ЖЭТФ, 2013, том 144, вып. 5 (11), стр. 951–956 © 2013

ГЕОМЕТРОДИНАМИКА ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ В МЕТРИКЕ РЕЙССНЕРА – НОРДСТРЕМА

С. В. Чернов *

Астрокосмический центр, Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук 117997, Москва, Россия

Поступила в редакцию 8 мая 2013 г.

Рассматривается геометродинамика тонкой, пылевой, электронейтральной оболочки в метрике заряженной черной дыры Рейсснера – Нордстрема. Для построения гамильтониана тонкой оболочки используется формализм Арновитта – Дезера – Мизнера. Выводится волновое уравнение. Показано, что волновое уравнение является разностным однородным уравнением второго порядка. Найдены точные аналитические решения.

DOI: 10.7868/S0044451013110072

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается модель тонких оболочек, суть которой заключается в следующем. В четырехмерном пространстве-времени рассматривается сферически-симметричная гиперповерхность Σ, которая делит данное многообразие на две области, “in” и “out”. Эта бесконечно тонкая гиперповерхность обладает конечной массой и энергией, эволюция которой описывается уравнениями Эйнштейна. Впервые такую модель рассматривал Израэль в работе [1] (см. также [2]), окончательный же формализм тонких оболочек был создан в работе [3]. В самом простейшем случае, когда маломассивная оболочка разделяет плоское пространство-время Минковского, заполненное идеальной жидкостью, тонкая оболочка описывает ударную волну [4]. В общем случае тонкая оболочка представляет более сложную конфигурацию. Классическая эволюция такой оболочки в различных пространствах рассматривалась во многих работах [5–8].

В этой статье нас в первую очередь будут интересовать не классические, а квантовые аспекты тонкой оболочки. В теории тонких оболочек существует два подхода к исследованию квантовых свойств. Первый подход является довольно «игрушечным», но в его основе лежит вполне физическое требование, что полная энергия системы, измеряемая наблюдателем на бесконечности, является гамильтонианом. А зная гамильтониан, можно вывести волновое уравнение. Волновое уравнение в такой системе является разностным уравнением второго порядка со сдвигом вдоль мнимой оси. Оказывается, что для такой «игрушечной» модели можно довольно легко получить вполне физические волновые функции и спектр масс черных дыр [9–12].

Второй подход является более строгим и заключается в применении формализма Арновитта – Дезера – Мизнера (АДМ) к квантованию тонкой оболочки. Исходя из действия Эйнштейна – Гильберта, с помощью АДМ-формализма удается построить гамильтониан тонкой оболочки, а затем и выписать волновое уравнение, которое также является уравнением разностного типа второго порядка. В отличие от первого подхода, здесь волновые функции полностью покрывают заданное многообразие. Например, если рассматривать пространство-время Шварцшильда, то волновые функции будут покрывать все многообразие, включая кротовые норы и белые дыры. Поэтому в данном подходе довольно трудно получить точные аналитические решения и приходится рассматривать разнообразные приближенные методы решения разностного уравнения [13–16].

Хотя эти два подхода довольно сильно отличаются друг от друга, они обладают многими одинаковыми свойствами. Так, например, волновое уравнение в обоих случаях является уравнением разностного типа второго порядка со сдвигом вдоль мнимой оси. В некоторых частных случаях эти уравнения совпадают [12].

*E-mail: chernov@lpi.ru

В этой работе исследуется геометродинамика тонкой оболочки в метрике заряженной черной дыры Рейсснера – Нордстрема. Выводится и исследуется волновое уравнение. Как уже говорилось, волновое уравнение является уравнением разностного типа или, другими словами, дифференциальным уравнением бесконечного порядка. И если в предыдущих работах волновое уравнение исследовалось сведением разностного уравнения к дифференциальному уравнению путем разложения в ряд Тейлора до второго порядка малости по малому параметру вдоль мнимой оси [13–16], то здесь исследуется общее разностное уравнение и строятся некоторые точные аналитические решения.

В работе приняты следующие обозначения (аналогично [13, 16]): область I: $r < \hat{r} - \varepsilon$, область II: $r > \hat{r} + \varepsilon$, область III: $\hat{r} - \varepsilon < r < \hat{r} + \varepsilon$. При $\varepsilon \to 0$ область $III \to \Sigma$. Везде ниже квадратная скобка означает следующее выражение

$$[A] = \lim_{\varepsilon \to 0} (A(\hat{r} + \varepsilon) - A(\hat{r} - \varepsilon)).$$

2. ГЕОМЕТРОДИНАМИКА ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим модель тонкой пылевой электронейтральной оболочки в метрике Рейсснера – Нордстрема. Оболочка задается гиперповерхностью Σ, которая разделяет пространство-время Рейсснера – Нордстрема на две области "in" и "out" соответственно. Каждая область будет описываться метрикой заряженной черной дыры Рейсснера – Нордстрема

$$ds^2_{out,in} = -f dt^2 + \frac{dr^2}{f} + r^2 d\Omega,$$

где

$$f = 1 - \frac{2m_{in,out}}{r} + \frac{Q^2_{in,out}}{r^2}$$

и введены следующие обозначения: $m_{in,out}$ — масса черной дыры внутри и вне оболочки, $Q_{in,out}$ — заряд черной дыры внутри и вне оболочки. Как сказано выше, будем рассматривать электронейтральную оболочку, следовательно, заряды черных дыр вне и внутри оболочки равны: $Q_{in} = Q_{out}$.

Для математического описания такой системы запишем действие. Полное действие есть сумма действий гравитационной, электромагнитной частей и действия оболочки (в дальнейшем будем использовать систему единиц, в которой скорость света, постоянная Планка и гравитационная постоянная равны единице, $c = h = G = 1$) [17]:

$$S = S_{gr} + S_{em} + S_{shell} = \frac{1}{16\pi} \times \\ \times \int\limits_{I+II+III} \sqrt{-g}(R - F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\, d^4x - M \int\limits_{\Sigma} d\tau, \quad (1)$$

где τ — собственное время наблюдателя на оболочке, M — полная масса оболочки, R — скаляр кривизны, $F_{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля, g — определитель метрики. К этому действию необходимо добавить поверхностные члены на бесконечности [18]. Как хорошо известно, поверхностные члены не изменяют динамических уравнений. Они необходимы для получения правильных асимптотик. В работе [19] исследовалась эта проблема и были получены все необходимые поверхностные члены, которые необходимо добавить в действие (см. также [16, 20]). Поэтому мы не будем касаться здесь этой проблемы. Далее предполагаем, что все необходимые поверхностные члены добавлены в действие.

Для квантования тонкой оболочки с помощью АДМ-формализма нам потребуется стандартная форма АДМ-метрики, которая имеет хорошо известный вид:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + L^2(dr + N^r dt)^2 + R^2 d\Omega. \quad (2)$$

В этой метрике функция хода N, сдвига N^r, L и R зависят от двух переменных t и r и предполагается, что все метрические коэффициенты непрерывны на оболочке. Производные же от них могут иметь разрыв на оболочке. Для этой метрики (2) полное действие (1) перепишется в виде [13, 16, 19, 20]

$$S = \int\limits_{I+II+III} \Big(P_L \dot{L} + P_R \dot{R} - N H^{gr} - N^r H^{gr}_r + P^r A_{r,t} - \\ - N H^{em} - N^r H^{em}_r - \phi (P^r)_{,r} \Big)\, dr\, dt + \\ + \int\limits_{\Sigma} \left(\hat{\pi}\dot{\hat{r}} - \hat{N} \left(\frac{\hat{R}[R']}{\hat{L}} + \sqrt{M^2 + \frac{\hat{\pi}^2}{\hat{L}^2}} \right) + \\ + \hat{N}^r \left(\hat{L}[P_L] + \hat{\pi} \right) - [A_t P^r] \right) dt, \quad (3)$$

где введены стандартные выражения для супергамильтониана и суперимпульса гравитационного и электромагнитного поля [13, 16, 19]:

$$
\begin{aligned}
H^{gr} &= \left(\frac{LP_L^2}{2R^2} - \frac{P_L P_R}{R}\right) + \\
&+ \left(\left(\frac{RR'}{L}\right)' - \frac{L}{2} - \frac{(R')^2}{2L}\right), \\
H_r^{gr} &= P_R R' - L P_L', \quad H^{em} = \frac{L(P^r)^2}{2R^2}, \\
H_r^{em} &= -A_r (P^r)_{,r}, \quad \phi = -A_t + N^r A_r.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Шляпка над буквой означает, что значение данной величины берется на оболочке. Сопряженные импульсы определяются следующими выражениями:

$$
\begin{aligned}
P_N &= \frac{\delta S}{\delta \dot{N}} = 0, \quad P_{N^r} = \frac{\delta S}{\delta \dot{N}^r} = 0, \\
P_L &= \frac{\delta S}{\delta \dot{L}} = \frac{R}{N}\left(R' N^r - \dot{R}\right), \quad P_{\hat{L}} = \frac{\delta S}{\delta \dot{\hat{L}}} = 0, \\
P_R &= \frac{\delta S}{\delta \dot{R}} = \frac{L}{N}\left(R' N^r - \dot{R}\right) + \frac{R}{N}\left((LN^r)' - \dot{L}\right), \\
\hat{\pi} &= \frac{\delta S}{\delta \dot{\hat{r}}} = \frac{M \hat{L}^2 (\hat{N}^r + \dot{\hat{r}})}{\sqrt{\hat{N}^2 - \hat{L}^2 (\hat{N}^r + \dot{\hat{r}})^2}}, \\
P_{\hat{R}} &= \frac{\delta S}{\delta \dot{\hat{R}}} = 0, \quad P^r = \frac{\delta S}{\delta \dot{A}_r} = R^2 \frac{A_{r,t} - A_{t,r}}{NL},
\end{aligned} \tag{5}
$$

где штрих (a') означает дифференцирование по r, а точка над буквой $(\dot{a})$ — дифференцирование по t. Рассмотрим действие (3). В этом действии переменные N, N^r, $\hat{N}$, $\hat{N}$, ϕ являются множителями Лагранжа. Здесь, как видно, помимо обычных множителей Лагранжа, входят множители, непосредственно связанные с оболочкой. Если варьировать действие по множителям Лагранжа, то получим следующие гамильтоновы связи:

$$
\begin{aligned}
&H = H^{gr} + H^{em} = 0, \quad H_r = H_r^{gr} + H_r^{em} = 0, \\
&\hat{H} = \frac{\hat{R}[R']}{\hat{L}} + \sqrt{M^2 + \frac{\hat{\pi}^2}{\hat{L}^2}} = 0, \\
&\hat{H}_r = \hat{L}[P_L] + \hat{\pi} = 0, \quad (P^r)_{,r} = 0.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Это есть как раз те искомые связи, действия которых на волновые функции равны нулю (т. е. гамильтонианы). Первые три связи — это обычные АДМ-связи [19], а последние две связи появляются здесь благодаря присутствию оболочки [13, 16]. Это связи на оболочке.

Перепишем полное действие всей системы (3), используя гамильтоновы связи. В результате останутся следующие слагаемые:

$$
\begin{aligned}
S = &\int\limits_{I+II+III} \left(P_L \dot{L} + P_R \dot{R} + P^r A_{r,t}\right) dr\, dt + \\
&+ \int\limits_{\Sigma} \left(\hat{\pi}\dot{\hat{r}} - [A_t P^r]\right) dt.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Такая часть действия называется формой Лиувилля. Точно такое выражение для метрики Шварцшильда было получено в работах [13, 16]. Единственное отличие заключается в том, что у нас добавились слагаемые, связанные с зарядом, так как мы рассматриваем заряженную черную дыру. Далее нам необходимо сделать каноническую замену переменных, для того чтобы записать гамильтоновы связи в каноническом виде. Для шваршильдовской черной дыры каноническая замена переменных была выполнена в работе [19], а для черной дыры Рейсснера – Нордстрема в работе [21]. Обобщая результаты двух приведенных выше работ и заменяя импульсы операторами, в результате долгих вычислений получаем следующие связи (подробный вывод описан в работе [22], см. также [13, 16]). Связи в областях I и II равны

$$
\frac{\partial \Psi}{\partial R} = 0, \quad m'\Psi = 0, \quad Q'\Psi = 0. \tag{8}
$$

Из этих связей видно, что волновая функция не зависит от радиуса $R(r)$, масса и заряд черной дыры не зависит от радиуса r, а волновая функция сводится к виду

$$
\Psi = \delta(m - m_{in,out})\, \delta(Q - Q_{in,out}).
$$

На оболочке дело обстоит значительно сложнее. Первая связь дает уравнение

$$
\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{r}} = 0. \tag{9}
$$

И, таким образом, волновая функция зависит только от следующих переменных $\Psi(m_{in}, m_{out}, Q, \hat{S})$. Вторая связь на оболочке дает уравнение

$$
\begin{aligned}
2&\left(F_{out} + F_{in} - \frac{M^2}{\hat{R}^2}\right)\Psi(S) = \\
&= \sqrt{F_{in}F_{out}}\left[\Psi(\hat{S} + i\zeta) + \Psi(\hat{S} - i\zeta)\right] + \\
&+ \sqrt{F_{in}F_{out}}^{\,*}(\hat{S} + i\zeta)\Psi(\hat{S} + i\zeta) + \\
&+ \sqrt{F_{in}F_{out}}^{\,*}(\hat{S} - i\zeta)\Psi(\hat{S} - i\zeta),
\end{aligned} \tag{10}
$$

где введены переменные $\hat{S} = \hat{R}^2/R_0^2$ и $\zeta = 2/R_0^2$, а R_0 — нормировочный радиус. Звездочка «$*$» означает комплексное сопряжение. В работах [13, 16] было принято, что $R_0 = R_g$. Здесь мы не будем конкретизировать этот нормировочный радиус. Такое уравнение мы и будем исследовать. Оно представляет собой разностное однородное уравнение второго порядка [23, 24] и для метрики Рейсснера – Нордстрема запишется в виде

$$\begin{aligned} 2\left(2-2\frac{m_{in}+m_{out}}{\hat{R}}+\frac{2Q^2-M^2}{\hat{R}^2}\right)\Psi(\hat{S}) = \\ = e^{i\phi_{in}+i\phi_{out}}\sqrt{|F_{in}||F_{out}|}\Big(\Psi(\hat{S}+i\zeta)+\Psi(\hat{S}-i\zeta)\Big)+ \\ + e^{-i\phi_{in}-i\phi_{out}}\sqrt{|F_{in}||F_{out}|}(\hat{S}+i\zeta)\Psi(\hat{S}+i\zeta)+ \\ + e^{-i\phi_{in}-i\phi_{out}}\sqrt{|F_{in}||F_{out}|}(\hat{S}-i\zeta)\Psi(\hat{S}-i\zeta), \end{aligned} \tag{11}$$

где фазы определяются из следующих условий: $\sqrt{F} = \sqrt{|F|}\exp(i\phi)$, для черных дыр $\phi = 0$ в области R_+, $\phi = \pi/2$ в области T_-, $\phi = \pi$ в области R_-, $\phi = -\pi/2$ в области T_+ и для кротовых нор $\phi = \pi$ в области R_+, $\phi = -\pi/2$ в области T_-, $\phi = 0$ в области R_-, $\phi = \pi/2$ в области T_+ [13, 16]. Это разностное волновое уравнение для случая незаряженной черной дыры исследовалось в работах [13, 16] путем разложения функции $\Psi(\hat{S} \pm i\zeta)$ до второго порядка малости по малому параметру ζ. В следующем разделе мы исследуем такое уравнение в более общем виде, рассматривая волновую функцию при больших значениях радиуса оболочки.

3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Перед тем как приступить к исследованию уравнения (11), изучим сначала более простое уравнение вида

$$\Psi(S+i\zeta)+\Psi(S-i\zeta) = 2\Psi(S). \tag{12}$$

Как мы сейчас увидим, это уравнение имеет такие же свойства, как и более общее волновое уравнение (11). Непосредственно можно видеть, что уравнение (12) получается из волнового уравнения (11) при следующих предположениях: 1) полная масса оболочки M много меньше характерных размеров системы, 2) массой и зарядом черной дыры можно пренебречь. Такая ситуация описывает случай движения маломассивной оболочки, которая соединяет два (in и out) плоских пространства-времени Минковского R_+ ($\phi_{in} = \phi_{out} = 0$ для черных дыр). Хотя пространство Минковского рассматривают как область R_+, формально это движение можно распространить и на случай, когда одна из областей in или out является областью R_- ($\phi_{in} = \pi$ или $\phi_{out} = \pi$ для черных дыр). Для этого надо в уравнении (11) изначально выбрать одну из областей R_- и устремить параметры системы m, Q, M к нулю.

Для того чтобы получить решение уравнения (12), сделаем замену переменных $\hat{S} = -i\zeta y$, в результате которой уравнение (12) примет вид

$$\Psi(y+1)+\Psi(y-1) = 2\Psi(y). \tag{13}$$

Общее решение этого уравнения запишется в виде

$$\Psi = AC_1(y) + ByC_2(y), \tag{14}$$

где A, B — произвольные постоянные, а $C_1(y) = C_1(y+1)$, $C_2(y) = C_2(y+1)$ — периодические функции с периодом 1. Разложим эти периодические функции в ряд Фурье,

$$C(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(2\pi i k y), \tag{15}$$

и, делая обратную замену переменных, запишем общее решение уравнения (12) в виде

$$\begin{aligned} \Psi(\hat{S})_+ = A\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(-2\pi k\frac{\hat{S}}{\zeta}\right) + \\ + Bi\frac{\hat{S}}{\zeta}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(-2\pi k\frac{\hat{S}}{\zeta}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Прямой подстановкой можно легко убедиться, что это решение удовлетворяет уравнению (12).

Рассмотрим теперь другое уравнение, а именно

$$\Psi(S+i\zeta)+\Psi(S-i\zeta) = -2\Psi(S). \tag{17}$$

Это уравнение аналогично предыдущему уравнению (12), его можно получить из уравнения (11) при тех же предположениях. Теперь оболочка движется как в области R_-, так и R_+ для случая черной дыры или же рассматриваем движение в двух областях R_+ для случая кротовой норы. Знак минус возникает из одной из фаз $\phi_{in,out}$. Легко показать, что решение уравнения (17) отличается от решения уравнения (12) только фазовым множителем $(-1)^y$, который представим в виде $(-1)^y = \exp(i\pi y)$. В результате чего общее решение уравнения (17) запишется в виде

$$\begin{aligned} \Psi(\hat{S})_- = \left(A\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(-2\pi k\frac{\hat{S}}{\zeta}\right) + \right. \\ \left. + Bi\frac{\hat{S}}{\zeta}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(-2\pi k\frac{\hat{S}}{\zeta}\right)\right)\exp\left(-\pi\frac{\hat{S}}{\zeta}\right) = \\ = \Psi(\hat{S})_+ \exp\left(-\pi\frac{\hat{S}}{\zeta}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Физическая интерпретация этого результата следующая. Предположим, что оболочка коллапсирует. В первом случае при движении в двух областях R_+ оболочка коллапсировала на маломассивную черную дыру, а во втором случае оболочка двигалась в областях R_+, R_- и коллапсировала на кротовую нору. Для наблюдателя, находящегося на бесконечности, волновая функция оболочки при движении на черную дыру будет экспоненциально больше, чем при движении на кротовую нору и соответственно вероятность того, что оболочка сколлапсирует на черную дыру будет больше, чем вероятность коллапса на кротовую нору. Более точно, вероятность реализации многообразия с черной дырой экспоненциально больше, чем с кротовой норой.

Теперь исследуем уравнение (11) в общем виде. Прежде всего заметим, что функция F может быть как действительной, так и комплексной (в точках $\hat{S}\pm i\zeta$), но так как под корнем $\sqrt{|F|}$ стоит модуль, то это выражение всегда будет действительным. Пусть сначала оболочка движется в двух областях R_+, т. е. значения фазы равны нулю, $\phi_{in} = \phi_{out} = 0$, для черной дыры рассмотрим случай, когда оболочка находится на большом расстоянии от черной дыры ($\hat{S} \gg R_0$). В этом предположении уравнение (11) примет вид

$$\Psi(S+i\zeta)+\Psi(S-i\zeta) = \\ = \left[2+\frac{(m_{out}-m_{in})^2-M^2}{R_0^2 S}\right]\Psi(S). \quad (19)$$

Для того чтобы решить это разностное уравнение, сделаем замену переменных $\hat{S} = -i\zeta y$. В результате уравнение (19) примет вид

$$\Psi(y+1)+\Psi(y-1) = \\ = \left[2+i\frac{(m_{out}-m_{in})^2-M^2}{R_0^2\zeta y}\right]\Psi(y). \quad (20)$$

Решение этого уравнения выражается через гипергеометрическую функцию

$$\Psi(y) = A_1C_1(y)yF\left(1+y,2,i\frac{(m_{out}-m_{in})^2-M^2}{\zeta R_0^2}\right)+A_2C_2(y)yF\left(1+y,2,i\frac{(m_{out}-m_{in})^2-M^2}{\zeta R_0^2}\right)\times \\ \times\sum_{k_2=0}^{y-1}\prod_{k_1=1}^{k_2-1}\left[\frac{\left(2+i\dfrac{(m_{out}-m_{in})^2-M^2}{\zeta R_0^2}+2k_1\right)F\left(2+k_1,2,i\dfrac{(m_{out}-m_{in})^2-M^2}{\zeta R_0^2}\right)}{(2+k_1)F\left(3+k_1,2,i\dfrac{(m_{out}-m_{in})^2-M^2}{\zeta R_0^2}\right)}-1\right]. \quad (21)$$

Здесь предполагается, что если верхнее значение индекса суммирования меньше нижнего значения, то такая сумма равна нулю. Если верхнее значение индекса произведения меньше нижнего значения, то такое произведение равно единице [24]. Функции C_1 и C_2 также являются периодическими функциями с периодом, равным единице. И эти функции также могут быть разложены в ряд Фурье. Кратко опишем нахождение этого решения. Непосредственной подстановкой, используя тождество для вырожденной гипергеометрической функции [25]

$$(c-a)\Phi(a-1,c,x)+(2a-c+x)\Phi(a,c,x) = \\ = a\Phi(a+1,c,x), \quad (22)$$

легко убедиться, что первое слагаемое $yF(\dots)$ удовлетворяет искомому уравнению. Зная одно частное решение, можно понизить на единицу порядок разностного уравнения. Для понижения порядка воспользуемся аналогом формулы Абеля для разностного уравнения (метод описан в § 5 учебного пособия [24]). Далее получим разностное уравнение первого порядка, общее решение которого легко найти (решение приведено в § 2 учебного пособия [24]). Для окончательной записи решения необходимо сделать обратную замену переменных $y = i\hat{S}/\zeta$. Также легко показать, что при

$$(m_{out}-m_{in})^2 = M^2$$

решение (21) переходит в решение (14).

Теперь рассмотрим пример, когда оболочка движется в областях R_-, R_+ для случая черной дыры. Разностное волновое уравнение запишется в виде

$$\Psi(S+i\zeta)+\Psi(S-i\zeta) = \\ = -\left[2+\frac{(m_{out}-m_{in})^2-M^2}{R_0^2 S}\right]\Psi(S). \quad (23)$$

Как уже говорилось, для случая движения в плоском пространстве решение этого уравнения будет отличаться от предыдущего решения только множителем $\exp(-\pi\hat{S}/\zeta)$. Поэтому и в более общем случае волновая функция для реализации кротовой норы будет отличаться на множитель $\exp(-\pi\hat{S}/\zeta)$ от волновой функции для реализации в случае черной дыры. Соответствующие выводы, сделанные ранее, можно по аналогии перенести и на этот случай.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовалась геометродинамика тонкой оболочки в метрике Рейсснера – Нордстрема. Исходя из действия системы было выведено волновое уравнение. Нетривиальность уравнения заключается в том, что это уравнение разностного типа второго порядка. В физике такой тип уравнений встречается редко, а если встречается, то предпочитают не решать его, а сводить к дифференциальному уравнению путем разложения до второго порядка. При этом второй порядок выбирается не из физических соображений, а из того, что теория дифференциальных уравнений второго порядка хорошо развита и относительно легко можно получить приближенные решения. В работе же делается попытка решить это разностное уравнение в общем виде, и в какой-то мере это удается сделать в предположении больших радиусов. Полученное аналитическое решение очень нетривиально и его анализ представляет определенные трудности, но тем не менее оно представляет определенный интерес в теории тонких оболочек.

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 8422, НШ-2915.2012.2 «Образование крупномасштабной структуры Вселенной и космологические процессы», РФФИ (грант № 11-02-00244а).

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Israel, Nuovo Cimento B **44**, 1 (1966).

2. K. Kuchar, Czech. J. Phys. B **18**, 435 (1968).

3. V. A. Berezin, V. A. Kuzmin, and I. I. Tkachev, Phys. Rev. D **36**, 2919 (1987).

4. В. А. Березин, В. А. Кузьмин, И. И. Ткачев, ЖЭТФ **86**, 785 (1984).

5. В. И. Докучаев, С. В. Чернов, Письма в ЖЭТФ **85**, 727 (2007).

6. S. V. Chernov and V. I. Dokuchaev, Class. Quant. Grav. **25**, 015004 (2008).

7. В. И. Докучаев, С. В. Чернов, ЖЭТФ **134**, 245 (2008).

8. В. И. Докучаев, С. В. Чернов, ЖЭТФ **137**, 13 (2010).

9. V. A. Berezin, N. G. Kozimirov, V. A. Kuzmin, and I. I. Tkachev, Phys. Lett. B **212**, 415 (1988).

10. P. Hajicek, Comm. Math. Phys. **150**, 545 (1992).

11. V. A. Berezin, Phys. Rev. D **55**, 2139 (1997).

12. В. И. Докучаев, С. В. Чернов, ЖЭТФ **138**, 645 (2010).

13. V. A. Berezin, A. M. Boyarsky, and A. Yu. Neronov, Phys. Rev. D **57**, 1118 (1998).

14. V. A. Berezin, A. M. Boyarsky, and A. Yu. Neronov, Phys. Lett. B **455**, 109 (1999).

15. A. Yu. Neronov, Phys. Rev. D **59**, 044023 (1999).

16. В. А. Березин, ЭЧАЯ **34**, 48 (2003).

17. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).

18. T. Regge and C. Teitelboim, Ann. Phys. **88**, 286 (1974).

19. K. V. Kuchar, Phys. Rev. D **50**, 3961 (1994).

20. J. Mäkelä, P. Repo, M. Luomajoki, and J. Piilonen, Phys. Rev. D **64**, 024018 (2001).

21. C. Vaz and L. Witten, Phys. Rev. D **63**, 024008 (2001).

22. С. В. Чернов, Дисс. ... канд. физ.-матем. наук, ФИАН, Москва (2010).

23. А. Ф. Никифоров, С. К. Суслов, В. Б. Уваров, *Классические ортогональные полиномы дискретной переменной*, Наука, Москва (1985).

24. А. В. Ласунский, *Разностные уравнения*, НГУ, В. Новгород (2011).

25. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, Наука, Москва (1973), т. 1, с. 242.