

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ГИПЕРЗВУКОВЫХ СОЛИТОНОВ В ДЕФОРМИРОВАННОМ ПАРАМАГНИТНОМ КРИСТАЛЛЕ

*С. В. Сазонов**

*Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 8 мая 2013 г.

Исследована нелинейная динамика субнаносекундного поперечного упругого импульса в низкотемпературном парамагнитном кристалле, помещенном в магнитное поле и подвергнутом в том же направлении статической деформации. Парамагнитные примеси, внедренные в кристалл, обладают эффективным спином $3/2$, а импульс распространяется перпендикулярно магнитному полю. В общем случае структура импульса такова, что неприменимо стандартное для квазимонохроматических сигналов приближение медленноменяющихся огибающих. При определенных условиях в одномерном случае распространение импульса описывается интегрируемым волновым уравнением Конно–Камеямы–Сануки для относительной деформации, которое в квазимонохроматическом пределе переходит в уравнение Хироты для огибающей данной деформации. Детально изучено влияние поперечных возмущений на предельно короткие и квазимонохроматические солитоны. Выявлены условия и особенности самофокусировки и дефокусировки акустических солитонов типа предельно коротких импульсов и солитонов огибающей. Предсказано распространение предельно короткого «полуволнового» гиперзвукового импульса в режиме «акустической пули» в среде с квазиравновесной заселенностью квантовых подуровней эффективных спинов.

DOI: 10.7868/S0044451013110138

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из тенденций развития физической акустики твердого тела в последние два десятилетия является создание в лабораторных условиях упругих импульсов все более малых длительностей [1, 2]. В настоящее время можно говорить о субпикосекундной акустике как о сформировавшемся направлении исследований. Характерные частоты таких импульсов лежат в гигагерцевой и субтерагерцевой областях акустического спектра, поэтому такие импульсы часто называют гиперзвуковыми [3, 4]. Здесь прослеживается четкая параллель с соответствующей тенденцией в нелинейной оптике, где длительность генерируемых световых импульсов достигла фемто- и субфемтосекундных длительностей [5–8].

Как в оптике, так и в акустике длительность генерируемых импульсов может быть такова, что они вмещают порядка одного периода колебаний соответствующей физической природы. Спектр таких импульсов оказывается настолько широким, что за-

частую лишено смысла говорить об их несущих частотах. Как следствие, хорошо зарекомендовавшее себя в оптике и акустике квазимонохроматических сигналов приближение медленноменяющихся огибающих (ММО) [5] здесь становится неприменимым. Поэтому при теоретических исследованиях взаимодействия таких импульсов с веществом приходится использовать иные подходы, позволяющие найти малые параметры. Некоторые из таких подходов будут использованы в данной работе. По сложившейся к настоящему времени терминологии обсуждаемые сигналы называются предельно короткими импульсами (ПКИ). В англоязычной научной литературе за ними устойчиво закрепился термин “few cycle pulses” [6].

При распространении коротких оптических и акустических импульсов в различных средах существенными являются эффекты, связанные с нелинейностью и дисперсией. Поэтому большую популярность получили исследования солитонных режимов распространения. Нелинейная оптика и физическая акустика оказываются в этой связи весьма продуктивными областями. С интервалом всего в несколько лет были экспериментально обнару-

*E-mail: sazonov.sergey@gmail.com

жены и теоретически описаны явления оптической и акустической самоиндуцированной прозрачности (СИП) [10–13]. Пожалуй, эти эффекты явились первыми физическими проявлениями резонансных солитонов, несущие частоты которых практически совпадали с собственными частотами резонансных переходов рассматриваемых сред. В дальнейшем исследовании резонансных и нерезонансных солитонов как оптической, так и акустической природы получили свое развитие.

Важно заметить, что понятие «солитон» тесно связано с математическими свойствами интегрируемости соответствующих нелинейных уравнений (или их систем) в частных производных. Именно благодаря этому обстоятельству солитоны при взаимодействиях между собой проявляют упругие свойства. Таким образом, исследования динамики солитонов различной физической природы (в том числе оптической и акустической) представляют фундаментальный интерес как с точки зрения физики, так и математики.

В настоящей работе речь пойдет об акустических солитонах субнаносекундной длительности, вызывающих последнее время все возрастающий интерес. Это находит проявление в теоретических и экспериментальных работах [2, 14–31].

Мы будем рассматривать распространение гиперзвуковых импульсов в кристаллах, которые содержат примесные парамагнитные ионы. Последние способны испытывать с акустическими импульсами резонансное и нерезонансное взаимодействие, которое называют спин-фононным [3]. Спин-фононное взаимодействие хорошо объясняется на основе механизма Ван Флека [3, 32]. Согласно данному механизму, акустическая волна, распространяясь в кристалле, вызывает в нем локальные деформации, которые модулируют градиенты внутрикристаллического электрического поля. Последние, в свою очередь, вызывают квадрупольные переходы между квантовыми зеемановскими подуровнями парамагнитных примесей.

Эксперименты, связанные с распространением акустических импульсов в кристаллах, где существенно спин-фононное взаимодействие, проводятся обычно при температурах жидкого гелия [3, 11, 13]. Во-первых, это позволяет значительно уменьшить маскирующее влияние тепловых явлений на когерентный характер взаимодействия. Во-вторых, при таких температурах резко падает влияние паразитного затухания гиперзвука, вызванного его рассеянием на дефектах и эффектами решеточного ангармонизма.

Парамагнитные примеси, внедренные в кристалл, обладают эффективными спинами S . К сегодняшнему дню наиболее детально теоретически изучены солитонные режимы при взаимодействии акустических импульсов с парамагнитными примесями, характеризуемыми эффективными спинами $S = 1/2$ (Co^{2+}) и $S = 1$ (Fe^{2+} , Ni^{2+} и т. д.). В первом случае исследования отличаются относительной простотой в силу двухуровневого характера квантовых объектов. В то же время соответствующее спин-фононное взаимодействие оказывается относительно слабым, так как квадрупольный момент эффективного спина $S = 1/2$ равен нулю и механизм Ван Флека здесь не имеет места. Вместо него вступает в силу механизм, связанный с упругой модуляцией компонент тензора Ланде, который приводит к спин-фононному взаимодействию, на три-четыре порядка более слабому, чем при механизме Ван Флека [3]. Поэтому экспериментально наблюдение соответствующих акустических солитонов оказывается затруднительным. Что касается парамагнитных ионов с $S = 1$, то они испытывают сильное взаимодействие с колебаниями кристаллической решетки. Это, в свою очередь, позволяет ставить надежные эксперименты. В то же время отметим, что экспериментально наиболее скрупулезно исследовано спин-фононное взаимодействие для ионов Cr^{3+} , обладающих эффективным спином $S = 3/2$ [33]. Именно эти ионы, внедренные в кристаллическую матрицу Al_2O_3 , были использованы в первом фононном лазере [34], идея создания которого получила теоретическое обоснование в работах [35, 36].

Теоретические исследования, связанные с формированием и распространением акустических солитонов в среде, состоящей из парамагнитных ионов с $S = 3/2$, на сегодняшний день оказываются явно недостаточными [37]. В последней статье рассмотрены особенности эффекта акустической СИП для резонансных квазимонохроматических импульсов в системе примесей с $S = 3/2$. В то же время на сегодня отсутствуют какие-либо работы по исследованию соответствующей динамики предельно коротких и нерезонансных квазимонохроматических солитонов акустической природы в условиях, когда, вообще говоря, неприменимо приближение ММО. Ниже предпринимается попытка восполнить данный пробел.

Целью настоящей работы является теоретическое исследование солитонных режимов распространения гиперзвуковых импульсов в парамагнитном кристалле, содержащем парамагнитные примеси с

эффективным спином $S = 3/2$, без использования приближения ММО. Последнее обстоятельство является особенно важным, так как позволит ниже с общих позиций описать распространение как предельно коротких, так и квазимонохроматических акустических солитонов, чего не было сделано в работе [37]. Кроме того, в настоящей статье значительное влияние будет уделено исследованию влияния поперечных возмущений на предельно короткие и квазимонохроматические гиперзвуковые солитоны с выявлением соответствующих качественных различий.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 на основе полуклассического гамильтонова формализма выводится система волнового и материальных уравнений, описывающих нелинейное распространение поперечного гиперзвукового импульса в кубическом кристалле. Кристалл содержит парамагнитные примеси с эффективным спином $S = 3/2$ и находится в магнитном поле и поле статической деформации. Здесь же без использования приближения ММО, но при определенных условиях, наложенных на зеемановское и квадрупольное штарковское расщепления уровней парамагнитных ионов, проводится процедура исключения материальных переменных. Это позволяет для относительной деформации импульса вывести нелинейное волновое уравнение, переходящее в одномерном случае в интегрируемое уравнение Конно–Камеямы–Сануки (ККС). Применение к данному уравнению приближения ММО позволяет получить для огибающей поля деформации нелинейное, в общем случае неинтегрируемое уравнение Хироты. Разделы 3 и 4 посвящены анализу влияния поперечных возмущений на распространение предельно коротких и квазимонохроматических солитонов. Выявляются условия осуществления режимов самофокусировки, дефокусировки и самоканализирования импульсов. В заключении подведены основные итоги работы и намечены некоторые перспективные исследования в данном направлении.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОДНОМЕРНЫЕ СОЛИТОНЫ

С ионами трехвалентного хрома в кристаллах Al_2O_3 и MgO наиболее эффективно взаимодействуют поперечные (сдвиговые) волны деформации [33]. Поэтому всюду ниже проведем анализ солитонной динамики поперечного гиперзвукового импульса, поляризованного вдоль оси y , параллельной одной

из осей симметрии четвертого порядка кубического кристалла. При этом распространение импульса происходит вдоль оси x , перпендикулярно которой, вдоль оси z , приложены внешнее магнитное поле \mathbf{V} и поле продольной статической деформации $\varepsilon_{zz}^{(0)}$.

В соответствии с описанным во Введении механизмом Ван Флека запишем оператор Гамильтона парамагнитного иона

$$\hat{H} = \hat{H}_Z + \hat{H}_0 + \hat{V}, \quad (1)$$

где зеемановская часть \hat{H}_Z гамильтониана, а также части \hat{H}_0 и \hat{V} , связанные соответственно со статической деформацией и динамическим спин-фононным взаимодействием, имеют вид

$$\hat{H}_Z = g\mu_B B \hat{S}_z, \quad \hat{H}_0 = G_{\parallel} \varepsilon_{zz}^{(0)} \hat{S}_z^2, \quad (2)$$

$$\hat{V} = G_{\perp} (\hat{S}_x \hat{S}_y + \hat{S}_y \hat{S}_x) \varepsilon_{yx}. \quad (3)$$

Здесь g — фактор Ланде, μ_B — магнетон Бора, G_{\parallel} и G_{\perp} — компоненты тензора спин-фононной связи соответственно продольных и поперечных волн, ε_{yz} — компонента тензора деформации поперечного гиперзвукового импульса, распространяющегося в кристалле, $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ — спиновые матрицы, имеющие для $S = 3/2$ вид [37]

$$\begin{aligned} \hat{S}_x &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{S}_y &= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{S}_z &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Гамильтонианы \hat{H}_Z и \hat{H}_0 характеризуют расщепления квантовых уровней эффективного спина в магнитном поле и поле статической деформации.

Используя (1)–(4) и уравнение фон Неймана для матрицы плотности $\hat{\rho}$ и считая длительность импульса значительно меньшей всех времен релаксации, придем к системе материальных уравнений

$$\frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} = -\omega_j^2 U_j + \omega_j \Omega W_j, \quad \frac{\partial W_j}{\partial t} = -\frac{\Omega}{\omega_j} \frac{\partial U_j}{\partial t}, \quad (5)$$

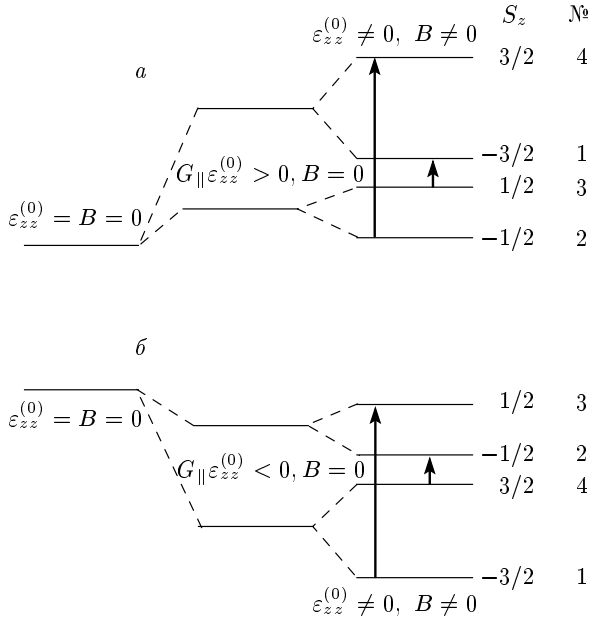


Рис. 1. Схема расщеплений квантовых уровней и разрешенных квантовых переходов (обозначенных стрелками) для эффективного спина $S = 3/2$ в кубическом кристалле, подверженном вдоль оси z статической деформации и магнитному полю, при распространении гиперзвукового сигнала перпендикулярно z

где

$$j = 1, 2; \quad U_1 = \frac{i}{2}(\rho_{31} - \rho_{13}), \quad W_1 = \frac{\rho_{33} - \rho_{11}}{2},$$

$$U_2 = \frac{i}{2}(\rho_{42} - \rho_{24}), \quad W_2 = \frac{\rho_{44} - \rho_{22}}{2},$$

$$\omega_{1,2} = \frac{2}{\hbar} \left(g\mu_B B \mp G_{\parallel} \varepsilon_{zz}^{(0)} \right), \quad \Omega = 2\sqrt{3} \frac{G_{\perp} \varepsilon_{yx}}{\hbar};$$

нумерация квантовых уровней, соответствующая индексам элементов матрицы плотности, ведется в порядке возрастания проекции магнитного момента эффективного спина на ось z (рис. 1).

Итак, в принятой геометрии система материальных уравнений распалась на две независимые подсистемы уравнений типа Блоха (5), описывающих соответственно переходы $1 \leftrightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 4$ (рис. 1). Важно заметить, что частоты данных переходов могут значительно отличаться друг от друга благодаря тому, что помимо зеемановского, присутствует еще и штарковское квадрупольное расщепление, вызванное статической деформацией $\varepsilon_{zz}^{(0)}$. Зеемановское расщепление возникает благодаря снятию вырождения по проекции эффективного спина на ось

z . Это делает спектр зеемановских подуровней эквидистантным. В свою очередь, поле статической деформации вследствие механизма Ван Флека создает градиент внутрикристаллического электрического поля, что вызывает дополнительное к зеемановскому штарковское расщепление. Последнее, как известно, снимает вырождение по абсолютному значению проекции эффективного спина. В нашем случае это приводит к смещению подуровней 2 и 3, для которых $S_z = \pm 1/2$, относительно подуровней 1 и 4 с $S_z = \pm 3/2$. Как следствие, спектр подуровней эффективного спина становится неэквидистантным (рис. 1).

Дополним материальную систему (5) волновым уравнением для поля деформации ε_{yz} . Для этого запишем сначала гамильтониан упругого поля

$$H_a = \frac{1}{2} \int \left[\frac{p_y^2}{\rho_m} + \rho_m a_{\perp}^2 \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \rho_m a_{\parallel}^2 \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \rho_m a_{\perp}^2 \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right] d\mathbf{r}, \quad (6)$$

где a_{\perp} и a_{\parallel} — линейные скорости поперечного и продольного звуков вдоль осей симметрии четвертого порядка кубического кристалла, ρ_m — средняя плотность кристалла, u_y — компонента вектора смещения узлов кристаллической решетки вдоль оси y , p_y — соответствующая данному смещению компонента плотности импульса; относительная деформация ε_{yx} связана со смещением u_y соотношением $\varepsilon_{yx} = 0.5\partial u_y/\partial x$; интегрирование в (6) ведется по всему объему кристалла.

Согласно полуклассическому подходу [38], имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_y}{\partial t} &= \frac{\delta}{\delta p_y} \left(H_a + \langle \hat{V} \rangle \right), \\ \frac{\partial p_y}{\partial t} &= -\frac{\delta}{\delta u_y} \left(H_a + \langle \hat{V} \rangle \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\langle \hat{V} \rangle = Sp(\rho \hat{V})$ — квантовое среднее гамильтониана \hat{V} спин-фононного взаимодействия.

Отсюда, а также из (1)–(3) получим

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} - a_{\perp}^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = \frac{3nG_{\perp}^2}{\hbar\rho_m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{j=1}^2 U_j + a_{\parallel}^2 \Delta_{\perp} \Omega, \quad (8)$$

где $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z'^2$, $z' = (a_{\parallel}/a_{\perp})z$, n — концентрация парамагнитных ионов.

Последним слагаемым в правой части (8) учитывается влияние поперечных эффектов на распространение импульса.

Исключим из самосогласованной нелинейной системы (5), (8) материальные переменные, выразив их через поперечную деформацию ε_{yx} импульса. Для этого ниже будем считать, что собственные частоты ω_1 и ω_2 значительно отличаются друг от друга. Пусть абсолютная величина $G_{\parallel\varepsilon_{zz}^{(0)}}$ близка по значению к $g\mu_B B$. Тогда при $G_{\parallel\varepsilon_{zz}^{(0)}} > 0$ имеем $\omega_1 \ll \omega_2$. В противном случае $\omega_1 \gg \omega_2$ (рис. 1). Для определенности примем, что выполнен первый вариант. Переход ко второму варианту обеспечивается простой заменой индексов $1 \leftrightarrow 2$. Будем считать, что для рассматриваемых квантовых переходов выполнены соответственно условия

$$\delta_1 = (\omega_1 \tau_*)^2 \ll 1, \quad \delta_2 = (\omega_2 \tau_*)^{-2} \ll 1, \quad (9)$$

где τ_* — характерный минимальный временной масштаб импульса. Ниже, квантовые переходы частоты ω_1 , для которых выполнено первое условие (9), будем называть 1-переходами, а переходы частоты ω_2 — 2-переходами.

Заметим, что впервые данные малые параметры были использованы в работах [39, 40] для решения оптических задач без использования приближения ММО.

При $j = 1$ в правой части первого уравнения (5), благодаря (9), можно пренебречь слагаемым $-\omega_1^2 U_1$. Тогда, полагая, что до импульсного воздействия (при $t = -\infty$) квантовая когерентность в спиновой подсистеме отсутствовала ($U_j = 0$), из уравнения (5) находим

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = \omega_1 W_{1\infty} \sin \theta, \quad W_1 = W_{1\infty} \cos \theta, \quad (10)$$

где $\theta = \int_{-\infty}^t \Omega dt'$, $W_{1\infty}$ — начальная разность населенностей подуровней на 1-переходе.

Для 2-перехода ($j = 2$) имеем второе условие (9). Тогда в нулевом приближении по δ_2 можно пренебречь левой частью первого уравнения (5), откуда $U_2 = W_2 \Omega / \omega_2$. Учитывая левую часть в первом приближении, получим

$$U_2 = W_2 \frac{\Omega}{\omega_2} - \frac{1}{\omega_2^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (W_2 \Omega) \approx \approx W_2 \frac{\Omega}{\omega_2} - \frac{W_{2\infty}}{\omega_2^3} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2}. \quad (11)$$

Здесь во втором (малом) слагаемом правой части мы пренебрегли изменением разности населенностей рассматриваемого квантового перехода, положив ее равной начальному значению $W_{2\infty}$. Полагая это же

самое при подстановке $U_2 \approx W_2 \Omega / \omega_2$ во второе уравнение (5), найдем после интегрирования

$$W_2 = W_{2\infty} \left(1 - \frac{\Omega^2}{2\omega_2^2} \right). \quad (12)$$

Подставляя теперь (12) в (11), будем иметь

$$U_2 = W_{2\infty} \frac{\Omega}{\omega_2} \left(1 - \frac{\Omega^2}{2\omega_2^2} \right) - \frac{W_{2\infty}}{\omega_2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2}. \quad (13)$$

Из (8) и (13) находим

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = \frac{3G_{\perp}^2 n}{\hbar \rho_m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \times \times \left(U_1 - W_{2\infty} \frac{\Omega^3}{2\omega_2^3} - \frac{W_{2\infty}}{\omega_2^3} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} \right) + a_{\parallel}^2 \Delta_{\perp} \Omega, \quad (14)$$

где перенормированная за счет квантового 2-перехода скорость a поперечного звука определяется выражением $a = a_{\perp} \sqrt{1 - \eta}$, $\eta = -2\omega_a W_{2\infty} / \omega_2$, $\omega_a = = 3G_{\perp}^2 n / 2\hbar \rho_m a_{\perp}^2$ — коллективная акустическая частота, являющаяся аналогом соответствующего оптического параметра.

Безразмерный параметр η характеризует интенсивность спин-фононного взаимодействия. Если $\eta > 1$, возникает фазовый переход, сопровождаемый возникновением спонтанной статической деформации в кристалле [41]. Взяв $G_{\perp} \sim 10^{-13}$ эрг [13], $n \sim 10^{19}$ см $^{-3}$, $\omega_2 \sim 10^{11}$ с $^{-1}$, $\rho_m \sim 1$ г/см 3 , $a_{\perp} \sim 3 \cdot 10^5$ см/с, имеем $\omega_a \sim 10^9$ с $^{-1}$, $\eta \sim 10^{-2}$. Таким образом, в нашем случае система далека от упомянутого фазового перехода.

Из (10) и (13) следует, что правая часть в формуле (14) определяет нелинейность и дисперсию гиперзвука за счет спин-фононного взаимодействия, а также влияние поперечных возмущений. Нелинейные и дисперсионные слагаемые в круглых скобках (14) пропорциональны малым параметрам, определенным в (9). Поперечные возмущения также будем считать относительно малыми и рассматривать их в параксиальном приближении. Таким образом, скорость гиперзвука мало отличается от a . В этих условиях можно воспользоваться приближением медленноменяющегося профиля (ММП) [40]. В нулевом приближении по правой части (14) для волны, распространяющейся вдоль оси x имеем $\Omega = \Omega(\tau)$, где локальное время $\tau = t - x/a$. Чтобы учесть правую часть в первом приближении, введем «медленную» координату $\zeta = \delta x$, где $\delta = \max(\delta_1, \delta_2)$, и положим $\Omega = \Omega(\tau, \zeta)$. Тогда, как легко видеть,

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \tau} + \delta \frac{\partial}{\partial \zeta},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 2 \frac{\delta}{a} \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \tau}.$$

В последнем выражении мы пренебрегли слагаемым $\delta^2 \partial^2 / \partial \zeta^2$.

Так как правая часть $\sim \delta$, в ней следует положить

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}.$$

Тогда, учитывая (10), а также то, что $\Omega = \partial\theta/\partial\tau$, после интегрирования по τ приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial \tau} + \alpha \sin \theta - \frac{3}{2} \beta \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} - \beta \frac{\partial^4 \theta}{\partial \tau^4} = \frac{\nu_0}{2} \Delta_{\perp} \theta, \quad (15)$$

где

$$\alpha = -\frac{3G_{\perp}^2 n \omega_1}{2\hbar \rho_m a^3} W_{1\infty}, \quad \beta = -\frac{3G_{\perp}^2 n}{2\hbar \omega_2^3 \rho_m a^3} W_{2\infty},$$

$$\nu_0 = \frac{a_{\parallel}^2}{a}.$$

Заметим, что при выводе (15) не делалось никаких предположений относительно того, как много колебаний содержится в упругом импульсе. Их может быть сколь угодно мало, а может не содержаться вообще. В последнем случае можно говорить о «полуволновом» ПКИ, длительность τ_p которого является единственным временным масштабом. Поэтому здесь $\tau_* = \tau_p$, а условия (9) принимают вид

$$\omega_1^2 \ll \tau_p^{-2} \ll \omega_2^2. \quad (9a)$$

В одномерном случае, при $\Delta_{\perp} \theta = 0$, уравнение (15) переходит в уравнение ККС, интегрируемое методом обратной задачи рассеяния (МОЗР) [42]. В отсутствие 2-переходов имеем $\beta = 0$. Тогда ККС переходит в интегрируемое уравнение синус-Гордон. В другом пределе, когда нет 1-переходов ($\alpha = 0$), имеем модифицированное уравнение Кортевега-де Вриза (МКдВ) для $\Omega = \partial\theta/\partial\tau$. Заметим, что ККС представляет собой однонаправленную редукцию уравнения Косевича-Ковалева [43], совершенную с помощью приближения ММП.

Следует отметить, что в работе [37] для распространения квазимонохроматического акустического солитона в системе парамагнитных примесей с эффективным спином $S = 3/2$ также получено уравнение ККС. Подчеркнем, однако, что рассматриваемая здесь физическая задача коренным образом отличается от рассмотренной в [37]. В последней работе считалось, что основной вклад в расщепление спиновых подуровней дает магнитное поле,

а статическая деформация за счет квадрупольного штарк-эффекта вносит малые поправки к эффекту Зеемана. Это позволило, выделив в спиновой подсистеме близкие друг к другу по частоте резонансные и квазирезонансные переходы, эффективно исключить материальные переменные и прийти к уравнению ККС для огибающей акустического сигнала. В настоящей же работе основной вклад в расщепление спиновых подуровней дает как раз статическая деформация, а магнитное поле, за счет эффекта Зеемана, играет поправочную роль, снимая оставшееся вырождение по знаку проекции спина на выделенную ось. Это, в свою очередь, позволило выделить в спиновой подсистеме два квантовых перехода с сильно различающимися частотами. Дальнейшее использование условий (9) привело нас к уравнению ККС уже не для огибающей (как в [37]), а для самого поля деформации гиперзвукового импульса.

Солитонное одномерное решение уравнения (15) типа «полуволнового» ПКИ имеет вид

$$\theta = 4 \arctg \left[\exp \left(\frac{t - x/\nu}{\tau_p} \right) \right], \quad (16)$$

$$\Omega = \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{2}{\tau_p} \operatorname{sch} \left(\frac{t - x/\nu}{\tau_p} \right),$$

где зависимость скорости ν солитона от его длительности τ_p определяется выражением

$$\frac{1}{\nu} = \frac{1}{a} + \alpha \tau_p^2 - \frac{\beta}{\tau_p^2}. \quad (17)$$

При прохождении данного солитона разности населенностей задействованных квантовых переходов изменяются следующим образом:

$$W_1 = W_{1\infty} \left[1 - 2 \operatorname{sch}^2 \left(\frac{t - x/\nu}{\tau_p} \right) \right], \quad (18)$$

$$W_2 = W_{2\infty} \left[1 - \frac{2}{(\omega_2 \tau_p)^2} \operatorname{sch}^2 \left(\frac{t - x/\nu}{\tau_p} \right) \right].$$

Из формул (16) и (9a) следует, что спектр рассматриваемого солитона, ширина которого $\delta\omega \sim 1/\tau_p$, перекрывает квантовый переход малой частоты ω_1 и практически не захватывает переход на частоте ω_2 . Поэтому населенности 2-переходов изменяются незначительно, в то время как населенности 1-переходов испытывают полную инверсию, возвращаясь после прохождения солитона к исходному состоянию.

В силу интегрируемости уравнение (15) в одномерном случае обладает еще и бризерным решением [44]

$$\Omega = 4 \frac{\partial}{\partial t} \arctg \left[\frac{1}{\omega \tau_p} \operatorname{sch} \left(\frac{t - x/\nu_G}{\tau_p} \right) \times \right. \\ \left. \times \sin \left(\omega \left(t - \frac{x}{\nu_{ph}} \right) \right) \right], \quad (19)$$

где групповая ν_G и фазовая ν_{ph} скорости бризера определяются выражениями

$$\frac{1}{\nu_G} = \frac{1}{a} + \frac{\alpha}{\omega^2 + \tau_p^{-2}} + \beta(3\omega^2 - \tau_p^{-2}), \\ \frac{1}{\nu_{ph}} = \frac{1}{a} - \frac{\alpha}{\omega^2 + \tau_p^{-2}} + \beta(\omega^2 - 3\tau_p^{-2}), \quad (20)$$

τ_p и ω — свободные параметры бризера, имеющие соответственно смысл длительности и центральной частоты его спектра.

Здесь роль τ_* играет меньшая из величин τ_p и ω^{-1} . Если $\omega \tau_p \sim 1$, то решение (19), (20) представляет собой импульс длительностью примерно в один период колебаний, характеризуемых аргументом синуса в (19). В квазимонохроматическом пределе $\omega \tau_p \gg 1$ из (19) имеем солитон огибающей

$$\Omega = \frac{4}{\tau_p} \operatorname{sch} \left(\frac{t - x/\nu_G}{\tau_p} \right) \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{\nu_{ph}} \right) \right). \quad (19a)$$

При этом $\tau_* = \omega^{-1}$ и условия (9) принимают вид

$$\omega_1^2 \ll \omega^2 \ll \omega_2^2. \quad (9b)$$

Таким образом, несущая частота квазимонохроматического импульса лежит между частотами ω_1 и ω_2 резонансного поглощения, находясь далеко от каждой из них. Следовательно, взаимодействие со средой является относительно слабым. В этих условиях из (15) можно вывести уравнение для огибающей квазимонохроматического импульса, пользуясь представлением

$$\Omega = \frac{1}{2} \psi(\mathbf{r}, t) \exp [i(\omega \tau - qx)] + \text{c.c.}, \quad (21)$$

где ψ — медленноменяющаяся (в стандартном смысле) огибающая, $q = k - \omega/a$ — дисперсионная добавка к волновому числу k .

В силу слабости возбуждения среды запишем $\sin \theta \approx \theta - \theta^3/6$. Прибегая последовательно к процедуре взятия интеграла по частям, придем к разложению

$$\theta = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\tau} \psi e^{i(\omega \tau' - qx)} d\tau' + \text{c.c.} = \\ = \frac{1}{2} \left[\frac{\psi}{i\omega} - \left(\frac{1}{i\omega} \right)^2 \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \left(\frac{1}{i\omega} \right)^3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} - \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{i\omega} \right)^4 \frac{\partial^3 \psi}{\partial \tau^3} + \dots \right] e^{i(\omega \tau - qx)} + \text{c.c.}$$

Оставляя в нелинейных слагаемых только первые степени мнимых экспонент $e^{\pm i(\omega \tau - qx)}$ и ограничиваясь членами порядка ω^{-4} , запишем

$$\frac{\theta^3}{6} = \frac{1}{16} \left[-\frac{i}{\omega^3} |\psi|^2 \psi + \right. \\ \left. + \frac{4}{\omega^4} |\psi|^2 \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - \frac{1}{\omega^4} \frac{\partial}{\partial \tau} (|\psi|^2 \psi) \right] e^{i(\omega \tau - qx)} + \text{c.c.}$$

Кроме того,

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} = \frac{1}{3} \frac{\partial \Omega^3}{\partial \tau} \approx \\ \approx \frac{1}{8} \left[i\omega |\psi|^2 \psi + \frac{\partial}{\partial \tau} (|\psi|^2 \psi) \right] e^{i(\omega \tau - qx)} + \text{c.c.},$$

$$\frac{\partial^4 \theta}{\partial \tau^4} = \frac{\partial^3 \Omega}{\partial \tau^3} = \frac{1}{2} \left(-i\omega^3 \psi - 3\omega^2 \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \right. \\ \left. + 3i\omega \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial \tau^3} \right) e^{i(\omega \tau - qx)} + \text{c.c.}$$

Подставляя данные разложения в (15), получим уравнение

$$i \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{k_2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - i \frac{k_3}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^3} + b |\psi|^2 \psi - ig |\psi|^2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \\ - ib_1 \frac{\partial}{\partial \xi} (|\psi|^2 \psi) = \frac{\nu_0}{2\omega} \Delta_{\perp} \left(\psi + \frac{i}{\omega} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right), \quad (22)$$

где $\xi = t - x/\nu_g$. Дисперсионное уравнение, найденное в результате приравнивания нулю коэффициента при ψ , имеет вид $k = \omega/a - \alpha/\omega + \beta\omega^3$, линейная групповая скорость ν_g определяется соотношением $1/\nu_g = dk/d\omega = 1/a + \alpha/\omega^2 + 3\beta\omega^2$; коэффициенты дисперсии групповой скорости (ДГС) второго и третьего порядков

$$k_2 = \frac{d^2 k}{d\omega^2} = 6\beta\omega \left(1 - \frac{\omega_c^4}{\omega^4} \right),$$

$$k_3 = \frac{d^3 k}{d\omega^3} = 6\beta \left(1 + 3 \frac{\omega_c^4}{\omega^4} \right);$$

коэффициент нелинейности $b = k_2/16$ и коэффициенты дисперсии нелинейности $b_1 = k_2/16\omega$, $g = \alpha/2\omega^4$; имеющая важный смысл характерная частота ω_c определяется выражением

$$\omega_c^4 = \frac{\alpha}{3\beta} = \frac{W_{1\infty}}{3W_{2\infty}} \omega_1 \omega_2^3. \quad (23)$$

Данная частота разделяет области положительных ($\omega > \omega_c$) и отрицательных ($\omega < \omega_c$) ДГС второго порядка. Это же касается знаков нелинейных коэффициентов b и b_1 .

Остановимся на обсуждении параметра ω_c несколько подробнее. Отталкиваясь от бoльцмановской статистики и учитывая, что

$$\omega_1 = 2 \left(g\mu_B B - G_{\parallel} \varepsilon_{zz}^{(0)} \right) / \hbar \ll \omega_2 \approx 4g\mu_B B / \hbar,$$

запишем выражения для начальных равновесных разностей населенностей

$$\begin{aligned} W_{1\infty} &= -\frac{1}{Z} \exp \left(\frac{3G_{\parallel} \varepsilon_{zz}^{(0)}}{2k_B T} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\hbar\omega_1}{2k_B T} \right), \\ W_{2\infty} &= -\frac{1}{Z} \exp \left(\frac{G_{\parallel} \varepsilon_{zz}^{(0)}}{2k_B T} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\hbar\omega_2}{2k_B T} \right), \end{aligned} \quad (24)$$

где k_B — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, а статистическая сумма

$$Z = 2 \left[\operatorname{ch} \left(\frac{3\hbar\omega_2}{8k_B T} \right) + \exp \left(\frac{2G_{\parallel} \varepsilon_{zz}^{(0)}}{k_B T} \right) \operatorname{ch} \left(\frac{\hbar\omega_2}{8k_B T} \right) \right].$$

Отсюда и из (23) находим

$$\omega_c^4 = \omega_1 \omega_2^3 \exp \left(\frac{G_{\parallel} \varepsilon_{zz}^{(0)}}{k_B T} \right) \frac{\operatorname{sh}(\hbar\omega_1/2k_B T)}{3 \operatorname{sh}(\hbar\omega_2/2k_B T)}. \quad (23a)$$

Если $G_{\parallel} \varepsilon_{zz}^{(0)} < 0$, то с ростом абсолютной величины статической деформации подуровни 2 и 3 сдвигаются вверх по энергетической шкале относительно подуровней 1 и 4 (рис. 1). Тогда реализуется ситуация, когда условия (9) для переходов $1 \leftrightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 4$ меняются местами. В этом случае, как легко показать, выражение (23a) остается в силе с точностью до замены $1 \leftrightarrow 2$ индексов собственных частот переходов.

Пусть, например, $\omega_2 \sim 10^{11} \text{ с}^{-1}$, $\omega_1 \sim 10^9 \text{ с}^{-1}$. Тогда при $T \sim 10 \text{ К}$ имеем $\hbar\omega_1/k_B T \ll \hbar\omega_2/k_B T \ll 1$. Следовательно, с хорошей точностью

$$\omega_c = 0.76 \sqrt{\omega_1 \omega_2}. \quad (23b)$$

При сверхнизких температурах, когда $\hbar\omega_2/k_B T \ll \hbar\omega_1/k_B T \gg 1$, ω_c быстро, по экспоненциальному закону, стремится к нулю. Данные здесь сведения о характерной частоте ω_c окажутся полезными в последующих разделах.

В одномерном случае уравнение (22) представляет собой уравнение Хироты [45], в общем случае неинтегрируемое. Если, однако, в первом приближении пренебречь дисперсией нелинейности и ДГС третьего порядка, то (22) переходит в интегрируемое нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), обладающее солитонным решением

$$\psi = \frac{4}{\tau_p} \exp \left(i \frac{k_2 x}{2\tau_p^2} \right) \operatorname{sch} \left(\frac{t - x/\nu_g}{\tau_p} \right). \quad (25)$$

Скорость данного солитона равна линейной скорости ν_g гиперзвука, определенной после уравнения (22). Заметим, что выражение для групповой скорости ν_G бризера (19), определенной выражением (20), как и следовало ожидать, переходит в выражение для ν_g в рассматриваемом здесь квазимонохроматическом пределе $\omega\tau_p \gg 1$. В то же время, как следует из формул (21) и (25), фазовая скорость солитона НУШ $\nu_{ph}^{(S)}$ определяется соотношением

$$\frac{1}{\nu_{ph}^{(S)}} = \left(\frac{1}{a} - \frac{\alpha}{\omega^2} + \beta\omega^2 \right) + \frac{k_2}{2\omega\tau_p^2}, \quad (26)$$

где в скобках правой части есть обратная линейная фазовая скорость.

Легко видеть, что (26) получается из второго выражения (20) в первом исчезающем порядке разложения в ряд Маклорена по малому параметру $(\omega\tau_p)^{-2}$. Это обстоятельство является важным при учете влияния на солитон (25) поперечных возмущений (см. разд. 4).

Решение (25) достаточно хорошо описывает солитонное распространение импульса, если его несущая частота значительно отстроена от ω_c . Если же $\omega = \omega_c$, имеем $k_2 = b = b_1 = 0$ и из (22) приходим к комплексной версии МКдВ. В одномерном случае данное уравнение обладает сугубо вещественным солитонным решением

$$\psi = \frac{4}{\tau_p} \operatorname{sch} \left(\frac{t - x/\nu_G^{(K)}}{\tau_p} \right). \quad (27)$$

Здесь групповая скорость $\nu_G^{(K)}$ определяется соотношением

$$\frac{1}{\nu_G^{(K)}} = \frac{1}{\nu_g} - \frac{k_3}{6\tau_p^2}, \quad (28)$$

которое может быть получено из первого выражения (20) в исчезающем порядке разложения в ряд Маклорена по малому параметру $(\omega\tau_p)^{-2}$.

Амплитуды солитонов (25) и (27) совпадают с амплитудой солитона (19a). Таким образом, солитоны огибающей (25) и (27) находятся в хорошем соответствии с квазимонохроматическим пределом бризерного решения (19a) уравнения ККС.

Сделаем числовые оценки, касающиеся солитонов (16) и (19a). Пусть, как и выше, $\omega_2 \sim 10^{11} \text{ с}^{-1}$, $\omega_1 \sim 10^9 \text{ с}^{-1}$. Тогда условия (9b) удовлетворяются при длительности солитона (16) $\tau_p \sim 10^{-10} \text{ с}$, следовательно $\Omega \sim 10^{10} \text{ с}^{-1}$. Взяв $G_{\perp} \sim 10^{-13} \text{ эрг}$ [32], получим для относительной деформации $\varepsilon_{yx} \sim \hbar/(G_{\perp} \tau_p) \sim 10^{-4}$, что представляется весьма

заметной величиной. Для солитона (23) должны выполняться условия (9а). Примем, что $\omega \sim 10^{10} \text{ с}^{-1}$, $\tau_p \sim 10^{-9} \text{ с}$, тогда $\varepsilon_{yx} \sim 10^{-5}$, т. е. амплитуда относительной деформации солитона огибающей примерно на порядок меньше таковой для солитона типа ПКИ.

3. ВЛИЯНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА СОЛИТОНЫ ТИПА ПКИ

Исследуем теперь влияние поперечных возмущений на рассмотренные выше солитоны. Воспользуемся для этого усредненным вариационным принципом типа Ритца–Уизема (РУ) [46, 47]. Метод РУ предполагает слабую деформацию одномерных солитонных решений под действием поперечных возмущений. Это справедливо при принятом здесь параксиальном приближении. Кроме того предполагается, что дисперсионная длина $l_d = \min(\alpha\tau_*, \beta/\tau_*^3)$ (см. (15)), на протяжении которой формируется одномерный солитон, значительно меньше дифракционной длины $l_D = R_0^2/\nu_0\tau_p$ (здесь R_0 — входной поперечный радиус или апертура импульса), при прохождении которой становятся существенными поперечные возмущения

$$l_d/l_D \ll 1. \quad (29)$$

Уравнение (15) находится из лагранжиана

$$L = \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - 2\alpha \sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\beta}{8} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right)^4 + \frac{\beta}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} \right)^2 - \frac{\nu_0}{4} (\nabla_{\perp} \theta). \quad (30)$$

Пробное решение, соответствующее солитону (16), выберем в виде

$$\theta = 4 \operatorname{arctg} \{ \exp [\rho(\tau - \varphi/\nu_0)] \}, \quad (31)$$

где ρ и φ являются соответственно «медленной» и «быстрой» функциями координат [47, 48].

Определим групповые волновые фронты уравнением $\tau - \varphi/\nu_0 = t - z/a - \varphi/\nu_0 = \text{const}$. Отсюда видно, что φ можно назвать групповым эйконалом. Соответственно ρ имеет смысл локальной обратной длительности и амплитуды солитона.

Подставляя (31) в (30) в пренебрежении зависимостью «медленной» переменной ρ от координат [47, 48] (что соответствует приближению «геометрической акустики» для солитонов) и интегри-

руя полученное выражение по «быстрой» временной переменной τ , получим «усредненный лагранжиан»

$$\Lambda \equiv \frac{\nu_0}{4} \int_{-\infty}^{\infty} L d\tau = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \rho \frac{(\nabla_{\perp} \varphi)^2}{2} - \nu_0 \left(\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\beta}{3} \rho^3 \right). \quad (32)$$

Записывая для Λ уравнения Эйлера–Лагранжа относительно ρ и φ , приходим к системе

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} + \nabla_{\perp} (\rho \nabla_{\perp} \varphi) = 0, \quad (33)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{(\nabla_{\perp} \varphi)^2}{2} + f(\rho) = 0, \quad (34)$$

где

$$f(\rho) = \nu_0 \left(\beta \rho^2 - \frac{\alpha}{\rho^2} \right). \quad (35)$$

В одномерном случае данная система уравнений имеет решения $\rho = 1/\tau_p = \text{const}$, $\varphi = \nu_0(\alpha\tau_p^2 - \beta/\tau_p^2)$, т. е. групповые волновые фронты одномерного солитона являются плоскими. Отсюда, а также из (31), (16) и (17) следует, что эти решения в точности соответствуют одномерному солитону уравнения ККС. Данное обстоятельство является важным аргументом в пользу вариационного метода РУ.

Система (33), (34) формально совпадает с уравнениями, описывающими течение двумерной идеальной жидкости, где роли времени, плотности жидкости и потенциала поля скоростей играют соответственно координата x , обратная длительность солитона ρ и его эйконал φ . При этом (33) представляет собой уравнение непрерывности, а (34) совпадает с интегралом Коши [49].

Данная формальная аналогия позволяет на стадии «геометрической акустики» выявить качественный характер поперечной динамики солитонов. Действительно, пусть функция $P(\rho)$ соответствует зависимости давления от плотности жидкости. Тогда, приравнявая $f(\rho)$ в (34) к $\int dP/\rho$, как это имеет место в интеграле Коши [49], получим $P'(\rho) = \rho f'(\rho)$. При $P'(\rho) > 0$ ($\rho f'(\rho) > 0$) имеем случай нормальной «жидкости», когда ею заполняются пространственные пустоты с меньшими давлениями. Это соответствует дефокусировке рассматриваемого солитона. Если же $P'(\rho) < 0$ или $\rho f'(\rho) < 0$ (что соответствует «газу Чаплыгина» [48]), происходит устремление «жидкости» в места ее все больших уплотнений. В результате приходим к самофокусировке.

Из (35) имеем $f'(\rho) = 2\nu_0(\beta\rho + \alpha/\rho^3)$. В случае равновесного начального распределения населенно-

стей квантовых подуровней эффективного спина коэффициенты α и β положительны. Поэтому солитон (16) испытывает дефокусировку.

Детально, на количественной основе, различные ситуации будут рассмотрены ниже. Для этого будем искать автомодельные аксиально-симметричные в плоскости (y, z') решения системы (33)–(35). В соответствии с этим положим (см., например, [50])

$$\rho = h(x)F\left(\frac{r}{R(x)}\right), \quad \varphi = f_1(x) + \frac{r^2}{2}f_2(x), \quad (36)$$

где r — радиальная координата цилиндрической системы, h, F, R, f_1, f_2 — искомые функции своих аргументов.

Подстановка (36) в (33) и приравнивание нулю коэффициентов при нулевой и первой степенях r приводит к уравнениям

$$h' + 2f_2h = 0, \quad f_2 = R'/R.$$

Здесь и ниже штрих обозначает производную по x . Интегрируя первое уравнение с учетом второго, получим $h = \rho_0 R_0^2/R^2$, где ρ_0 — обратная длительность солитона на оси аксиальной симметрии. В результате будем иметь

$$\rho = \rho_0 \frac{R_0^2}{R^2} F\left(\frac{r}{R}\right), \quad \varphi = f_1 + \frac{r^2}{2} \frac{R'}{R}. \quad (37)$$

Солитонный эйконал φ определяет нелинейную добавку к скорости солитона и входит в приближенные решения в виде комбинаций $t - \nu_0^{-1}(z + \varphi)$. Отсюда следует, что в неоднородном случае локальная скорость ν_R солитона и ее направление \mathbf{n} определяются выражением

$$\frac{\mathbf{n}}{\nu_R} = \frac{1}{\nu_0} \nabla(z + \varphi).$$

Тогда, вводя угол χ_n между осью z и волновыми нормальными к солитонным фронтам (рис. 2) и учитывая второе выражение (37), запишем

$$\text{tg } \chi_n = \frac{\partial\varphi/\partial r}{1 + \partial\varphi/\partial z} = \frac{r(\ln R)'}{1 + f_1' + r^2(\ln R)''/2}, \quad (38)$$

где r — радиальная компонента цилиндрической системы координат.

Для величины ν_R скорости имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu_R} &= \frac{1}{a} \sqrt{\left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{a} \sqrt{\left(1 + f_1' + \frac{r^2}{2}(\ln R)''\right)^2 + r^2 \left(\frac{R'}{R}\right)^2}. \end{aligned} \quad (39)$$

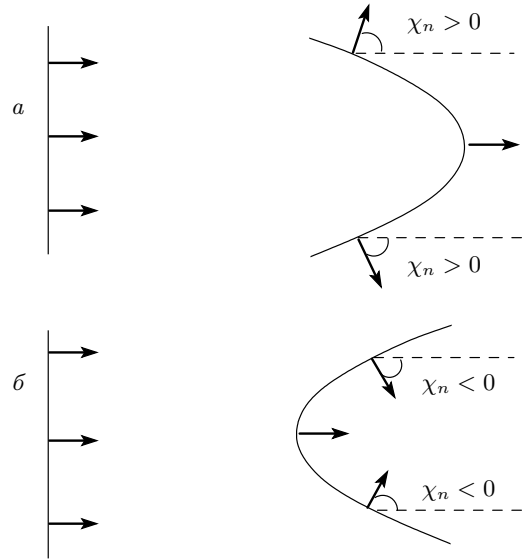


Рис. 2. Искривление волновых фронтов солитона: a — при дефокусировке ($R', \chi_n > 0$) и b — при самофокусировке ($R', \chi_n < 0$). Стрелками указаны нормали к фронтам, совпадающие по направлениям с локальными скоростями. Для «полуволнового» солитона типа ПКИ волновые фронты являются групповыми, для солитона огибающей НУШ — фазовыми, в случае солитона огибающей комплексного МКДВ искривлению подвержены как фазовые, так и групповые фронты

Из (38) следует, что случай $R' > 0$ соответствует поперечной дефокусировке (рис. 2а), а $R' < 0$ — самофокусировке (рис. 2б). Кроме того, из (38) и (39) следует, что f_1'/a представляет собой нелинейную добавку к обратной скорости $1/a$ солитона на его оси, где $r = 0$, в то время как $(\ln R)'$ характеризует искривление волнового фронта солитона под действием поперечных возмущений.

Вид функций F, R и f_1 находится после подстановки (37) в (34). Тогда с учетом (35) получим

$$f_1' + \frac{r^2}{2} \frac{R''}{R} + \nu_0 \left(\beta \rho_0^2 R_0^4 \frac{F^2}{R^4} - \frac{\alpha}{\rho_0^2 R_0^4} \frac{R^4}{F^2} \right) = 0. \quad (40)$$

Для того чтобы (40) обратилось в тождество, следует потребовать выполнения равенства

$$\beta \rho_0^2 R_0^4 \frac{F^2}{R^4} - \frac{\alpha}{\rho_0^2 R_0^4} \frac{R^4}{F^2} = A(x) + C(x)r^2, \quad (41)$$

где $A(x)$ и $C(x)$ — подлежащие определению функции.

Решение данного квадратного уравнения относительно F в общем случае не допускает принятой вы-

ше зависимости F от $r/R(x)$. Поэтому ниже рассмотрим частные случаи.

Пусть выполнено условие $(\omega_c \tau_p)^4 \ll 1$ или реализуется случай сверхнизких температур $\hbar\omega_2/k_B T \gg \gg \hbar\omega_1/k_B T \gg 1$. Тогда заселенностью подуровней 1 и 3 можно пренебречь (см. (23a)) и, следовательно, $\alpha = 0$. В этом случае (15) переходит в МКдВ для Ω с учетом поперечных возмущений. В этом случае $\tau_* = \tau_p$ и $l_d = \tau_p^3/\beta \sim a\tau_p(\omega_2\tau_p)^2/\eta$. Взяв $\omega_2\tau_p \sim 10$, $\tau_p \sim 10^{-10}$ с, $a \sim 3 \cdot 10^5$ см/с, $\eta \sim 10^{-2}$ (см. выше), найдем $l_d \sim 0.1$ см. Для дифракционной длины имеем оценку $l_D \sim R_0^2/a\tau_p$. Тогда условие (29) выполняется, если $R_0 \gg (a\tau_p)(\omega_2\tau_p)/\sqrt{\eta}$. При принятых выше численных оценках находим отсюда $R_0 \gg 10^{-3}$ см.

При $\alpha = 0$ удовлетворить (41) с одновременным требованием локализации функции F в радиальных направлениях можно, если выбрать $C = -A/R^2 = -\beta\rho_0^2 R_0^4/R^6$. Тогда $F = \sqrt{1 - r^2/R^2}$. Отсюда и из первого уравнения (37) находим

$$\rho = \rho_0 \frac{R_0^2}{R^2} \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}. \quad (42)$$

Приравнивая, в свою очередь, в (40) нулю коэффициенты при нулевой и второй степенях r , будем иметь

$$f'_1 = -\gamma\rho_0^2 R_0^4/R^4, \quad (43)$$

$$R'' = 2\gamma\rho_0^2 R_0^4/R^5, \quad (44)$$

где $\gamma = \nu_0\beta$.

Как было сказано выше, при условии (29) одномерный солитон формируется значительно раньше, нежели начинают себя проявлять поперечные возмущения. Поэтому будем считать, что на дистанции порядка дисперсионной длины апертура солитона практически не изменяется, а его волновые фронты являются плоскими. Тогда, в согласии со вторым равенством (37), дополним (44) граничными условиями вида

$$R(0) = R_0, \quad R'(0) = 0. \quad (45)$$

Из (42) следует, что интенсивность солитона МКдВ порядка ρ^2 спадает от центра к радиальной периферии по параболическому закону, ограничивая его поперечную область значениями $r \leq R(x)$. В этой связи такого рода солитоны назовем параболическими.

Пусть теперь $(\omega_c \tau_p)^4 \gg 1$. Тогда, как легко видеть, в (15) с хорошей точностью можно положить $\beta = 0$ и мы имеем уравнение синус-Гордон (СГ), для которого дисперсионная длина $l_d \sim (\alpha\tau_p)^{-1} \sim \sim a/\eta\omega_1\omega_2\tau_p$. При приведенных выше числовых зна-

чениях параметров находим, что $l_d \sim 10$ мкм. Условие же (29) выполняется, если $R_0 \gg a/\sqrt{\eta\omega_1\omega_2} \sim \sim 1$ мкм.

В рассматриваемом случае в (41) при условии радиальной локализации F полагаем $A = CR^2 = -\alpha R^4/\rho_0^2 R_0^4$. Отсюда и из (41) находим $F = (1 + r^2/R^2)^{-1/2}$. Используя далее (37) и (40) при $\beta = 0$, получаем

$$\rho = \rho_0 \frac{R_0^2}{R^2} \frac{1}{\sqrt{1 + r^2/R^2}}, \quad (46)$$

$$f'_1 = \frac{\nu_0\alpha}{\rho_0^2} \frac{R^4}{R_0^4}, \quad (47)$$

$$R'' = 2\frac{\nu_0\alpha}{\rho_0^2} \frac{R^3}{R_0^4}. \quad (48)$$

Как видно из (46), интенсивность солитона СГ порядка ρ^2 спадает от оси симметрии к периферии по лоренцевскому закону. Поэтому назовем данный солитон, подчеркивая его поперечную структуру, лоренцевским.

В случае термодинамически равновесной заселенности квантовых подуровней парамагнитных примесей до импульсного воздействия ($\alpha, \beta > 0$), как следует из (44), (48) и (45), апертура обоих солитонов растет по мере их распространения, что соответствует дефокусировке. В противном случае приходим к самофокусировке. В квазиравновесных случаях ($\alpha > 0, \beta < 0$ или $\alpha < 0, \beta > 0$) возникают эффекты конкуренции между данными явлениями (см. ниже).

Теперь, отталкиваясь от предыдущего анализа, в настоящем разделе займемся приближенным количественным исследованием влияния поперечных возмущений на солитон ККС, вбирающий в себя свойства солитонов МКдВ и СГ. Будем пользоваться приосевым приближением $r \ll R$, хорошо зарекомендовавшим себя в теории самофокусировки световых пучков [50, 51].

В приосевой области поперечные профили рассмотренных выше параболического и лоренцевского солитонов достаточно хорошо описываются зависимостью вида

$$\rho = \rho_0 \frac{R_0^2}{R^2} \left(1 - \frac{r^2}{2R^2}\right). \quad (49)$$

Солитонный же эйконал φ будем по-прежнему рассматривать в виде (37). Тогда в согласии с (37) выражение (49) является точным решением уравнения (33).

Подставляя (49), (35) и второе выражение (37) в (34), ограничиваясь в разложении в ряд членами,

пропорциональными $(r/R)^2$, после приравнивания нулю коэффициентов при нулевой и второй степенях r получим

$$f_1' = \frac{\nu_0 \alpha}{\rho_0^2} \frac{R^4}{R_0^4} - \nu_0 \beta \rho_0^2 \frac{R_0^4}{R^4}, \quad (50)$$

$$R'' = 2\nu_0 \beta \rho_0^2 \frac{R_0^4}{R^5} + 2 \frac{\nu_0 \alpha}{\rho_0^2} \frac{R^3}{R_0^4}. \quad (51)$$

Заметим, что при $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ уравнения (50), (51) в точности совпадают соответственно с (43), (44) и (47), (48).

Уравнение (51) аналогично уравнению движения материальной точки единичной массы в поле с потенциальной энергией

$$U = \frac{\nu_0 \beta \rho_0^2}{2} \frac{R_0^4}{R^4} - \frac{\nu_0 \alpha}{2\rho_0^2} \frac{R^4}{R_0^4}, \quad (52)$$

где роли координаты и времени играют соответственно R и x .

Решение (51) в квадратурах при учете (45) выражается через интеграл гипергеометрического типа

$$\frac{\sqrt{\nu_0 \beta}}{\tau_p R_0} x = \int_1^{R/R_0} \frac{u^2 du}{\sqrt{(3(\omega_c \tau_p)^4 u^4 + 1)(u^4 - 1)}}, \quad (53)$$

где $\tau_p = 1/\rho_0$ — длительность солитона на оси его радиальной симметрии.

Ниже проанализируем различные ситуации поперечной динамики солитона.

Равновесная среда. В этом случае $\alpha, \beta > 0$, $\omega_c^4 > 0$. Зависимость $U(R)$ имеет монотонно убывающий вид, соответствующий росту апертуры солитона по мере его распространения. Как следует из (37), (38), данный процесс сопровождается уменьшением амплитуды солитона и выгибанием вперед приосевых областей волновых фронтов. Апертура обращается в бесконечность на конечной дистанции x_d распространения, определяемой интегралом (53) при стремлении его верхнего предела к бесконечности. Таким образом, распространение происходит в режиме взрывной дефокусировки, сопровождаемой расплыванием солитона по всему пространству и существенным замедлением скорости его распространения. Не следует к этому утверждению относиться буквально, так как при $x \rightarrow x_d$ метод РУ, как и приближение ММП, перестают быть справедливыми. Скорее, здесь можно говорить о тенденции в поперечной динамике солитона.

Полагая в (53) $(\omega_c \tau_p)^4 \gg 1$ (предел СГ), будем

иметь решение, выражающееся через гипергеометрическую функцию ${}_2F_1(b, c, d, s)$:

$$\tau_p \sqrt{\nu_0 \alpha} \frac{x}{R_0} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(5/4)}{\Gamma(3/4)} - \frac{R_0}{R} {}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{R_0^4}{R^4}\right), \quad (54)$$

где $\Gamma(\zeta)$ — гамма-функция Эйлера.

Устремляя здесь R к бесконечности, найдем

$$x_d = 1.31 \frac{R_0}{\tau_p \sqrt{\nu_0 \alpha}} \sim \frac{R_0}{\tau_p \sqrt{\omega_1 \omega_a}} \sim 10R_0.$$

Из (54) легко найти зависимость апертуры от пройденной дистанции в непосредственной близости от x_d : $R \sim (x_d - x)^{-1}$. При этом обратная длительность солитона (или его амплитуда) на оси аксиальной симметрии стремится к нулю по закону $\rho \sim (x_d - x)^2$.

Очевидно, взрывному характеру дефокусировки способствуют 1-переходы (т. е. $\omega_c \neq 0$). При сверхнизких температурах их влиянием можно пренебречь. Тогда, положив в (53) $\omega_c = 0$ (что соответствует разобранному выше пределу МКДВ), найдем решение,

$$\frac{\sqrt{\nu_0 \beta}}{\tau_p R_0} x = -\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} + \frac{R}{R_0} {}_2F_1\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{R_0^4}{R^4}\right). \quad (55)$$

При $R/R_0 \gg 1$ приходим отсюда к линейному, относительно пройденной дистанции, закону возрастания апертуры: $R \approx \sqrt{\beta \nu_0} x / \tau_p$. Таким образом, равновесно заселенные 2-переходы приводят к монотонному процессу дефокусировки солитона типа ПКИ.

Неравновесная среда. В этом случае оба рассматриваемых квантовых перехода обладают инверсной начальной населенностью. Тогда $\alpha, \beta < 0$, $\omega_c^4 > 0$. При этом зависимость $U(R)$ является монотонно возрастающей, что соответствует самофокусировке солитона. Здесь оба перехода создают фокусирующий эффект. Соответствующее решение (51) в квадратурах имеет вид

$$\frac{\sqrt{\nu_0 |\beta|}}{\tau_p R_0} x = \int_{R/R_0}^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{(3(\omega_c \tau_p)^4 u^4 + 1)(1 - u^4)}}. \quad (53a)$$

Устремляя к нулю нижний предел в данном интеграле, придем к выражению для длины x_f самофокусировки:

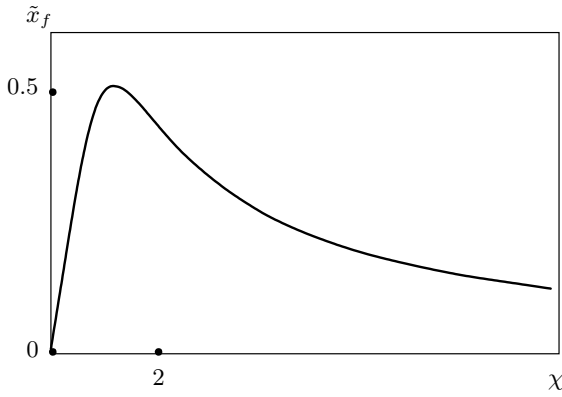


Рис. 3. Зависимость длины самофокусировки солитона типа ПКИ от параметра χ , пропорционального солитонной длительности в случае неравновесной среды. Здесь $\tilde{x}_f = x_f/x_{ch}$, где характерная длина

$$x_{ch} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(7/4)}{3\Gamma(5/4)} \frac{R_0}{\sqrt{\nu_0}} \frac{1}{\sqrt[4]{|\alpha\beta|}}$$

$$x_f = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(7/4)}{3\Gamma(5/4)} \frac{R_0}{\sqrt{\nu_0}} \times \frac{\chi}{\sqrt[4]{|\alpha\beta|}} {}_2F_1\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -\chi^4\right), \quad (56)$$

где $\chi = |\alpha/\beta|^{1/4} \tau_p$.

На рис. 3 изображена зависимость данной длины от χ , которую следует рассматривать как зависимость от входной длительности на оси солитона. При $\chi = \chi_m \approx 1.26$ длина самофокусировки имеет максимальное значение, равное

$$x_f \approx 0.50 \frac{R_0}{\sqrt[4]{\nu_0^2 |\alpha\beta|}} \sim \left(\frac{\omega_2^3}{\omega_1 \omega_a^2}\right)^{1/4} R_0 \sim (10 - 10^2) R_0.$$

Взяв $R_0 \sim 1$ мм, найдем $x_f \sim 1-10$ см.

Из (53а) и (49) следует, что в непосредственной близости от x_f апертура солитона и его обратная длительность $R \sim (x_f - x)^{1/3}$, $\rho \sim (x_f - x)^{-2/3}$.

При малых входных длительностях τ_p солитона, соответствующих $\chi < \chi_m$, доминирующий вклад в динамику вносят 2-переходы (случай МКдВ). В противоположном случае доминируют 1-переходы (случай СГ).

Существенно подчеркнуть, что самофокусировка солитона сопровождается заметным уменьшением его скорости. В пределе $R \rightarrow 0$ она стремится к нулю (см. (39), (50)). Однако на этой стадии несправедливо приближение ММП, согласно которому скорость импульса не может сильно отличаться от a . Поэтому здесь, как и в случае взрывной дефокусировки, следует говорить о тенденции.

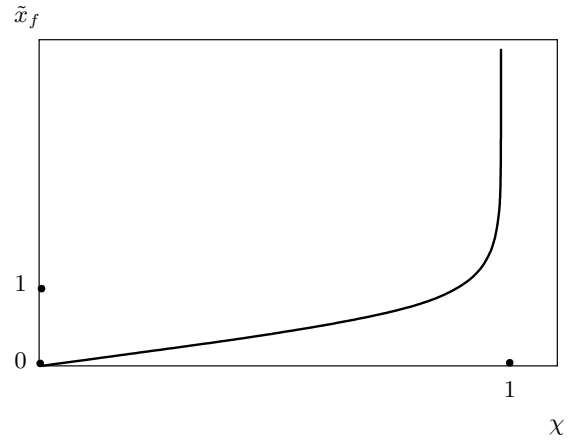


Рис. 4. Зависимость длины самофокусировки солитона типа ПКИ от χ в случае квазиравновесной среды первого типа. Обозначения идентичны таковым на рис. 3

Квазиравновесная среда. Здесь $\omega_c^4 < 0$ и могут быть реализованы две противоположные ситуации: 1) инвертированы 2-переходы ($\beta < 0$), населенности 1-переходов равновесны ($\alpha > 0$) (квазиравновесная среда первого типа); 2) инвертированы 1-переходы ($\alpha < 0$), населенности 2-переходов равновесны ($\beta > 0$) (квазиравновесная среда второго типа).

В первом случае 2-переходы создают фокусирующий, а 1-переходы — дефокусирующий эффект. Результатом данной конкуренции является то, что зависимость $U(R)$ обладает локальным максимумом в точке $R = R_m$, где

$$R_m = \frac{R_0}{3^{1/8} \sqrt{|\omega_c| \tau_p}}. \quad (57)$$

Если $R_0 > R_m$ или $\tau_p > 3^{-1/4}/|\omega_c|$, доминируют 1-переходы, создавая эффект взрывной дефокусировки. В противном случае тон задают 2-переходы, приводя видеосолитон к самофокусировке. Длина самофокусировки задается выражением (56) с заменой $-\chi^4 \rightarrow \chi^4$ в аргументе гипергеометрической функции, где теперь

$$\chi = \left(\frac{\alpha}{|\beta|}\right)^{1/4} \tau_p = 3^{1/4} |\omega_c| \tau_p.$$

На рис. 4 изображен график зависимости $x_f(\chi)$. Резкое стремление длины самофокусировки к бесконечности при $\chi \rightarrow 1$ соответствует приближению длительности солитона к ее верхней границе $3^{-1/4}/|\omega_c|$, когда самофокусировка еще может быть реализована.

В случае квазиравновесной среды второго типа 2-переходы создают дефокусирующий, а 1-переходы — фокусирующий эффект. При этом в зависимости $U(R)$ имеется локальный минимум, определяемый выражением (57). Как результат, в этой ситуации солитон распространяется в режиме самоканалирования, образуя «акустическую пулю». Заметим, что этот минимум является единственным экстремумом в зависимости $U(R)$. Следовательно, в данной ситуации, в рамках рассматриваемой модели, нет ограничений на входные апертуру и длительность импульса. Имеется лишь естественное ограничение на длительность, определяемое временем жизни T_1 неравновесного 1-перехода, которое должно быть больше времени порядка l/a распространения импульса через образец среды длиной l . Взяв $T_1 \sim 10^{-3}$ с [3], $a \sim 10^5$ см/с, найдем $l < 1$ м. При этом, согласно приведенным выше оценкам, дисперсионная длина, на которой происходит формирование солитона, значительно меньше данной верхней границы для l .

Пусть входная апертура немногим отличается от R_m . Тогда, в данной окрестности уравнение (51) приближенно можно записать в виде

$$R'' = -\kappa^2(R - R_m),$$

где

$$\kappa = 4\sqrt{\frac{\omega_a}{al_D}} \left[|W_{1\infty}|W_{2\infty} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^3 \right]^{1/8}. \quad (58)$$

Таким образом, распространение «акустической пули» происходит в режиме осцилляций его апертуры относительно равновесного значения R_m . Взяв $R_0 \sim 1$ мм, а все остальные параметры приняв такими, какими они были выбраны выше, найдем $l_D \sim 10^3$ см, $\omega_a \sim 10^9$ с⁻¹, $\kappa \sim 1$ см⁻¹. Отсюда имеем для пространственного периода осцилляций $l_p \sim \kappa^{-1} \sim 1$ см. Осцилляции апертуры солитона при самоканалировании сопровождаются колебательной динамикой его скорости, амплитуды, длительности и формы волновых фронтов. Последние испытывают периодические изгибы вперед-назад (см. (37)–(39), (50)). Полагая в первом выражении (37) $R = R_m$ при $r = 0$, найдем равновесное значение длительности солитона на его оси: $1/\rho = 1/3^{1/4}\omega_c \sim 0.1$ нс. Тогда для равновесного амплитудного значения относительной деформации имеем $\varepsilon_{yx} = \hbar\omega_c/3^{1/4}G_{\perp} \sim 10^{-4}$. Для равновесного

же значения скорости на оси из (39) при $r = 0$ будем иметь

$$\frac{1}{\nu_R} = \frac{1}{a} \left(1 - 2\frac{\omega_a}{\omega_2} \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2} \left| \frac{W_{1\infty}}{W_{2\infty}} \right|} \right).$$

Отсюда следует, что при взятых выше значениях параметров среды данная скорость всего на 0.1 % отличается от a . Поэтому осцилляции апертуры, амплитуды и длительности «акустической пули» практически не должны отразиться на его скорости.

Разобранные выше случаи влияния поперечных возмущений на солитон типа ПКИ можно, как легко проверить, объединить одним критерием дефокусировки:

$$\frac{d}{d\rho^2} \left(\frac{1}{\nu} \right) < 0, \quad (59)$$

где скорость ν определяется выражением (17), в котором следует положить $\tau_p = 1/\rho$.

В противоположном (59) условии реализуется самофокусировка. Равновесному значению ρ , вокруг которого происходят осцилляции в режиме самоканалирования «акустической пули», соответствует в (59) знак равенства.

Неравенство (59), которое можно рассматривать как обобщение критерия Вахитова–Колоколова [52] на случай солитонов типа ПКИ, с физической точки зрения является довольно прозрачным. Действительно, так как ρ пропорционально амплитуде солитона, условие (59) обозначает увеличение его групповой скорости с ростом амплитуды. В центре поперечных сечений солитона его амплитуда больше, чем на периферии. Следовательно, в согласии с (59), центральные участки движутся быстрее периферийных, что приводит к выгибанию вперед групповых волновых фронтов солитона, т. е. к его дефокусировке.

4. ВЛИЯНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА СОЛИТОНЫ ОГИБАЮЩЕЙ

Рассмотрим теперь влияние поперечных возмущений на солитоны огибающей, описываемые уравнением (22). Отталкиваясь от одномерных солитонов (25) и (27), запишем пробное решение в виде

$$\psi = 4\rho \exp\left(-i\frac{\omega\varphi_{ph}}{\nu_0}\right) \operatorname{sch}\left[\rho\left(\xi - \frac{\varphi_g}{\nu_0}\right)\right] \quad (60)$$

с неизвестными функциями координат ρ , φ_{ph} и φ_g , которые имеют соответственно смысл обратной длительности (амплитуды), фазового и группового эйконолов.

Как и в разд. 2, положим вначале $\omega \neq \omega_c$. Тогда, пренебрегая в левой части (22) третьим, пятым и шестым слагаемыми, а в правой части вторым слагаемым как более высокого порядка малости по параметру $(\omega\tau_p)^{-1}$, получаем обобщение НУШ на случай учета поперечных возмущений. Здесь мы также можем считать в (60) $\varphi_g = 0$ (см. (25)).

Подставляя, с учетом сказанного, уравнение (60) в соответствующую функцию Лагранжа

$$L = \frac{i}{2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) - \frac{k_2}{2} \left| \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right|^2 + \frac{b}{2} |\psi|^4 + \frac{\nu_0}{2\omega} |\nabla_{\perp} \psi|^2,$$

получим после интегрирования по ξ усредненный лагранжиан

$$\Lambda \equiv \frac{b}{2k_2} \int_{-\infty}^{\infty} L dT = \rho \frac{\partial \varphi_{ph}}{\partial x} + \rho \frac{(\nabla_{\perp} \varphi_{ph})^2}{2} + \frac{\nu_0 k_2}{6\omega} \rho^3.$$

Исследования влияния поперечных возмущений на солитон НУШ хорошо известны [48, 53]. Применение здесь метода РУ приводит для ρ и φ_{ph} к уравнениям вида (33), (34), в которых $f(\rho) = \nu_0 k_2 \rho^2 / 2\omega$, $\varphi = \varphi_{ph}$.

Заметим, что здесь функция $f(\rho)$ определяет нелинейную добавку к обратной фазовой скорости (см. (34)), что можно трактовать как нелинейный вклад в акустический показатель преломления. Тогда вопрос о характере поперечной динамики на стадии геометрической акустики становится практически очевидным. При нормальной ДГС ($k_2 > 0$) распространение происходит в режиме дефокусировки, так как $\rho f'(\rho) > 0$. В противном случае реализуется самофокусировка.

Обратная длительность ρ определяется выражением (42), т.е. солитон НУШ относится к параболическому типу. Здесь остаются справедливыми выражения (37), где f_1 и R подчиняются соответственно уравнениям (43) и (44), где $\gamma = \nu_0 k_2 / 2\omega$.

Решение (44) с использованием условий (45) для случая дефокусировки имеет вид (55) с точностью до замены в левой части $\beta \rightarrow k_2 / 2\omega$. В режиме же самофокусировки имеем

$$\sqrt{\frac{\nu_0 |k_2|}{2\omega}} \frac{x}{\tau_p R_0} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} - \frac{1}{3} \frac{R^3}{R_0^3} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{R^4}{R_0^4} \right). \quad (61)$$

Отсюда для длины самофокусировки получаем

$$x_f = \frac{\sqrt{2\pi} \Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \sqrt{\frac{\omega}{\nu_0 |k_2|}} \tau_p R_0 = 0.85 \sqrt{\frac{\omega}{\nu_0 |k_2|}} \tau_p R_0. \quad (62)$$

Как видно, эта длина пропорциональна входной длительности солитона (обратно пропорциональна его амплитуде). В окрестности фокуса $R \sim (x_f - x)^{1/3}$, $\rho \sim (x_f - x)^{-2/3}$.

В отличие от солитона типа ПКИ здесь самофокусировка никак не сказывается на его групповой скорости, которая остается равной ν_g . Фазовая же скорость стремится к нулю. Аналогичная ситуация имеет место в случае оптических солитонов [5]. Важно, что здесь формулы (37)–(39) справедливы для фазового эйконала φ_{ph} , а под ν_g в левой части (39) следует понимать фазовую скорость. Таким образом, в случае солитонов огибающей НУШ происходит искривление фазовых волновых фронтов (рис. 2), а не групповых, как это имеет место для солитонов типа ПКИ.

Здесь также справедлив критерий (59), в котором, однако, следует провести замену $\nu \rightarrow \nu_{ph}$.

Заметим, что здесь упомянутые выражения (37)–(39), (42), (55) и (61) являются, в отличие от разобранных выше случая солитона типа ПКИ, точными решениями системы (33), (34). Они получены здесь без использования приосевого приближения.

Режим дефокусировки реализуется в равновесной среде при $\omega > \omega_c$, в неравновесной при $\omega < \omega_c$, а также при любых несущих частотах в интервале между ω_1 и ω_2 в квазиравновесной среде второго типа. Причем дефокусировка здесь не имеет взрывного характера: на асимптотической стадии ($R/R_0 \gg 1$) апертура солитона растет пропорционально пройденной дистанции.

В остальных случаях себя проявляет самофокусировка. В случае равновесной среды при $\omega < \omega_c$, когда доминируют 1-переходы, для длины самофокусировки справедлива оценка

$$x_f \sim \omega \tau_p \frac{\omega}{\sqrt{\omega_1 \omega_a}} R_0.$$

Взяв $\omega \sim 10^{10} \text{ с}^{-1}$, $\omega \tau_p \sim 10$, найдем $x_f \sim 10^2 R_0$. Для неравновесной же среды в случае $\omega > \omega_c$ (при доминировании 2-переходов) имеем

$$x_f \sim \omega \tau_p \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} R_0 \sim 10^2 R_0.$$

Такая же численная оценка справедлива для квазиравновесной среды первого типа при несущих частотах

тах в интервале между ω_1 и ω_2 . Таким образом, в обоих случаях длина самофокусировки одного порodka. Пусть $R_0 \sim 1$ мм, тогда $x_f \sim 10$ см.

Пусть теперь несущая частота солитона $\omega = \omega_c$. Это может выполняться только в полностью равновесной и неравновесной средах, так как только в них $\omega_c^4 > 0$. В этом случае имеем одномерный солитон (27), (28), являющийся решением уравнения (22) при $k_2 = b = \Delta_\perp = 0$. Учет поперечных уравнений ($\Delta_\perp \neq 0$) уводит решение от сугубо вещественного вида из-за первого слагаемого в скобках правой части. Следовательно, теперь в качестве пробного решения следует выбрать (60), где как групповой φ_g , так и фазовый φ_{ph} эйконалы отличны от нуля. Считая их зависящими только от координат, запишем лагранжиан, соответствующий (22) при $k_2 = b = 0$, в виде

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Q^*}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial \xi} + \frac{\partial Q^*}{\partial \xi} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{k_3}{6} \left| \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} \right|^2 - \frac{g}{6} \left| \frac{\partial Q}{\partial \xi} \right|^4 + i \frac{\nu_0}{4\omega} \left(\frac{\partial Q^*}{\partial \xi} \Delta_\perp Q - \frac{\partial Q}{\partial \xi} \Delta_\perp Q^* \right) + \frac{\nu_0}{2\omega^2} \left| \nabla_\perp \frac{\partial Q}{\partial \xi} \right|. \quad (63)$$

Здесь «комплексный потенциал» Q связан с огибающей ψ выражением $\psi = \partial Q / \partial \xi$. В соответствии с этим и с (60) запишем его в виде

$$Q = 4 \exp \left(-i \frac{\omega \varphi_{ph}}{\nu_0} \right) \times \arctg \left\{ \text{sh} \left[\rho \left(\xi - \frac{\varphi_g}{\nu_0} \right) \right] \right\}. \quad (64)$$

Подстановка (64) в (63) и последующее интегрирование по ξ приводят к усредненному лагранжиану вида

$$\Lambda = \rho \frac{\partial \varphi_g}{\partial x} - \frac{\nu_0 k_3}{18} \rho^3 + \rho \frac{(\nabla_\perp \varphi_{ph})^2}{2} + \frac{\rho^3}{6\omega^2} (\nabla_\perp \varphi_g)^2 + \rho (\nabla_\perp \varphi_{ph}) (\nabla_\perp \varphi_g). \quad (65)$$

Отсюда приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} + \nabla_\perp (\rho \nabla_\perp \varphi_{ph}) = \nabla_\perp \left(\frac{\rho^3}{3\omega^2} \nabla_\perp \varphi_g \right), \quad (66)$$

$$\nabla_\perp (\rho \nabla_\perp \varphi_{ph}) - \nabla_\perp (\rho \nabla_\perp \varphi_g) = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_g}{\partial x} - \frac{(\nabla_\perp \varphi_{ph})^2}{2} + (\nabla_\perp \varphi_{ph}) (\nabla_\perp \varphi_g) + \frac{\nu_0 k_3}{6} \rho^2 = \frac{\rho^2}{2\omega^2} (\nabla_\perp \varphi_g)^2. \quad (67)$$

Из второго уравнения (66) имеем после интегрирования

$$\nabla_\perp \varphi_{ph} = \nabla_\perp \varphi_g. \quad (68)$$

Тогда, учитывая, что для солитонов огибающей $\rho^2 / \omega^2 \ll 1$ можно пренебречь правыми частями (67) и первого уравнения (66), получим систему вида (33), (34), где $\varphi = \varphi_g$, $f(\rho) = \nu_0 k_3 \rho^2 / 6$.

В термодинамически равновесном случае $k_3 > 0$. Тогда имеем $\rho f'(\rho) > 0$, что соответствует дефокусировке. При аксиальной симметрии решение для апертуры солитона имеет вид (55) с точностью до замены $\beta \rightarrow k_3 / 6$. При этом справедливы выражения (37)–(39) и (42), а в (43), (44) следует положить $\gamma = \nu_0 k_3 / 6$.

При неравновесных начальных заселенностях 1-, 2-переходов $k_3 < 0$. Поэтому здесь реализуется режим самофокусировки. Проводя в (61) и (62) замену $|k_2| \rightarrow \omega |k_3| / 3$ приходим соответственно к решению для апертуры и к выражению для длины самофокусировки в этом случае. При доминировании 2-переходов, когда $(\omega_c / \omega)^4 \ll 1$, для данной длины справедлива оценка $x_f \sim \omega_2 \tau_p \sqrt{\omega_2 / \omega_a} R_0$. В противоположном пределе $x_f \sim \omega_2 \tau_p \sqrt{\omega / \omega_a} (\omega / \omega_c)^2 R_0$. Взяв в качестве параметров среды и солитона их приведенные выше оценки, соответственно в первом и втором случаях будем иметь $x_f \sim 10^2 R_0 \sim 10$ см и $x_f \sim 10 R_0 \sim 10$ см. Вблизи фокуса, как и выше, $R \sim (x_f - x)^{1/3}$, $\rho \sim (x_f - x)^{-2/3}$.

Как легко видеть, функция $f(\rho)$ пропорциональна нелинейной добавке к обратной групповой скорости, определяемой вторым слагаемым в правой части (28). Здесь также справедлив критерий (59), в котором роль ν играет групповая скорость $\nu_G^{(K)}$.

Солитон (27) занимает промежуточное положение между солитоном (16) типа ПКИ и солитоном огибающей (25) в смысле квазимонохроматичности (количества содержащихся в нем осцилляций или количества членов разложения по степеням малого параметра $(\omega \tau_p)^{-1}$). Солитон типа ПКИ не содержит ни одной осцилляции, Здесь искривлению подвержены его групповые фронты. В случае же высоко квазимонохроматичного солитона НУШ (25), напротив, искривляются фазовые волновые фронты, а групповая скорость практически не изменяется. У солитона (31), согласно (68), искривляются как фазовые, так и групповые фронты (рис. 2). Здесь выражения (37)–(39) справедливы для фронтов обоих типов. Только для фазовой скорости в (38) и (39) следует положить $f'_1 = 0$, а для групповой

$$f'_1 = \nu_0 \frac{|k_3|}{6} \rho_0^2 \frac{R_0^4}{R^4}.$$

Поэтому при самофокусировке величина групповой скорости уменьшается на оси солитона, в то время как фазовая остается постоянной. При этом как групповые, так и фазовые волновые фронты выгибаются центральными участками назад, против направления распространения солитона (рис. 2б). При дефокусировке групповая скорость на оси солитона уменьшается по мере его распространения, приближаясь к своему линейному значению, фазовая скорость не изменяется, а центральные участки волновых фронтов обоих типов выгибаются вперед (рис. 2а), оставляя позади периферийные области.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, проведенное в настоящей работе исследование показывает возможность формирования различных гиперзвуковых солитонов в парамагнитных кристаллах.

Среди основных полученных результатов выделим те, которые касаются распространения солитонов типа «полуволновых» ПКИ, квазимонохроматических солитонов огибающей, а также различного влияния на них поперечных возмущений. Главным образом, имеется в виду динамика солитонов и бризеров уравнения (15), переходящих в квазимонохроматическом приближении в солитоноподобные решения уравнения (22). Ниже проведем критическое обсуждение данных результатов.

Выведенное в настоящей работе уравнение ККС (15) при $\Delta_{\perp} = 0$ является интегрируемым с помощью МОЗР, только если отношение между коэффициентами при третьем и четвертом слагаемыми в левой части равно $3/2$ [42]. В последней работе, как и в [43], где рассмотрено обобщение модели Френкеля–Конторовой для движения краевой дислокации, такое отношение приводит к необходимости наложения жесткого ограничения на параметры среды. В рассмотренной же здесь задаче упомянутое отношение появляется автоматически, без каких-либо дополнительных условий, что является, на наш взгляд, преимуществом данной физической модели. Обсуждаемыми слагаемыми здесь учитываются соответственно нелинейность и временная дисперсия 2-переходов. Таким образом, можно утверждать, что одномерные гиперзвуковые ПКИ способны в рассмотренной здесь среде сформироваться в солитоны, упруго взаимодействующие между собой.

Заметим, что уравнение ККС с таким же соот-

ношением коэффициентов при обсуждаемых слагаемых естественным образом вытекает из рассмотрения оптической и акустической СИП для импульсов огибающей в системе резонансных и квазирезонансных квантовых переходов [37, 54]. Подчеркнем, однако, что в настоящей работе уравнение ККС описывает распространение не огибающей, а самого поля импульса. Это позволило с единых позиций исследовать динамику как предельно коротких, так и квазимонохроматических сигналов, рассматривая соответственно солитонные и бризерные решения уравнения (15).

Распространение оптических ПКИ в двухкомпонентной среде из переходов, для которых выполнены условия (9), также описывается уравнением типа ККС [55, 56]. Однако в такой задаче интегрируемый вариант данного уравнения появляется только при неперемном условии равенства дипольных моментов обоих переходов [55, 56], что является серьезным искусственным ограничением. Рассмотренная же здесь акустическая модель лишена такого недостатка и интегрируемый вариант ККС появляется здесь естественным образом, без каких-либо существенных ограничений на параметры среды.

Если к уравнению (8) сразу применить редукцию к однонаправленному распространению, понизив его до первого порядка относительно производных с помощью метода ММП, то система (5)–(8) в одномерном случае формально сведется к редуцированной системе Максвелла–Блоха (РМБ) [57]. При этом различие в частотах двух разрешенных переходов можно учесть с помощью контура неоднородного уширения, состоящего из двух дельтаобразных пиков, центрированных на собственных частотах данных переходов. Известно, что такая система интегрируема в независимости от соотношения между данными частотами [57], что ставит ее в преимущественное положение перед (15).

С другой стороны, использованный в настоящей работе подход обладает некоторыми преимуществами перед подходом, использованным в [57]. Во-первых, использование условий (9) позволило полностью исключить из системы (5)–(8) материальные переменные и получить для поля импульса замкнутое нелинейное уравнение (15), так же как и РМБ, интегрируемое с помощью МОЗР. Как результат, найдена еще одна физическая реализация уравнения ККС. Во-вторых, применение непосредственно к (8) приближения ММП ограничивает скорость акустического солитона значениями, близкими к a_{\perp} . В нашем же случае возникает привязка к скорости a , значение которой может быть значительно мень-

ше, чем a_{\perp} , если параметр $\eta \rightarrow 1$. Это может позволить исследовать солитонную динамику гиперзвуковых импульсов в непосредственной близости от спин-фононного фазового перехода [41] и даже за его пределами, если $\eta > 1$. В последнем случае можно рассматривать распространение гиперзвуковых импульсов на фоне спонтанной деформации и намагниченности среды. В-третьих (и это особенно важно для настоящей работы), использованный здесь подход позволяет в достаточно простой форме исследовать влияние поперечных возмущений на гиперзвуковые солитоны с помощью метода РУ. Провести аналогичное исследование в случае РМБ представляется весьма затруднительным.

Исследование в настоящей работе влияния поперечных возмущений выявило важные различия в механизмах само- и дефокусировки ПККИ и солитонов огибающей. В предельных случаях «полуволновых» ПККИ и квазимонохроматических солитонов НУШ огибающей характер поперечной динамики определяется зависимостью соответственно групповой и фазовой скоростей от длительности (амплитуды) солитона (см. (59)). В первом случае происходит искривление групповых волновых фронтов, во втором — фазовых. В промежуточном случае солитона комплексного уравнения МКдВ искривляются оба типа волновых фронтов, но качественный характер поперечной динамики определяется зависимостью групповой скорости импульса от его длительности. При искривлении групповых (или тех и других) фронтов самофокусировка и дефокусировка сопровождаются уменьшением скорости распространения солитонов. В случае же искривления только фазовых волновых фронтов скорость распространения солитона при данных процессах не изменяется. Например, при самофокусировке фокус, в котором сосредоточен сигнал, движется с линейной групповой скоростью. В этой связи представляет интерес провести исследование влияния поперечных возмущений на бризеры (19), (20), где как фазовая, так и групповая скорости зависят от длительности. Тогда возможно будет совершить плавный переход от «полуволновых» ПККИ до квазимонохроматических солитонов огибающей в смысле качественного характера их поперечной динамики. Видимо, критерий (59) будет обобщен таким образом, что окажутся важными зависимости от длительности как групповой, так и фазовой скорости солитона.

Сказанное в предыдущем абзаце основано на анализе аксиально-симметричных в плоскости (y, z') неоднородных солитоноподобных решений. В плоскости же (y, z) поперечные сечения импульсов име-

ют эллипсоидальную форму, вытянутую вдоль оси y . Возникает вопрос, что нового может принести в поперечную динамику другая форма импульсов в поперечной плоскости. Сможет ли в этом случае проявиться себя азимутальная неустойчивость?

Выявленный здесь механизм формирования «акустической пули» типа «полуволнового» ПККИ в квазиравновесной среде является принципиально новым и пока не имеет своего оптического аналога.

В процессе самофокусировки могут оказаться важными эффекты дифракции, что потребует обобщить использованный здесь подход, сводящийся к приближению «геометрической акустики».

Заметим, что в [37] было учтено влияние дифракции на поперечную динамику квазимонохроматического акустического импульса, распространяющегося в спиновой системе резонансно-квазирезонансных переходов. Как было сказано выше в разд. 2, в одномерном случае динамика огибающей такого импульса описывается уравнением ККС. Влияние же поперечных возмущений на соответствующий солитон огибающей приводит, в частности, к его постепенному вытягиванию в направлении распространения, что сопровождается формированием структуры типа полого «акустического снаряда» [37]. Ничего подобного не происходит с рассмотренными в настоящей работе солитонами типа ПККИ и квазимонохроматическими нерезонансными солитонами. Это еще раз подчеркивает, насколько могут быть существенны различия в поперечной динамике импульсов, имеющих различный спектральный состав. В том числе это касается соотношений между частотами, содержащимися в импульсных спектрах, и частотами взаимодействующих с данными импульсами квантовых переходов.

Компенсация самофокусировки дифракцией в оптических задачах приводит в однородной нелинейной среде к образованию «световых пульс». Правда, нелинейность при этом должна быть либо нелокальной, либо иметь характер насыщения [58]. В рассмотренной здесь акустической задаче для этого необходимо учитывать следующие члены разложения в (13) по степеням нелинейности и дисперсии, что выходит за рамки настоящей статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-02-00199а).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Ахманов, В. Э. Гусев, УФН **162**, 3 (1992).

2. Н.-У. Нао and Н. J. Maris, Phys. Rev. B **64**, 064302 (2001).
3. Дж. Такер, Р. Рэмington, *Гиперзвук в физике твердого тела*, Мир, Москва (1975).
4. В. В. Леманов, Г. А. Смоленский, УФН **108**, 465 (1972).
5. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов*, Наука, Москва (1988).
6. T. Brabec and F. Krausz, Rev. Mod. Phys. **72**, 545 (2000).
7. F. Krausz and M. Ivanov, Rev. Mod. Phys. **81**, 163 (2009).
8. H. Leblond and D. Mihalache, Phys. Rep. **523**, 61 (2013).
9. Ф. В. Бункин, Ю. А. Кравцов, Г. А. Ляхов, УФН **149**, 391 (1986).
10. S. L. McCall and E. L. Hahn, Phys. Rev. Lett. **18**, 908 (1967).
11. N. S. Shireц, Phys. Rev. B **2**, 2471 (1970).
12. Г. А. Денисенко, ЖЭТФ **60**, 2270 (1971).
13. В. В. Самарцев, Б. П. Смоляков, Р. З. Шарипов, Письма в ЖЭТФ **20**, 644 (1974).
14. В. Э. Гусев, А. А. Карабутов, *Лазерная оптоакустика*, Наука, Москва (1991).
15. S. V. Sazonov, J. Phys. Condens. Matter **4**, 6485 (1992).
16. S. V. Sazonov, J. Phys. Condens. Matter **6**, 6295 (1994).
17. С. В. Воронков, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **120**, 269 (2001).
18. А. А. Заболотский, ЖЭТФ **123**, 1239 (2003).
19. А. А. Zabolotskii, Phys. Rev. E **67**, 066606 (2003).
20. А. А. Zabolotskii, Physica D **185**, 1239 (2003).
21. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, ЖЭТФ **129**, 849 (2006).
22. S. V. Sazonov and N. V. Ustinov, Phys. Rev. E **73**, 056614 (2006).
23. А. А. Заболотский, ЖЭТФ **132**, 493 (2007).
24. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, ТМФ **151**, 228 (2007).
25. S. V. Sazonov and N. V. Ustinov, J. Phys. A: Math., Theor. **40**, F551 (2007).
26. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, ТМФ **164**, 222 (2010).
27. А. Н. Бугай, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **139**, 464 (2011).
28. V. A. Semenov, D. A. Dubovsky, and A. V. Orlov, Crystall. Rep. **56**, 1149 (2011).
29. О. А. Дубовский, А. В. Орлов, Письма в ЖЭТФ **96**, 509 (2012).
30. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, ЖЭТФ **141**, 738 (2012).
31. О. А. Дубовский, А. В. Орлов, ФТТ **55**, 354 (2013).
32. В. А. Голенищев-Кутузов, В. В. Самарцев, Н. К. Соловаров, Б. М. Хабибуллин, *Магнитная квантовая акустика*, Наука, Москва (1977).
33. Э. Такер, в кн.: *Физическая акустика*, под ред. У. Мэзона, т. 4, часть А, гл. 2, Мир, Москва (1969).
34. E. V. Tucker, Phys. Rev. Lett. **6**, 183 (1961).
35. C. Kittel, Phys. Rev. Lett. **6**, 449 (1961).
36. У. Х. Копвиллем, В. Д. Корепанов, ФТТ **3**, 2014 (1961).
37. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **136**, 67 (2009).
38. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **118**, 20 (2000).
39. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, Письма в ЖЭТФ **51**, 252 (1990).
40. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, В. А. Ущановский, ЖЭТФ **100**, 762 (1991).
41. Н. С. Буйнов, В. Р. Нагибаров, Н. К. Соловаров, УФЖ **22**, 151 (1977).
42. K. Konno, W. Kameyama, and H. J. Sanuki, J. Phys. Soc. Jpn. **37**, 171 (1974).
43. A. M. Kosevich and A. S. Kovalev, Sol. St. Comm. **12**, 763 (1973).
44. С. В. Сазонов, УФН **171**, 663 (2001).
45. Э. Скотт, *Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике*, Сов. радио, Москва (1977).
46. M. Desaix, D. Anderson, and M. Lisak, J. Opt. Soc. Amer. B **8**, 2082 (1991).
47. С. К. Жданов, Б. А. Трубников, ЖЭТФ **92**, 1612 (1987).
48. С. К. Жданов, Б. А. Трубников, *Квазигазовые неустойчивые среды*, Наука, Москва (1991).

49. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*. Т. 6: *Гидродинамика*, Наука, Москва (1988).
50. Н. В. Карлов, Н. А. Кириченко, *Колебания, волны, структуры*, Физматлит, Москва (2001).
51. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, УФН **93**, 19 (1967).
52. Н. Г. Вахитов, А. А. Колоколов, Изв. ВУЗов. Радиофизика **16**, 1020 (1973).
53. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, УФН **182**, 569 (2012).
54. С. В. Сазонов, КЭ **37**, 29 (2007).
55. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **119**, 419 (2001).
56. H. Leblond, S. V. Sazonov, I. V. Mel'nikov, D. Miha-lache, and F. Sanchez, Phys. Rev. A **74**, 063815 (2006).
57. I. C. Eilbeck, I. D. Gibbon, P. J. Caudrey, and R. K. Bullough, J. Phys. A: Math., Theor. **6**, 1337 (1973).
58. Ю. С. Кившарь, Г. П. Агравал, *Оптические солитоны*, Физматлит, Москва (2005).