \langle z|\hat{m}|z \rangle = \langle z|\hat{a}^\dagger \hat{a}|z \rangle \gg \sqrt{\langle z|\hat{m}^2|z \rangle}, \quad (19)$$

где

$$\Delta\hat{m}^2 = \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} - \langle z|\hat{m}|z \rangle^2.$$

Тогда приращение коэффициента пропускания границы раздела можно линейризовать по флуктуациям:

$$\tau \approx \langle \tau \rangle + \Delta k \frac{d\tau}{dk}, \quad (20)$$

под приращением числа фотонов Δk будем понимать классический аналог оператора $\hat{\Delta}k$, т.е. определенным образом нормированное приращение интенсивности (в случае второй нелинейной среды). Отметим, что одинаковость описания квантовой задачи в представлении Гейзенберга и в классическом приближении следует именно из-за линейризации флуктуаций.

Представим производную в (20) как

$$\frac{d\tau}{dk} = \frac{d\tau}{dn_2} \frac{dn_2}{dk} = \chi \frac{d\tau}{dn_2}, \quad (21)$$

где коэффициент χ пропорционален кубической нелинейности второго диэлектрика.

Полагая амплитудный коэффициент пропускания действительным, в соответствии с законом сохранения энергии имеем

$$\begin{aligned} \tau^2 = 1 - \rho^2 &= \frac{\sin^2(\vartheta_1 + \vartheta_2) - \sin^2(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sin^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} = \\ &= \frac{\sin 2\vartheta_1 \sin 2\vartheta_2}{\sin^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)}. \end{aligned} \quad (22)$$

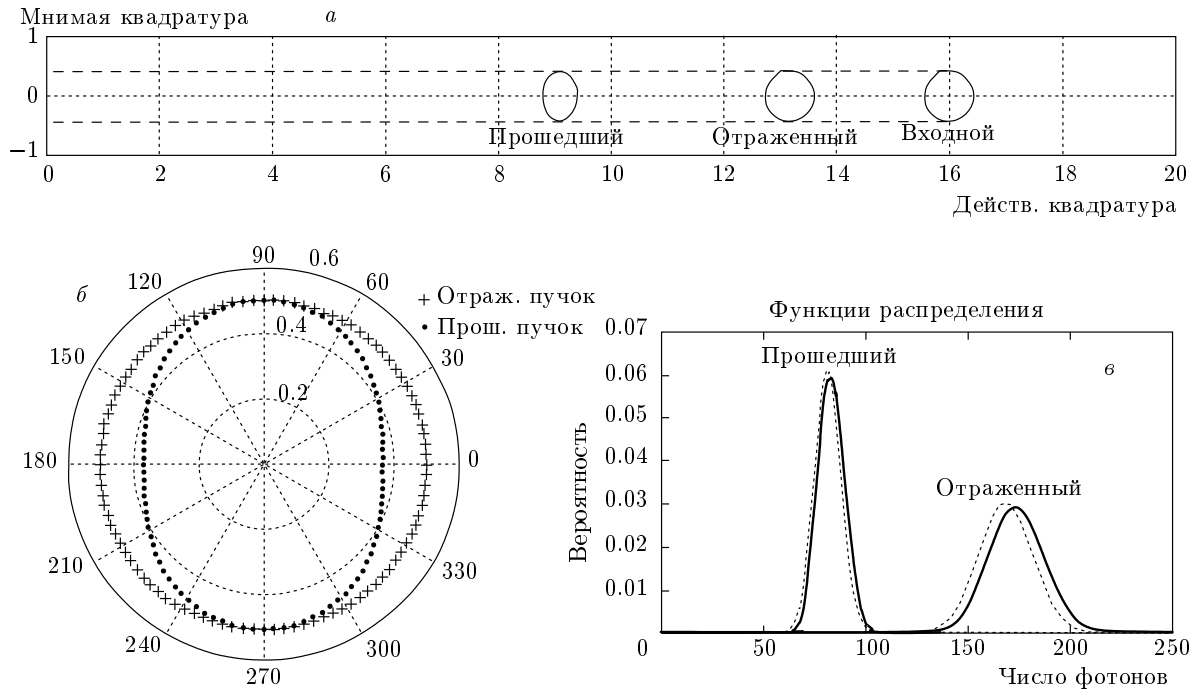


Рис. 10. Сечения функций распределений комплексных амплитуд (а) и тела неопределенностей (б) входного и выходных пучков с учетом флуктуаций вакуума (два входа). Видно, что флуктуации мнимой квадратуры инвариантны: они заключены не в растворе угла, как на рис. 3, а между двумя параллельными штриховыми линиями. Распределения вероятностей интенсивностей отраженного и прошедшего пучков (в) в квазиклассическом (сплошная линия) и квантовом (пунктирная линия) случаях

Поскольку

$$\tau d\tau = -\rho d\rho, \quad (23)$$

запишем

$$\frac{d\tau}{\tau} = -\frac{\rho}{\tau^2} d\rho = -\frac{\sin^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{\sin 2\vartheta_1 \sin 2\vartheta_2} \rho d\rho. \quad (24)$$

В соответствии с законом преломления (1) имеем

$$\frac{d\vartheta_2}{dn_2} = -\frac{\sin \vartheta_2}{n_2 \cos \vartheta_2}. \quad (25)$$

Теперь найдем

$$\frac{d\rho}{dn_2} = \frac{d\rho}{d\vartheta_2} \frac{d\vartheta_2}{dn_2}. \quad (26)$$

Согласно (2)

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\vartheta_2} &= \\ &= \frac{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{\sin^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} = \\ &= \frac{\sin 2\vartheta_1}{\sin^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \quad (27) \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dn_2} &= \frac{d\rho}{d\vartheta_2} \frac{d\vartheta_2}{dn_2} = -\frac{\sin 2\vartheta_1}{\sin^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \frac{\sin \vartheta_2}{n_2 \cos \vartheta_2} = \\ &= -\frac{\sin \vartheta_2 \sin 2\vartheta_1}{n_2 \cos \vartheta_2 \sin^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \quad (28) \end{aligned}$$

следовательно, с учетом (22)

$$\begin{aligned} \frac{2}{\tau^2} \frac{d\rho}{dn_2} &= -\frac{2 \sin^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{\sin 2\vartheta_1 \sin 2\vartheta_2} \times \\ &\times \frac{\sin \vartheta_2 \sin 2\vartheta_1}{n_2 \cos \vartheta_2 \sin^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} = -\frac{1}{n_2 \cos \vartheta_2}. \quad (29) \end{aligned}$$

Теперь можем записать, используя известное выражение для ρ :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\tau} \frac{d\tau}{dn_2} &= \frac{2}{\tau} \frac{d\tau}{d\rho} \frac{d\rho}{dn_2} = -\frac{2}{\tau} \frac{\rho d\rho}{\tau d\rho} \frac{d\rho}{dn_2} = \\ &= (-\rho) \left(\frac{2}{\tau^2} \frac{d\rho}{dn_2} \right) = \frac{\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \times \\ &\times \left(-\frac{1}{n_2 \cos^2 \vartheta_2} \right) = -\frac{\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{n_2 \cos^2 \vartheta_2 \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}. \quad (30) \end{aligned}$$

Этот результат нам потребуется в дальнейшем.

Представим комплексную амплитуду моды прошедшего границу раздела излучения в виде

$$a = (\langle a \rangle + \Delta a) e^{-i\Delta\Phi}. \quad (31)$$

Здесь Δa и $\Delta\Phi$ представляют собой флуктуационные составляющие амплитуды и фазы. Фаза постоянной составляющей амплитуды взята равной нулю. При этом $\Delta a = \Delta X$.

С другой стороны, комплексную амплитуду a прошедшего излучения можно представить в виде

$$a = \tau a_1 + \rho a_v, \quad (32)$$

где a_1 — амплитуда моды входного пучка, a_v — амплитуда второй входной моды, поступающей на границу раздела сверху и имитирующей вакуумные флуктуации.

Приравняем правые части (31) и (32):

$$(\langle a \rangle + \Delta a) e^{-i\Delta\Phi} = \tau a_1 + \rho a_v. \quad (33)$$

Представим величину τ в виде (20):

$$\tau \approx \langle \tau \rangle + \Delta k \frac{d\tau}{dk},$$

a_1 — в виде $a_1 = \langle a_1 \rangle + \Delta a_1$, и подставим эти разложения в выражение (33):

$$\begin{aligned} (\langle a \rangle + \Delta a) e^{-i\Delta\Phi} = & \left[\langle \tau \rangle + \Delta k \frac{d\tau}{dk} \right] \times \\ & + (\langle a_1 \rangle + \Delta a_1) + \rho a_v. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь Δa_1 и a_v — комплексные величины, все остальные — действительные.

С учетом малости флуктуаций $e^{-i\Delta\Phi} \approx 1 - i\Delta\Phi$ имеем

$$\begin{aligned} (\langle a \rangle + \Delta a) (1 - i\Delta\Phi) = & \left[\langle \tau \rangle + \Delta k \frac{d\tau}{dk} \right] \times \\ & \times (\langle a_1 \rangle + \Delta a_1) + \rho a_v, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} (\langle a \rangle + \Delta a) (1 + i\Delta\Phi) = & \left[\langle \tau \rangle + \Delta k \frac{d\tau}{dk} \right] \times \\ & \times (\langle a_1 \rangle + \Delta a_1^*) + \rho a_v^*. \end{aligned} \quad (36)$$

Последнее соотношение комплексно сопряжено с (35).

В силу линейности задачи по флуктуациям заменим в этих выражениях комплексные амплитуды флуктуационных составляющих соответствующими

операторами рождения и уничтожения фотона и сложим их:

$$\begin{aligned} 2(\langle \hat{a} \rangle + \Delta \hat{a}) = & \left[\langle \tau \rangle + \Delta k \frac{d\tau}{dk} \right] \times \\ & \times \left(2\langle \hat{a}_1 \rangle + \Delta \hat{a}_1 + \Delta \hat{a}_1^\dagger \right) + \langle \rho \rangle (\hat{a}_v + \hat{a}_v^\dagger). \end{aligned} \quad (37)$$

Учитывая, что

$$\langle \hat{a} \rangle = \langle \tau \rangle \langle \hat{a}_1 \rangle, \quad (38)$$

получим

$$\begin{aligned} 2(\langle \tau \rangle \langle \hat{a}_1 \rangle + \Delta \hat{a}) = & \left[\langle \tau \rangle + \Delta k \frac{d\tau}{dk} \right] \times \\ & \times \left(2\langle \hat{a}_1 \rangle + \Delta \hat{a}_1 + \Delta \hat{a}_1^\dagger \right) + \langle \rho \rangle (\hat{a}_v + \hat{a}_v^\dagger). \end{aligned} \quad (39)$$

Теперь легко найти выражение для $2\Delta\hat{a}$:

$$\begin{aligned} 2\Delta\hat{a} = & \left[\langle \tau \rangle + \Delta k \frac{d\tau}{dk} \right] \times \\ & \times \left(2\langle \hat{a}_1 \rangle + \Delta \hat{a}_1 + \Delta \hat{a}_1^\dagger \right) + \langle \rho \rangle (\hat{a}_v + \hat{a}_v^\dagger) - 2\langle \tau \rangle \langle \hat{a}_1 \rangle = \\ = & \left[\langle \tau \rangle \left(\Delta \hat{a}_1 + \Delta \hat{a}_1^\dagger \right) + \Delta k \frac{d\tau}{dk} \right] \times \\ & \times \left(2\langle \hat{a}_1 \rangle + \Delta \hat{a}_1 + \Delta \hat{a}_1^\dagger \right) + \langle \rho \rangle (\hat{a}_v + \hat{a}_v^\dagger). \end{aligned} \quad (40)$$

Поскольку фаза постоянной составляющей $\langle \hat{a} \rangle$ равна 0, имеем

$$\Delta \hat{k} \approx 2\langle \hat{a} \rangle \Delta \hat{a}, \quad (41)$$

тогда

$$\begin{aligned} 2\Delta\hat{a} = & \langle \tau \rangle \left(\Delta \hat{a}_1 + \Delta \hat{a}_1^\dagger \right) + 2\langle \hat{a} \rangle \Delta \hat{a} \frac{d\tau}{dk} \times \\ & \times \left(2\langle \hat{a}_1 \rangle + \Delta \hat{a}_1 + \Delta \hat{a}_1^\dagger \right) + \langle \rho \rangle (\hat{a}_v + \hat{a}_v^\dagger). \end{aligned} \quad (42)$$

Пренебрежем квадратичными по флуктуациям слагаемыми и запишем

$$\begin{aligned} 2\Delta\hat{a} = & \langle \tau \rangle \left(\Delta \hat{a}_1 + \Delta \hat{a}_1^\dagger \right) + 4\langle \hat{a} \rangle \Delta \hat{a} \frac{d\tau}{dk} \langle \hat{a}_1 \rangle + \\ & + \langle \rho \rangle (\hat{a}_v + \hat{a}_v^\dagger), \end{aligned} \quad (43)$$

откуда

$$\Delta \hat{a} = \frac{\langle \tau \rangle \left(\Delta \hat{a}_1 + \Delta \hat{a}_1^\dagger \right) + \langle \rho \rangle (\hat{a}_v + \hat{a}_v^\dagger)}{2 \left[1 - 2\langle \hat{a} \rangle \frac{d\tau}{dk} \langle \hat{a}_1 \rangle \right]}. \quad (44)$$

С учетом (21) и (38) имеем

$$\Delta \hat{a} = \frac{\langle \tau \rangle \left(\Delta \hat{a}_1 + \Delta \hat{a}_1^\dagger \right) + \langle \rho \rangle (\hat{a}_v + \hat{a}_v^\dagger)}{2 \left(1 - 2\chi \frac{\langle \hat{k} \rangle}{\langle \tau \rangle} \frac{d\tau}{dn_2} \right)}. \quad (45)$$

Теперь воспользуемся формулой (30) и получим выражение

$$\Delta\hat{a} = \frac{1}{2}G \left[\langle\tau\rangle (\Delta\hat{a}_1 + \Delta\hat{a}_1^\dagger) + \langle\rho\rangle (\hat{a}_v + \hat{a}_v^\dagger) \right], \quad (46)$$

где

$$G = \left(1 + \frac{2\chi\langle\hat{k}\rangle \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{n_2 \cos^2 \vartheta_2 \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \right)^{-1}. \quad (47)$$

Поскольку $\Delta\hat{a} = \Delta\hat{X}$, дисперсия действительной квадратуры

$$\begin{aligned} \langle\Delta\hat{X}^2\rangle &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2\chi\langle\hat{k}\rangle \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{n_2 \cos^2 \vartheta_2 \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \right)^{-2} = \\ &= \frac{G^2}{4}. \end{aligned} \quad (48)$$

Проведем аналогичные преобразования, вычитая из уравнения (36) комплексно-сопряженное уравнение (35):

$$\begin{aligned} 2i\Delta\hat{\Phi}(\langle\hat{a}\rangle + \Delta\hat{a}) &= \left[\langle\tau\rangle + \Delta\hat{k} \frac{d\tau}{dk} \right] \times \\ &\times (\Delta\hat{a}_1^\dagger - \Delta\hat{a}_1) + \langle\rho\rangle (\hat{a}_v - \hat{a}_v^\dagger). \end{aligned} \quad (49)$$

Пренебрежем квадратичными по флуктуациям слагаемыми:

$$2i\Delta\hat{\Phi}\langle\hat{a}\rangle = \langle\tau\rangle (\Delta\hat{a}_1^\dagger - \Delta\hat{a}_1) + \langle\rho\rangle (\hat{a}_v - \hat{a}_v^\dagger). \quad (50)$$

Поскольку $\Delta\hat{\Phi}\langle\hat{a}\rangle = \Delta\hat{Y}$, окончательно имеем

$$\langle\hat{Y}\rangle^2 = \frac{1}{4}. \quad (51)$$

Итак, дисперсия флуктуаций мнимой квадратуры действительно остается неизменной при прохождении нелинейного светоделиителя, что мы уже констатировали выше из общих соображений, и принцип неопределенности для квадратурных компонент (18) нарушается. В чем же дело?

При выводе соотношений для $\Delta\hat{X}$ и $\Delta\hat{Y}$ мы не проверили коммутационное соотношение

$$[\Delta\hat{a}, \Delta\hat{a}^\dagger] = \hat{I}, \quad (52)$$

где \hat{I} — единичный оператор, а оно не выполняется вследствие нелинейности задачи. Введем перенормировку с помощью постоянного коэффициента C и распишем выражение внутри коммутатора:

$$\begin{aligned} C [\Delta\hat{a}, \Delta\hat{a}^\dagger] &= C (\Delta\hat{a}\Delta\hat{a}^\dagger - \Delta\hat{a}^\dagger\Delta\hat{a}) = \\ &= C (\Delta\hat{X}^2 + \Delta\hat{Y}^2 + i\Delta\hat{Y}\Delta\hat{X} - i\Delta\hat{X}\Delta\hat{Y} - \\ &- \Delta\hat{X}^2 - \Delta\hat{Y}^2 + i\Delta\hat{Y}\Delta\hat{X} - i\Delta\hat{X}\Delta\hat{Y}) = \\ &= 2iC (\Delta\hat{Y}\Delta\hat{X} - \Delta\hat{X}\Delta\hat{Y}) = \hat{I}. \end{aligned} \quad (53)$$

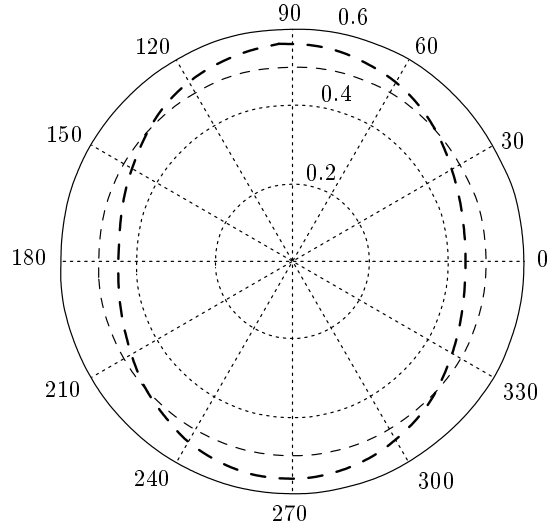


Рис. 11. Тело флуктуационной неопределенности проходящего излучения после перенормировки. Для сравнения показан круг, характерный для когерентного состояния

Поскольку без перенормировки

$$\begin{aligned} \Delta\hat{Y}\Delta\hat{X} - \Delta\hat{X}\Delta\hat{Y} &= \\ &= \frac{\hat{G}}{2i} \left[\langle\tau\rangle^2 \Delta\hat{a}_1^\dagger \Delta\hat{a}_1 - \langle\tau\rangle^2 + \langle\rho\rangle^2 \hat{a}_v^\dagger \hat{a}_v - \langle\rho\rangle^2 + \right. \\ &+ \left. \langle\tau\rangle\langle\rho\rangle (\Delta\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_v - \hat{a}_v \Delta\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_v^\dagger \Delta\hat{a}_1 - \hat{a}_v \Delta\hat{a}_1^\dagger) \right] = \\ &= -\frac{G\hat{I}}{2i}, \end{aligned} \quad (54)$$

получим

$$C = -\frac{1}{G} = - \left[1 + \frac{2\chi\langle\hat{k}\rangle \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{n_2 \cos^2 \vartheta_2 \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \right]. \quad (55)$$

И вот теперь все получается хорошо (рис. 11), по крайней мере — качественно. Небольшие количественные расхождения с точным квантовым решением, по-видимому, объясняются тем, что мы здесь все-таки используем линейризованное приближение. Легко показать, что текущий радиус тела флуктуационной неопределенности в полярной системе координат равен

$$R(\theta) = \sqrt{\frac{G}{4} \cos^2 \theta + \frac{1}{4G} \sin^2 \theta}. \quad (56)$$

Пропало, наконец, противоречие с принципом неопределенности Гейзенберга. Действительно, в проходящем пучке возросли фазовые флуктуации и уменьшились амплитудные. Ключевым моментом

при этом была перенормировка квадратур, чтобы не нарушался коммутатор $[\Delta\hat{a}, \Delta\hat{a}^\dagger] = \hat{I}$. Он не может быть другим в силу неделимости фотона. Именно этот фактор приводит к «раскачиванию» фазы и флуктуаций мнимой квадратуры ΔY без видимой на то причины, и именно он лежит в основе возникающего парадокса.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вернемся к формулировке нашего парадокса и проследим пути его разрешения. В нелинейном светоделителе происходит стабилизация амплитудных флуктуаций как в классическом, так и в квантовом описании. Это выражается, в частности, в подавлении флуктуаций квадратурной компоненты X , направленной вдоль вектора средней действительной амплитуды на комплексной плоскости. При этом дисперсия второй квадратуры Y , направленной вдоль чисто мнимой оси и отвечающей за фазовые флуктуации, остается инвариантной в классическом описании даже с учетом вакуумных флуктуаций. И действительно, нет никаких физических модельных причин, приводящих к ее изменению. Но при этом нарушается принцип неопределенности Гейзенберга. Только квантовая теория предсказывает увеличение дисперсии флуктуаций квадратурной компоненты Y . За счет чего? Ответ дает линеаризованная квантовая теория в представлении Гейзенберга, наиболее близкая к классическому описанию. Непосредственное решение нарушает коммутационное соотношение $[\Delta\hat{a}, \Delta\hat{a}^\dagger] = \hat{I}$ в силу нелинейности задачи. Но может ли нарушаться коммутационное соотношение $[\Delta\hat{a}, \Delta\hat{a}^\dagger] = \hat{I}$? Если фотоны неделимы, то нет. Восстановить коммутационное соотношение можно перенормировкой операторов рождения и уничтожения, и тогда дисперсия по Y увеличивается, а принцип неопределенности, разумеется, выполняется.

Итак, фундаментальной причиной парадокса является неделимость фотона.

Кроме того, мы приходим и к практически важному выводу о возможности селекции фотонных флуктуаций: амплитудные флуктуации отфильтровываются либо в проходящий пучок, либо в отраженный в зависимости от расположения линейной и нелинейной сред, а фазовые — соответственно в отраженный либо в прошедший. Итак, мы можем разделить амплитудные и фазовые флуктуации сиг-

нала, направив первые в один канал, а вторые — в другой. Это весьма привлекательно для систем оптической передачи и обработки информации, а также борьбы с шумами. При классическом описании такого рода нелинейная фильтрация оказывается ущербной, поскольку она распространяется только на амплитудные флуктуации, а фазовые остаются неизменными.

И еще один важный практический вывод, относящийся уже к теоретическому описанию нелинейных квантовых систем. Совершенно очевидно, что линейную квантовую модель можно описывать классически, например с помощью комплексных амплитуд, и лишь в итоговом выражении заменить их на соответствующие операторы в представлении Гейзенберга, а затем проводить усреднения и пр. Это существенное упрощение адекватно потому, что в линейной задаче операторы не перемножаются ни друг на друга, ни сами на себя, следовательно, их некоммутативность никак не сказывается на результате. Примером тут может быть обычный линейный светоделитель без потерь. А как быть с линеаризованным по флуктуациям приближением? Казалось бы, все то же самое. Переменные входят в описание линейно и не перемножаются ни друг на друга, ни сами на себя. И действительно, в многолучевом интерферометре с керровской нелинейностью [7, 10, 11], о котором мы упоминали в начале статьи, квантовое и классические описания флуктуаций идентичны в пределах адекватности линеаризации. Но там не нарушалось коммутационное соотношение $[\Delta\hat{a}, \Delta\hat{a}^\dagger] = \hat{I}$! А на примере нелинейного светоделителя мы убедились, что это бывает не всегда. Таким образом, нужно быть крайне осторожным при описании даже линеаризованных по малым флуктуациям квантовых систем и не торопиться с обобщением на них наглядных модельных классических результатов.

В заключение отметим, что эта задача заинтересовала Я. А. Фофанова в Санкт-Петербурге, которому удалось получить субпуассоновское распределение фотоотчетов в эксперименте с нелинейным светоделителем. Дисперсия амплитудных флуктуаций фототока при этом была меньше дисперсии амплитудных флуктуаций пуассоновского состояния на 1 % [25, 26], что соответствует нашим теоретическим предсказаниям.

Авторы благодарны А. С. Чиркину и Ранджиту Синху за полезные обсуждения и конструктивную критику.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-07-00938а).

ПРИЛОЖЕНИЕ

В формуле (12) фигурируют два типа сомножителей. Первый из них (D_m) представляет собой коэффициент пуассоновского разложения входного когерентного состояния по фоковским состояниям $|m\rangle$:

$$D_m^2 = \exp(-\bar{m}) \frac{|\bar{m}|^m}{m!},$$

где \bar{m} — среднее число фотонов. При $\bar{m} > 20$ с хорошей точностью можно использовать для D_m^2 гауссовское приближение

$$D_m^2 \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{m}}} \exp\left[-\frac{(m - \bar{m})^2}{2\bar{m}}\right].$$

Второй тип сомножителя — биномиальный член вида

$$A_{kl} = \sqrt{C_m^k (\tau^2)^k (\rho^2)^l}$$

— определяет вероятность прохождения k и отражения $l = m - k$ фотонов при фиксированном числе входных фотонов m . Эта вероятность равна A_{kl}^2 . Если выполняются условия $\bar{m} > 100$ и $\bar{m}\tau^2\rho^2 > 20$, то на основании теоремы Муавра–Лапласа с хорошей точностью можно использовать для A_{kl}^2 приближение

$$A_{kl}^2 \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2\bar{m}(1-\tau^2)}} \exp\left[-\frac{(k - \tau^2\bar{m})^2}{2\tau^2\bar{m}(1-\tau^2)}\right].$$

Суммирование в (12) до бесконечности по m в случае когерентного состояния на входе практически можно вести до верхнего предела $\bar{m} + 5\sqrt{\bar{m}}$, поскольку слагаемые, отстоящие от среднего значения более чем на пять среднеквадратических отклонений, пренебрежимо малы.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
2. J. S. Bell, Physics **1**, 195 (1964).
3. А. В. Белинский, Д. Н. Клышко, УФН **163**, 1 (1993).
4. А. В. Белинский, Письма в ЖЭТФ **54**, 13 (1991).
5. А. В. Белинский, Д. Н. Клышко, ЖЭТФ **102**, 116 (1992).
6. А. В. Белинский, Д. Н. Грановский, Письма в ЖЭТФ **93**, 552 (2011).
7. А. В. Белинский, *Квантовые измерения*, БИНОМ: Лаборатория знаний, Москва (2008).
8. S. Reynaud and E. Giacobino, J. Phys. (Fr.) **49**(6), C2 (1988).
9. А. В. Белинский, А. С. Чиркин, Опт. и спектр. **67**, 1226 (1989).
10. А. В. Белинский, Н. Н. Розанов, Опт. и спектр. **73**, 153 (1992).
11. A. V. Belinskii and N. N. Rosanov, Transverse Patterns in Nonlinear Optics. Proc. SPIE **1840**, 291 (1991).
12. Я. Перина, *Квантовая статистика линейных и нелинейных оптических явлений*, Мир, Москва (1987).
13. Д. Ф. Смирнов, А. С. Трошин, УФН **153**, 233 (1987).
14. А. В. Белинский, А. С. Чиркин, Опт. и спектр. **66**, 1190 (1989).
15. L. A. Orozko, M. G. Raizen, M. Xiao et al., J. Opt. Soc. Amer. B **4**, 1490 (1987).
16. Y. Yamamoto, I. Imoto, and S. Machida, Phys. Rev. A **34**, 3243 (1986).
17. H. A. Haus and Y. Yamamoto, Phys. Rev. A **34**, 270 (1986).
18. Y. Yamamoto, S. Machida, and O. Nilsson, Phys. Rev. A **34**, 4025 (1986).
19. A. N. Oraevsky, J. Opt. Soc. Amer. B **5**, 933 (1988).
20. С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, А. С. Чиркин, *Введение в статистическую радиофизику и оптику*, Наука, Москва (1981).
21. А. В. Белинский, Письма в ЖЭТФ **51**, 341 (1990).
22. А. В. Белинский, КЭ **18**, 84 (1991).
23. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, Москва (1970).
24. U. Leonhardt, *Measuring the Quantum State of Light*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1997).
25. Ya. A. Fofanov, Opt. and Spectr. **94**, 802 (2003).
26. Ya. A. Fofanov, ICONO 2010: Int. Conf. on Coherent and Nonlinear Optics, Proc. SPIE **7993**, 79930O (2010).