

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИММЕТРИИ В ЗАДАЧЕ О ПРОВОДИМОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ КОМПОЗИТОВ

*Б. Я. Балагуров**

*Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля Российской академии наук
119334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 19 апреля 2013 г.

Предложено преобразование координат, плотности тока и напряженности электрического поля, которое оставляет без изменения уравнения постоянного тока. Подбором коэффициентов преобразования одну из компонент композита можно сделать изотропной. Это позволяет произвести обобщение стандартной теории эффективной среды на случай анизотропного композита с включениями произвольной формы.

DOI: 10.7868/S004445101311014X

1. ВВЕДЕНИЕ

Теоретическое изучение проводимости сравнительно мало исследованных неупорядоченных анизотропных композитов наталкивается на те же трудности принципиального характера, что и в изотропном случае. Для определения тензора эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$ такой среды необходимо решить уравнение для потенциала в ряде областей произвольной формы с последующим удовлетворением стандартных граничных условий на поверхности раздела компонент. Ясно, что решить в полном объеме подобную задачу аналитическими методами не представляется возможным даже в изотропном случае. По этой причине при исследовании проводимости композитов используются прежде всего численные методы — довольно громоздкие компьютерные эксперименты. При этом переход от изотропных систем к анизотропным сопровождается существенным усложнением расчетов из-за увеличения числа параметров, входящих в задачу. Так, если в изотропном случае безразмерная эффективная проводимость является функцией двух аргументов (концентрации и отношения проводимостей компонент), то в анизотропном — шести. Поэтому в задаче о проводимости анизотропных композитов желателен поиск способов упрощения как аналитических, так и численных расчетов.

В настоящей работе предложено преобразование

координат, плотности тока и напряженности электрического поля достаточно общего вида, сохраняющее уравнения постоянного тока. В преобразованной таким образом системе меняются как проводимости компонент, так и их геометрия. Подбором коэффициентов преобразования можно в широком диапазоне изменять локальный тензор проводимости $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$. В частности, исходную анизотропную задачу можно свести к «полуанизотропной», в которой одна из компонент становится изотропной. Переход к такой системе особенно удобен для композита с диэлектрическими или идеально проводящими включениями, когда можно ограничиться внешней задачей. В преобразованной системе приходим к задаче об электропроводности композита с изотропной матрицей и включениями той же (исходной) проводимости, но с измененной формой. Тем самым исходно анизотропная задача сводится к обычной изотропной.

В физике гетерогенных систем для приближенного количественного определения эффективной проводимости изотропных композитов широко используется так называемая теория эффективной среды — метод ЕМА (effective medium approximation) [1]. Как показано в работе [2] на примере решеточных моделей, этот метод удовлетворительно описывает проводимость неупорядоченных изотропных систем в широком диапазоне изменения концентрации, за исключением окрестности порога протекания — точки фазового перехода металл–диэлектрик. Аналогичный вывод сделан в работе [3], где исследовалась проводимость неупорядоченной анизотроп-

*E-mail: balagurov@deom.chph.ras.ru, byabalagurov@mail.ru

ной кубической решетки, которая в определенной степени моделирует сплошную среду с включениями в виде сфер. В рамках же сплошной среды проводимость анизотропного композита с включениями сферической формы методом ЕМА рассматривалась в работе [4]. В то же время подход к этой проблеме в случае включений произвольной формы до сих пор отсутствовал.

Введенное в работе преобразование симметрии позволяет провести такое обобщение метода ЕМА. С помощью этого преобразования окружающая выделенное включение анизотропная «эффективная среда» переходит в изотропную. Это дает возможность поставить и, в принципе, решить задачу о нахождении тензора дипольной поляризуемости $\hat{\Lambda}$ преобразованного включения, отличающегося от исходного как геометрией, так и проводимостью. В свою очередь, интеграл от напряженности электрического поля по объему включения, входящий в уравнение метода ЕМА, выражается через тензор $\hat{\Lambda}$. Это позволяет получить замкнутую систему уравнений теории эффективной среды для анизотропных композитов.

В качестве иллюстрации предложенного подхода в работе рассмотрена двумерная модель анизотропного композита с системой бесконечно тонких царапин. Царапины хаотически ориентированы, а их центры случайным образом распределены в плоскости xy . Приведена замкнутая система уравнений метода ЕМА для этой модели. Эффективная проводимость такого композита найдена в явном виде в ряде предельных случаев. Отмечено, что при приближении к порогу протекания даже при сильно анизотропной матрице подобный композит практически полностью изотропизуется. Этот вывод согласуется с соображениями качественного порядка, высказанными в работах [5, 6].

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИММЕТРИИ

Рассмотрим задачу об электропроводности анизотропной неоднородной среды с локальным тензором проводимости $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$. Предполагаем, что главные оси тензора $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$ совпадают с осями декартовой системы координат. Для вычисления тензора эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$ такого композита нужно решить систему уравнений постоянного тока

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{j} = \hat{\sigma}(\mathbf{r})\mathbf{E}. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ — плотность тока, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ — напряженность электрического поля в среде. Потенциал, определенный согласно $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sigma_x(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \sigma_y(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \sigma_z(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\} = 0. \quad (2)$$

Тензор $\hat{\sigma}_e$ определяется из соотношения

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \hat{\sigma}_e \langle \mathbf{E} \rangle, \quad (3)$$

где $\langle \dots \rangle$ — среднее по объему образца V при $V \rightarrow \infty$.

Проведем следующее преобразование координат, плотности тока и напряженности электрического поля:

$$\begin{aligned} x &= \lambda_x \tilde{x}, & y &= \lambda_y \tilde{y}, & z &= \lambda_z \tilde{z}; \\ j_x &= \lambda_x \tilde{j}_x, & j_y &= \lambda_y \tilde{j}_y, & j_z &= \lambda_z \tilde{j}_z; \\ E_x &= \frac{1}{\lambda_x} \tilde{E}_x, & E_y &= \frac{1}{\lambda_y} \tilde{E}_y, & E_z &= \frac{1}{\lambda_z} \tilde{E}_z, \end{aligned} \quad (4)$$

где λ_ν , $\nu = x, y, z$ — некоторые константы. При таком преобразовании уравнения постоянного тока сохраняют вид (1) с тензором проводимости $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$. Для главных значений этого тензора имеем

$$\tilde{\sigma}_\nu(\mathbf{r}) = \frac{\sigma_\nu(\mathbf{r})}{\lambda_\nu^2}, \quad \nu = x, y, z. \quad (5)$$

Усредняя j_ν и E_ν из формул (4), найдем аналогичную по виду связь эффективных тензоров исходной $\hat{\sigma}_e$ и преобразованной $\hat{\tilde{\sigma}}_e$ систем:

$$\sigma_{e\nu} = \lambda_\nu^2 \tilde{\sigma}_{e\nu}. \quad (6)$$

Придавая различные значения константам λ_ν , будем получать набор систем, отличающихся друг от друга как геометрией (структурой), так и проводимостями компонент. Эти системы изоморфны, так как преобразование (4)–(6) устанавливает между ними взаимно-однозначное соответствие.

Для бинарного композита тензор проводимости $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$ принимает постоянные значения $\hat{\sigma}_1$ и $\hat{\sigma}_2$ соответственно в первой и второй компонентах. В каждой из компонент электрический потенциал $\varphi(\mathbf{r})$, определенный согласно $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, подчиняется уравнению

$$\sigma_{ix} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \sigma_{iy} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} + \sigma_{iz} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

На поверхности раздела компонент должны выполняться стандартные граничные условия — непрерывность потенциала и нормальной составляющей плотности тока. Тензор эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$,

определенный по соотношению (3), является многопараметрической функцией

$$\sigma_{e\nu} = \sigma_{e\nu}(p; \sigma_{1x}, \sigma_{1y}, \sigma_{1z}; \sigma_{2x}, \sigma_{2y}, \sigma_{2z}), \quad (8)$$

где p — концентрация (доля занимаемого объема) первой компоненты. Если выделить в (8) при $\nu = x$ в качестве размерного множителя σ_{1x} , то соответствующая безразмерная эффективная проводимость будет функцией шести аргументов:

$$\sigma_{ex} = \sigma_{1x} f_x \left(p; \frac{\sigma_{1y}}{\sigma_{1x}}, \frac{\sigma_{1z}}{\sigma_{1x}}, \frac{\sigma_{2x}}{\sigma_{1x}}, \frac{\sigma_{2y}}{\sigma_{1x}}, \frac{\sigma_{2z}}{\sigma_{1x}} \right). \quad (9)$$

Аналогичный вид принимают проводимости σ_{ey} и σ_{ez} после выделения множителей σ_{1y} и σ_{1z} .

Покажем, что исходная задача о проводимости бинарного композита может быть сведена к «частично анизотропной», в которой одна из компонент изотропна. Выберем в преобразовании (4) константы λ_ν следующим образом:

$$\lambda_\nu = \sqrt{\frac{\sigma_{1\nu}}{\sigma_0}}, \quad \nu = x, y, z, \quad (10)$$

где σ_0 — вспомогательная величина размерности проводимости. При таком преобразовании первая компонента становится изотропной с законом Ома

$$\tilde{\mathbf{j}}_1 = \sigma_0 \tilde{\mathbf{E}}_1, \quad (11)$$

а уравнение (7) при $i = 1$ переходит в уравнение Лапласа. Вторая компонента остается анизотропной с тензором проводимости $\hat{\sigma}_2$, главные значения которого имеют вид

$$\tilde{\sigma}_{2\nu} = \frac{\sigma_{2\nu}}{\lambda_\nu^2} = \sigma_0 \frac{\sigma_{2\nu}}{\sigma_{1\nu}}. \quad (12)$$

Структура преобразованной системы получается из исходной растяжением (или сжатием) по всем трем осям x, y, z с соответствующими коэффициентами.

Если включения второй компоненты диэлектрические или идеально проводящие, то в преобразованной системе их проводимость остается той же и меняется только форма. Таким образом, в этом случае исходная задача о проводимости композита с естественной анизотропией становится для первой компоненты изотропной. При этом макроскопически преобразованная система является, вообще говоря, структурно анизотропной и ее проводимость описывается тензором $\hat{\sigma}_e$. Главные значения тензоров эффективной проводимости исходной и преобразованной систем связаны соотношением (6).

Для одноосных ($\sigma_x = \sigma_y \neq \sigma_z$) кристаллических композитов преобразование симметрии удобно брать в виде

$$x = \tilde{x}, \quad y = \tilde{y}, \quad z = \lambda \tilde{z};$$

$$j_x = \tilde{j}_x, \quad j_y = \tilde{j}_y, \quad j_z = \lambda \tilde{j}_z; \quad (13)$$

$$E_x = \lambda \tilde{E}_x, \quad E_y = \lambda \tilde{E}_y, \quad E_z = \tilde{E}_z.$$

В этом случае в преобразованной системе

$$\tilde{\sigma}_x = \lambda \sigma_x, \quad \tilde{\sigma}_z = \frac{1}{\lambda} \sigma_z \quad (14)$$

и

$$\sigma_{ex} = \frac{1}{\lambda} \tilde{\sigma}_{ex}, \quad \sigma_{ez} = \lambda \tilde{\sigma}_{ez}. \quad (15)$$

Для бинарного композита при

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sigma_{1z}}{\sigma_{1x}}} \quad (16)$$

первая компонента становится изотропной с законом Ома

$$\tilde{\mathbf{j}}_1 = \sqrt{\sigma_{1x} \sigma_{1z}} \tilde{\mathbf{E}}_1. \quad (17)$$

Для составляющих тензора проводимости $\hat{\sigma}_1$ второй компоненты имеем

$$\tilde{\sigma}_{2x} = \lambda \sigma_{2x}, \quad \tilde{\sigma}_{2z} = \frac{1}{\lambda} \sigma_{2z}. \quad (18)$$

Структура преобразованной системы получается из исходной растяжением (сжатием) вдоль оси z с коэффициентом λ .

3. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ СРЕДЫ

Для количественной оценки проводимости анизотропных композитов в широкой области изменения концентрации и других параметров, входящих в задачу, воспользуемся приближением эффективной среды — методом ЕМА, обобщенным на анизотропный случай и включения произвольной формы. Для вывода основных уравнений метода ЕМА в задаче о проводимости n -компонентного анизотропного композита усредним вектор $\mathbf{J} = \mathbf{j} - \hat{\sigma}_e \mathbf{E}$ по объему образца V (при $V \rightarrow \infty$). По определению тензора эффективной проводимости имеем $\langle \mathbf{j} \rangle = \hat{\sigma}_e \langle \mathbf{E} \rangle$, поэтому среднее значение вектора \mathbf{J} равно нулю. С другой стороны,

$$\langle \mathbf{j} - \hat{\sigma}_e \mathbf{E} \rangle = - \sum_{i=1}^n (\hat{\sigma}_e - \hat{\sigma}_i) \frac{1}{V} \int_{V_i} \mathbf{E} dV, \quad (19)$$

где $\hat{\sigma}_i$ — тензор проводимости i -й компоненты, а интеграл в (19) берется по ее объему V_i . С учетом равенства нулю левой части тождество (19) принимает вид

$$\sum_{i=1}^n N_i (\hat{\sigma}_e - \hat{\sigma}_i) \left\{ \int_{V_i} \mathbf{E} dV \right\}_i = 0. \quad (20)$$

Здесь N_i — размерная концентрация (число включений в единице объема) i -й компоненты; интегрирование в формуле (20) проводится по объемам отдельных включений этой компоненты. Под $\{\dots\}_i$ понимается усреднение по всем включениям i -й компоненты.

Приближение метода ЕМА состоит в замене величины $\{\dots\}_i$ в равенстве (20) на интеграл от напряженности электрического поля внутри некоторого среднего i -го включения, помещенного в матрицу («эффективную среду») с тензором проводимости $\hat{\sigma}_e$. В результате из тождества (20) следует исходное уравнение метода ЕМА:

$$\sum_{i=1}^n c_i (\hat{\sigma}_e - \hat{\sigma}_i) \langle \mathbf{E} \rangle_i = 0, \quad (21)$$

где $c_i = \bar{v}_i N_i$ — безразмерная концентрация (доля занимаемого объема) i -й компоненты и

$$\langle \mathbf{E} \rangle_i = \frac{1}{\bar{v}_i} \int_{\bar{v}_i} \mathbf{E} dV. \quad (22)$$

Здесь через \bar{v}_i обозначен объем усредненного включения i -й компоненты.

Рассмотрим бинарный композит, состоящий из матрицы с тензором проводимости $\hat{\sigma}_1$ и одинаковых включений (с тензором проводимости $\hat{\sigma}_2$) фиксированной формы. В этом случае «включения» первой компоненты (матрицы) могут иметь самый разнообразный вид. Форма среднего включения этой компоненты задается геометрией композита. Для структурно изотропной системы в качестве такого включения следует выбрать наиболее симметричную фигуру — сферу. Если же геометрия среды образована растяжением в одном из направлений изначально изотропной сетки, то усредненное включение аппроксимируется эллипсоидом вращения с соответствующим отношением полуосей. Наконец, для вытянутой во всех трех направлениях координатных осей системы в качестве среднего включения первой компоненты выбирается трехосный эллипсоид. Такой выбор продиктован также и тем, что в этих случаях напряженность электрического поля внутри включения может быть найдена в аналитическом виде.

Считаем, что главные оси тензоров $\hat{\sigma}_e$ и $\hat{\sigma}_i$ ($i = 1, 2$) совпадают с осями симметрии включения в виде эллипсоида (с тензором проводимости $\hat{\sigma}_1$) и образуют декартову систему координат. В этом случае для составляющих напряженности электри-

ческого поля \mathbf{E}_1 внутри эллипсоида имеем (см., например, [7])

$$E_{1\nu} = \frac{\sigma_{e\nu}}{\sigma_{e\nu} - (\sigma_{e\nu} - \sigma_{1\nu}) \tilde{n}^{(\nu)}} E_{0\nu}, \quad \nu = x, y, z. \quad (23)$$

Здесь $\sigma_{e\nu}$ и $\sigma_{1\nu}$ — главные значения тензоров $\hat{\sigma}_e$ и $\hat{\sigma}_1$, \mathbf{E}_0 — напряженность электрического поля вдали от включения, $\tilde{n}^{(\nu)}$ — коэффициенты деполяризации эллипсоида с полуосями

$$\tilde{a}_\nu = a_\nu \sqrt{\frac{\sigma_0}{\sigma_{e\nu}}}, \quad \nu = x, y, z, \quad (24)$$

σ_0 — вспомогательная величина, аналогичная введенной в (10). В формуле (24) a_ν — полуоси исходного эллипсоида, значения которых (точнее, их отношения) задаются структурой композита. Поле, определяемое формулой (23), однородно и поэтому интегрирование напряженности \mathbf{E}_1 сводится просто к умножению ее на соответствующий объем. Из (21) с учетом выражения (23) следует ($\nu = x, y, z$)

$$p \frac{\sigma_{e\nu} (\sigma_{e\nu} - \sigma_{1\nu})}{\sigma_{e\nu} - (\sigma_{e\nu} - \sigma_{1\nu}) \tilde{n}^{(\nu)}} E_{0\nu} + c (\sigma_{e\nu} - \sigma_{2\nu}) \langle E_\nu \rangle_2 = 0. \quad (25)$$

Здесь $p = c_1$ и $c = c_2$ (причем $c = 1 - p$) — безразмерные концентрации первой и второй компонент.

Для вычисления интеграла от \mathbf{E}_2 по объему включения второй компоненты воспользуемся приемом, аналогичным примененному в предыдущем разделе. Отличие состоит только в том, что при преобразовании симметрии (4) в качестве коэффициентов λ_ν следует взять величины

$$\lambda_\nu = \sqrt{\frac{\sigma_{e\nu}}{\sigma_0}}, \quad \nu = x, y, z, \quad (26)$$

с той же, что и в формуле (24), вспомогательной величиной σ_0 . В преобразованной системе окружающая включения анизотропная «эффективная среда» становится изотропной со скалярной проводимостью σ_0 . Само включение остается анизотропным с составляющими тензора проводимости $\tilde{\sigma}_2$:

$$\tilde{\sigma}_{2\nu} = \frac{\sigma_{2\nu}}{\lambda_\nu^2} = \sigma_0 \frac{\sigma_{2\nu}}{\sigma_{e\nu}}. \quad (27)$$

При этом, как уже отмечалось, меняется и форма включения.

Рассмотрим теперь задачу о макроскопическом теле с анизотропной диэлектрической проницаемостью $\hat{\epsilon}$, помещенном во внешнее однородное электрическое поле напряженности \mathbf{E}_0 . Дипольный момент тела \mathbf{p} определяется обычным образом:

$$\mathbf{p} = \int_v \mathbf{P} dV = \frac{1}{4\pi} \int_v (\mathbf{D} - \mathbf{E}) dV = \frac{\hat{\epsilon} - \hat{1}}{4\pi} \int_v \mathbf{E} dV, \quad (28)$$

где \mathbf{P} — вектор поляризации, \mathbf{D} — вектор электрической индукции. С другой стороны, величина \mathbf{p} связана с напряженностью \mathbf{E}_0 следующим образом:

$$\mathbf{p} = \hat{\Lambda} \mathbf{E}_0, \quad (29)$$

где $\hat{\Lambda}$ — тензор дипольной поляризуемости тела. Из (28), (29) находим

$$\int_v \mathbf{E} dV = 4\pi(\hat{\epsilon} - \hat{1})^{-1} \mathbf{p} = 4\pi(\hat{\epsilon} - \hat{1})^{-1} \hat{\Lambda} \mathbf{E}_0. \quad (30)$$

Поэтому в задаче о проводимости для преобразованной системы после замены $\hat{\epsilon} \rightarrow \hat{\sigma}_2/\sigma_0$ будем иметь

$$\int_{\tilde{v}} \tilde{\mathbf{E}} d\tilde{V} = 4\pi \left(\frac{\hat{\sigma}_2}{\sigma_0} - \hat{1} \right)^{-1} \hat{\Lambda} \tilde{\mathbf{E}}_0. \quad (31)$$

Здесь $\hat{\Lambda}$ — тензор дипольной поляризуемости преобразованного включения.

Равенство (31) следует, вообще говоря, усреднить по всем включениям. Считаем, что у усредненного таким образом тензора $\hat{\Lambda}$ главные оси совпадают с осями декартовой системы координат. В этом случае

$$\int_{\tilde{v}} \tilde{E}_\nu d\tilde{V} = 4\pi \frac{\sigma_0}{\tilde{\sigma}_{2\nu} - \sigma_0} \tilde{\Lambda}_\nu \tilde{E}_{0\nu}. \quad (32)$$

Поскольку

$$\int_v E_\nu dV = \frac{\lambda_x \lambda_y \lambda_z}{\lambda_\nu} \int_{\tilde{v}} \tilde{E}_\nu d\tilde{V},$$

с учетом формул (27) и (32) получаем

$$\begin{aligned} \langle E_\nu \rangle_2 &= \frac{1}{v} \int_v E_\nu dV = \\ &= -4\pi \frac{\lambda_x \lambda_y \lambda_z}{v} \frac{\sigma_{e\nu}}{\sigma_{e\nu} - \sigma_{2\nu}} \tilde{\Lambda}_\nu E_{0\nu}. \end{aligned} \quad (33)$$

Положив $\hat{\Lambda} = \tilde{v} \hat{\alpha}$, приведем равенство (33) к виду

$$\langle E_\nu \rangle_2 = -4\pi \frac{\sigma_{e\nu}}{\sigma_{e\nu} - \sigma_{2\nu}} \tilde{\alpha}_\nu E_{0\nu}, \quad (34)$$

где $\tilde{\alpha}_\nu$ — безразмерная дипольная поляризуемость преобразованного включения и $v = \lambda_x \lambda_y \lambda_z \tilde{v}$ — истинный объем исходного включения.

Подстановка (33) в (25) дает

$$p \frac{\sigma_{e\nu} - \sigma_{1\nu}}{\sigma_{e\nu} - (\sigma_{e\nu} - \sigma_{1\nu}) \tilde{n}^{(\nu)}} - 4\pi c \frac{\lambda_x \lambda_y \lambda_z}{v} \tilde{\Lambda}_\nu = 0 \quad (35)$$

или после введения безразмерного тензора дипольной поляризуемости —

$$p \frac{\sigma_{e\nu} - \sigma_{1\nu}}{\sigma_{e\nu} - (\sigma_{e\nu} - \sigma_{1\nu}) \tilde{n}^{(\nu)}} - 4\pi c \tilde{\alpha}_\nu = 0, \quad (36)$$

$$\nu = x, y, z.$$

Равенствами (35) и (36) даются основные уравнения метода ЕМА для рассматриваемого бинарного анизотропного композита.

Сделав замены $\lambda_y = \lambda_x \mu_1$ и $\lambda_z = \lambda_x \mu_2$, нетрудно убедиться, что составляющие тензора эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$ зависят от коэффициентов λ_ν только в виде отношений λ_y/λ_x и λ_z/λ_x . Далее заметим, что в каждое из уравнений (35) или (36) входят все три искомые величины $\sigma_{ex}, \sigma_{ey}, \sigma_{ez}$. При решении этой системы уравнений можно воспользоваться следующим приемом. В уравнении для σ_{ex} положим

$$\sigma_{ey} = \sigma_{ex} \left(\frac{\lambda_y}{\lambda_x} \right)^2, \quad \sigma_{ez} = \sigma_{ex} \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_x} \right)^2. \quad (37)$$

В результате это уравнение формально будет содержать одно неизвестное σ_{ex} , а его решение будет зависеть от двух параметров λ_y/λ_x и λ_z/λ_x . Аналогичным образом ищем формальные решения для σ_{ey} и σ_{ez} , так что

$$\sigma_{e\nu} = \sigma_{ex} (\lambda_y/\lambda_x, \lambda_z/\lambda_x), \quad \nu = x, y, z. \quad (38)$$

Если решения (38) найдены, то положив

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda_y}{\lambda_x} \right)^2 &= \frac{\sigma_{ey} (\lambda_y/\lambda_x, \lambda_z/\lambda_x)}{\sigma_{ex} (\lambda_y/\lambda_x, \lambda_z/\lambda_x)}, \\ \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_x} \right)^2 &= \frac{\sigma_{ez} (\lambda_y/\lambda_x, \lambda_z/\lambda_x)}{\sigma_{ex} (\lambda_y/\lambda_x, \lambda_z/\lambda_x)}, \end{aligned} \quad (39)$$

получим два уравнения для нахождения параметров λ_y/λ_x и λ_z/λ_x . Равенства (35) (или (36)) и (39) составляют замкнутую систему уравнений метода ЕМА для задачи о проводимости бинарных анизотропных композитов.

При $c \ll 1$ в линейном по концентрации c приближении из (36) следует выражение

$$\sigma_{e\nu} = \sigma_{1\nu} (1 + 4\pi c \tilde{\alpha}_\nu), \quad (40)$$

совпадающее с полученным в работе [7].

Для структурно изотропной среды в качестве «включения» первой компоненты следует взять, как отмечалось выше, сферу. В этом случае уравнение (36) не меняет вид, однако коэффициенты деполяризации относятся теперь к эллипсоиду с полуосями

$$a_\nu = R/\sqrt{\sigma_{e\nu}}, \quad (41)$$

где R — радиус сферы, величина которого несущественна для дальнейшего.

Для слабонеоднородной ($|\sigma_{1\nu} - \sigma_{2\nu}| \ll \sigma_{1\nu}$) структурно изотропной среды положим

$$\sigma_{e\nu} = \sigma_{1\nu} + \sigma_{e\nu}^{(1)} + \sigma_{e\nu}^{(2)} + \dots, \quad (42)$$

где $\sigma_{e\nu}^{(n)}$ содержит малый параметр $|\sigma_{1\nu} - \sigma_{2\nu}|/\sigma_{1\nu}$ в n -й степени. С точностью до второго порядка по этому параметру включительно имеем

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{e\nu} - \sigma_{1\nu}}{\sigma_{e\nu} - (\sigma_{e\nu} - \sigma_{1\nu}) n^{(\nu)}} &= \\ &= \frac{1}{\sigma_{1\nu}} \left\{ \sigma_{e\nu}^{(1)} + \sigma_{e\nu}^{(2)} - \frac{1 - n^{(\nu)}}{\sigma_{1\nu}} (\sigma_{e\nu}^{(1)})^2 + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (43)$$

Здесь коэффициенты деполяризации отвечают эллипсоиду с полуосями (41). Для соответствия с работой [8] у величины $n^{(\nu)}$ опущен значок «тильда».

Для составляющих тензора дипольной поляризуемости имеем аналогичное разложение

$$\tilde{\alpha}_\nu = \tilde{\alpha}_\nu^{(1)} + \tilde{\alpha}_\nu^{(2)} + \dots \quad (44)$$

Величины $\tilde{\alpha}_\nu^{(1)}$ и $\tilde{\alpha}_\nu^{(2)}$ для «слабонеоднородного» включения даются выражениями, полученными в работе [7], с заменой $\sigma_{1\nu} \rightarrow \sigma_{e\nu}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_\nu^{(1)} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\sigma_{e\nu} - \sigma_{2\nu}}{\sigma_{e\nu}}, \\ \tilde{\alpha}_\nu^{(2)} &= -\frac{n^{(\nu)}}{4\pi} \left(\frac{\sigma_{e\nu} - \sigma_{2\nu}}{\sigma_{e\nu}} \right)^2, \end{aligned} \quad (45)$$

где в качестве $\sigma_{e\nu}$ следует взять разложение (42). Подставляя это разложение, из (45) найдем следующие выражения, справедливые до второго порядка по малому параметру:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_\nu^{(1)} &= -\frac{1}{4\pi\sigma_{1\nu}} \left\{ \sigma_{1\nu} - \sigma_{2\nu} + \sigma_{e\nu}^{(1)} + \sigma_{e\nu}^{(2)} - \right. \\ &\quad \left. - (\sigma_{1\nu} - \sigma_{2\nu} + \sigma_{e\nu}^{(1)}) \frac{\sigma_{e\nu}^{(1)}}{\sigma_{1\nu}} + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\tilde{\alpha}_\nu^{(2)} = -\frac{n^{(\nu)}}{4\pi} \left(\frac{\sigma_{1\nu} - \sigma_{2\nu} + \sigma_{e\nu}^{(1)}}{\sigma_{1\nu}} \right)^2 + \dots \quad (47)$$

Подставляя (43), (46) и (47) в уравнение (36), найдем величины $\sigma_{e\nu}^{(1)}$ и $\sigma_{e\nu}^{(2)}$, так что в квадратичном приближении получаем выражение

$$\begin{aligned} \sigma_{e\nu} &= \sigma_{1\nu} \left\{ 1 - c \frac{\sigma_{1\nu} - \sigma_{2\nu}}{\sigma_{1\nu}} - \right. \\ &\quad \left. - n^{(\nu)} c(1-c) \left(\frac{\sigma_{1\nu} - \sigma_{2\nu}}{\sigma_{1\nu}} \right)^2 + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (48)$$

совпадающее с соответствующей формулой из работы [8].

Таким образом, метод ЕМА правильно описывает проводимость бинарных анизотропных композитов как в линейном по концентрации приближении, так и для слабонеоднородной среды.

В случае композитов с одноосной анизотропией ($\sigma_x = \sigma_y \neq \sigma_z$) проведем преобразование симметрии в виде (13) с параметром

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sigma_{ez}}{\sigma_{ex}}}. \quad (49)$$

При таком преобразовании среда, окружающая включение, становится изотропной с законом Ома

$$\tilde{\mathbf{j}}^{(e)} = \sqrt{\sigma_{ex}\sigma_{ez}} \tilde{\mathbf{E}}^{(e)}, \quad (50)$$

а включение остается анизотропным с тензором проводимости $\hat{\sigma}_2 = \{\tilde{\sigma}_{2x}, \tilde{\sigma}_{2z}\}$, где $\tilde{\sigma}_{2x} = \lambda \sigma_{2x}$, $\tilde{\sigma}_{2z} = \lambda^{-1} \sigma_{2z}$. Основные уравнения метода ЕМА в этом случае имеют вид ($\nu = x, z$)

$$p \frac{\sigma_{e\nu} - \sigma_{1\nu}}{\sigma_{e\nu} - (\sigma_{e\nu} - \sigma_{1\nu}) \tilde{n}^{(\nu)}} - \frac{4\pi c \lambda}{v} \tilde{\Lambda}_\nu = 0 \quad (51)$$

или

$$p \frac{\sigma_{e\nu} - \sigma_{1\nu}}{\sigma_{e\nu} - (\sigma_{e\nu} - \sigma_{1\nu}) \tilde{n}^{(\nu)}} - 4\pi c \tilde{\alpha}_\nu = 0. \quad (52)$$

Здесь, как и в (35), (36), предполагается, что после усреднения по всем включениям главные оси тензора дипольной поляризуемости совпадают с осями декартовых координат.

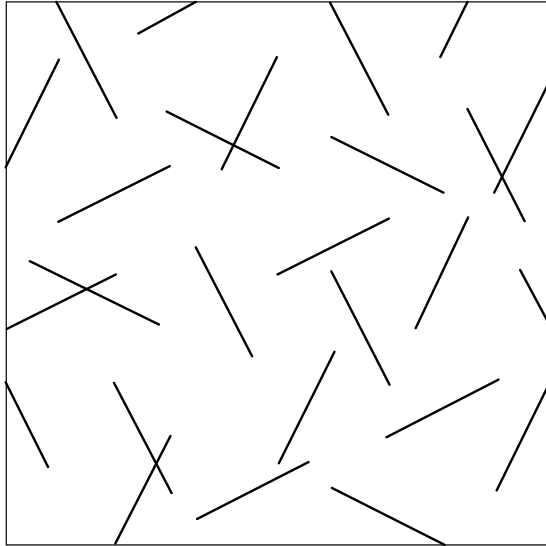
В данном случае решения уравнений (51), (52) зависят от одного параметра: $\sigma_{e\nu} = \sigma_{e\nu}(\lambda)$. Поэтому систему (51) или (52) следует дополнить уравнением

$$\lambda^2 = \frac{\sigma_{ez}(\lambda)}{\sigma_{ex}(\lambda)}. \quad (53)$$

Заметим, что величина λ , определенная согласно равенству (49), совпадает с параметром, характеризующим анизотропию системы как целого.

4. ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ АНИЗОТРОПНОГО КОМПОЗИТА

В качестве иллюстрации предложенного обобщения метода ЕМА рассмотрим двумерную модель композита, имитирующую тонкую проводящую пленку с системой случайно распределенных и хаотически ориентированных царапин (см. рисунок).



В этом случае преобразование симметрии запишем в виде

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x}, & y &= \lambda \tilde{y}; & j_x &= \tilde{j}_x, & j_y &= \lambda \tilde{j}_y; \\ E_x &= \lambda \tilde{E}_x, & E_y &= \tilde{E}_y, \end{aligned} \quad (54)$$

где

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sigma_{ey}}{\sigma_{ex}}}. \quad (55)$$

Уравнения метода ЕМА имеют вид, аналогичный (51), (52):

$$p \frac{\sigma_{e\nu} - \sigma_{1\nu}}{\sigma_{e\nu} - (\sigma_{e\nu} - \sigma_{1\nu}) \tilde{n}^{(\nu)}} - \frac{4\pi c \lambda}{s} \tilde{\Lambda}_\nu = 0, \quad (56)$$

$$\nu = x, y,$$

$$p \frac{\sigma_{e\nu} - \sigma_{1\nu}}{\sigma_{e\nu} - (\sigma_{e\nu} - \sigma_{1\nu}) \tilde{n}^{(\nu)}} - 4\pi c \tilde{\alpha}_\nu = 0. \quad (57)$$

Здесь $s = \lambda \tilde{s}$ — площадь включения, $\tilde{n}^{(\nu)}$ — коэффициенты деполяризации эллипса (эллиптического цилиндра) с полуосями

$$\tilde{a}_\nu = \frac{a_\nu}{\sqrt{\sigma_{e\nu}}}, \quad \nu = x, y, \quad (58)$$

где a_ν — полуоси эллипса, аппроксимирующего исходное «включение» первой компоненты (матрицы). Коэффициенты $\tilde{n}^{(\nu)}$ имеют вид

$$\tilde{n}^{(x)} = \frac{\tilde{a}_y}{\tilde{a}_x + \tilde{a}_y} = \frac{a_y}{\lambda a_x + a_y}, \quad (59)$$

$$\tilde{n}^{(y)} = \frac{\tilde{a}_x}{\tilde{a}_x + \tilde{a}_y} = \frac{\lambda a_x}{\lambda a_x + a_y} \quad (60)$$

с λ , определяемой формулой (55).

В рассматриваемой модели включения имеют нулевую площадь, так что $p = 1$ и уравнения (56) принимают вид

$$\frac{\sigma_{e\nu} - \sigma_{1\nu}}{\sigma_{e\nu} - (\sigma_{e\nu} - \sigma_{1\nu}) \tilde{n}^{(\nu)}} - 4\pi \lambda N \tilde{\Lambda}_\nu = 0, \quad (61)$$

$$\nu = x, y.$$

Здесь N — размерная концентрация включений (число царапин на единице площади); черта над $\tilde{\Lambda}_\nu$ означает в данном случае усреднение по ориентациям царапин. Распределение царапин в целом изотропно, так что в качестве «включения» первой компоненты следует взять круг, т. е. положить в формулах (58)–(60) $a_x = a_y = R$. В этом случае для коэффициентов деполяризации имеем

$$n^{(x)} = \frac{1}{1 + \lambda}, \quad n^{(y)} = \frac{\lambda}{1 + \lambda} \quad (62)$$

с λ , определяемой (55).

Для рассматриваемых «бестелесных», нулевой площади, включений дипольная поляризуемость отлична от нуля только для диэлектрических (или идеально проводящих) царапин; при этом тензор $\hat{\Lambda}$ зависит только от геометрических характеристик таких включений. Для непроводящей (индекс «d») царапины длины $2a$, составляющей угол φ с осью x , тензор дипольной поляризуемости имеет вид (см., например, Приложение к работе [9], где следует положить $\theta = \pi/2 - \varphi$)

$$\hat{\Lambda}_d = -\frac{a^2}{4} \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi & -(1/2) \sin 2\varphi \\ -(1/2) \sin 2\varphi & \cos^2 \varphi \end{pmatrix}. \quad (63)$$

Такой же вид имеет тензор $\hat{\Lambda}_d$ при заменах $a \rightarrow \tilde{a}$ и $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi}$. При преобразовании (54) царапина меняет как длину, так и угол наклона:

$$\tilde{a} = \frac{a}{\lambda} \sqrt{\sin^2 \varphi + \lambda^2 \cos^2 \varphi}, \quad \text{tg } \tilde{\varphi} = \frac{1}{\lambda} \text{tg } \varphi, \quad (64)$$

и тензор записывается как

$$\hat{\Lambda}_d = -\frac{a^2}{4\lambda^2} \times \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi & -(1/2) \lambda \sin 2\varphi \\ -(1/2) \lambda \sin 2\varphi & \lambda^2 \cos^2 \varphi \end{pmatrix}. \quad (65)$$

После усреднения по углам получаем

$$\hat{\Lambda}_d = -\frac{a^2}{8\lambda^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Для идеально проводящих (индекс «s») «царапин» для составляющих тензора $\widehat{\Lambda}_s$ имеем $\overline{\Lambda}_{xs} = -\overline{\Lambda}_{yd}$ и $\overline{\Lambda}_{ys} = -\overline{\Lambda}_{xd}$ [9].

Из уравнений (61) с использованием составляющих тензора поляризуемости (66) для безразмерных эффективных проводимостей $f_{\nu d} = \sigma_{e\nu}^{(d)}/\sigma_{1\nu}$ находим

$$f_{xd} = \frac{1 - g \lambda^{-1} n^{(x)}}{1 + g \lambda^{-1} n^{(y)}}, \quad f_{yd} = \frac{1 - g \lambda n^{(y)}}{1 + g \lambda n^{(x)}}, \quad (67)$$

где

$$g = \pi a^2 N / 2. \quad (68)$$

Система (67) должна быть дополнена уравнением для определения параметра λ :

$$\lambda^2 = \gamma^2 \frac{1 - g \lambda n^{(y)}}{1 + g \lambda n^{(x)}} \frac{1 + g \lambda^{-1} n^{(y)}}{1 - g \lambda^{-1} n^{(x)}}. \quad (69)$$

Здесь

$$\gamma = \sqrt{\frac{\sigma_{1y}}{\sigma_{1x}}} \quad (70)$$

— параметр, характеризующий анизотропию матрицы. Величина же λ , согласно определению (55), является параметром анизотропии композита как целого. Формулы (67) вместе с уравнением (69) и выражениями (62) для коэффициентов деполаризации дают решение поставленной задачи в рамках приближения метода ЕМА. В случае идеально проводящих «царапин» для соответствующих безразмерных проводимостей имеем $f_{xs} = 1/f_{yd}$ и $f_{ys} = 1/f_{xd}$ с f_{xd} и f_{yd} из формул (67).

Анализ системы уравнений (67)–(69) при произвольных значениях величин a, N и γ требует привлечения численных методов. Поэтому ограничимся рассмотрением некоторых предельных случаев.

1) При изотропной ($\gamma = 1$) матрице система в целом также изотропна, $\lambda = 1$ и $n^{(x)} = n^{(y)} = 1/2$, так что для безразмерной эффективной проводимости f_d получаем выражение

$$f_d = \frac{1 - \pi a^2 N / 4}{1 + \pi a^2 N / 4}. \quad (71)$$

Отсюда следует, что в рамках метода ЕМА эффективная проводимость рассматриваемой изотропной модели обращается в нуль при критической концентрации (пороге протекания)

$$N_c^{EMA} = \frac{4}{\pi a^2}. \quad (72)$$

В то же время компьютерный эксперимент [10] дает для этой модели результат

$$N_c \approx \frac{4.43}{\pi a^2}, \quad (73)$$

близкий к значению (72).

2) В пределе малых концентраций ($N \rightarrow 0$) имеем $\lambda \approx \gamma$, так что из (67) следуют выражения

$$f_{xd} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma} \pi a^2 N, \quad f_{yd} \approx 1 - \frac{\gamma}{2} \pi a^2 N. \quad (74)$$

Формулы (74) представляют собой линейное по концентрации N приближение и могут быть получены также из равенств типа (40), записанных в эквивалентном виде:

$$f_\nu = 1 + 4\pi\lambda N \overline{\Lambda}_\nu, \quad \nu = x, y. \quad (75)$$

Отсюда с учетом выражения для тензора дипольной поляризуемости (66) следуют формулы (74).

Заметим, что при сильной анизотропии матрицы ($\gamma \gg 1, \sigma_{1y} \gg \sigma_{1x}$) линейная по N поправка в проводимости f_{yd} велика. Это связано с тем, что при течении тока вдоль оси y за непроводящим включением с поперечным размером порядка a образуется область возмущенного потока длиной приблизительно равной γa , а не a , как в изотропном случае. Вся эта область играет роль непроводящего включения, так что ее вклад в сопротивление в γ раз больше, чем в изотропной среде. Поэтому линейное по N приближение для проводимости f_{yd} применимо только при ультрамалых концентрациях: $Na^2 \ll \gamma^{-1} \ll 1$. В то же время при обтекании такого препятствия вдоль оси x наличие большой проводимости матрицы в поперечном направлении приводит к крайне малой области возмущенного потока ($\sim a/\gamma \ll a$). Поэтому линейная по N поправка в величине f_{xd} мала и $f_{xd} \approx 1$ при всех $Na^2 \ll 1$ и $\gamma \gg 1$.

3) В случае малой концентрации ($Na^2 \ll 1$) царапин и сильной анизотропии ($\gamma \gg 1$) матрицы согласно предыдущему случаю $f_{xd} \approx 1$. При этом, как будет видно из дальнейшего, анизотропия системы в целом велика ($\lambda \gg 1$), так что $n^{(x)} \approx 1/\lambda \ll 1, n^{(y)} \approx 1$. Поэтому выражение для f_{yd} из (67) принимает вид

$$f_{yd} = 1 - g \lambda. \quad (76)$$

Поскольку $\lambda \approx \gamma \sqrt{f_{yd}}$, равенство (76) является квадратным уравнением для $\sqrt{f_{yd}}$, откуда находим

$$f_{yd} = \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\pi\gamma Na^2}{4} \right)^2} - \frac{\pi\gamma Na^2}{4} \right]^2. \quad (77)$$

При $Na^2 \ll 1/\gamma$ в линейном по N приближении из (77) для f_{yd} следует выражение из (74). В противоположном предельном случае (при промежуточных концентрациях)

$$\gamma^{-1} \ll Na^2 \ll 1: \quad f_{yd} \approx \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{(\gamma Na^2)^2}. \quad (78)$$

В этом пределе безразмерная проводимость f_{yd} мала, а анизотропия системы в целом велика:

$$\lambda \approx \gamma \sqrt{f_{yd}} \sim \frac{1}{Na^2} \gg 1.$$

4) При случайном распределении центров царапин и их хаотической ориентации возникающий при критической концентрации N_c бесконечный кластер изотропен. Следовательно, при $N = N_c$ прекращается протекание во всех направлениях, так что f_{xd} и f_{yd} обращаются в нуль одновременно. Положив $f_{xd} = 0$ и $f_{yd} = 0$ в (67), получим два равенства

$$g \lambda^{-1} n^{(x)} = 1, \quad g \lambda n^{(y)} = 1. \quad (79)$$

Каждое из этих уравнений разрешаем относительно величины g . Поскольку порог протекания один, эти выражения для g должны совпадать, что дает уравнение для определения параметра λ в точке фазового перехода металл–диэлектрик. Решением этого уравнения является ($N = N_c$)

$$\lambda_c = 1, \quad (80)$$

так что $\sigma_{ex}/\sigma_{ey} \rightarrow 1$ при $N \rightarrow N_c$. Подстановка (80) в (79) позволяет найти критическое значение величины g :

$$g_c = 2, \quad (81)$$

откуда для порога протекания, как и в изотропном случае, следует выражение (72). Этот вывод вполне ожидаем, так как величина порога протекания определяется распределением непроводящих включений и не должна зависеть от типа проводимости матрицы — изотропной или анизотропной.

Для того чтобы найти поведение проводимостей f_{xd} и f_{yd} при приближении к порогу протекания, положим в уравнении (69)

$$\lambda = 1 + \delta\lambda, \quad g = 2 + \delta g, \quad (82)$$

где

$$\delta g = -2 \frac{N_c - N}{N_c} \quad (83)$$

и $\delta\lambda \rightarrow 0$ при $N \rightarrow N_c - 0$. В результате из формулы (69) находим

$$\delta\lambda = \frac{1}{3} \frac{1 - \gamma^2}{1 + \gamma^2} \delta g. \quad (84)$$

Подстановка (82) и (84) в (67) дает

$$f_{xd} = \frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2} \frac{N_c - N}{N_c}, \quad f_{yd} = \frac{1}{1 + \gamma^2} \frac{N_c - N}{N_c}, \quad (85)$$

где $\gamma^2 = \sigma_{1y}/\sigma_{1x}$. Из (85) находим

$$N \rightarrow N_c - 0: \quad \sigma_{ex}^{(d)} = \sigma_{ey}^{(d)} = \frac{\sigma_{1x}\sigma_{1y}}{\sigma_{1x} + \sigma_{1y}} \frac{N_c - N}{N_c}. \quad (86)$$

В случае $\sigma_{1y} \gg \sigma_{1x}$ имеем

$$\sigma_{ex}^{(d)} = \sigma_{ey}^{(d)} = \sigma_{1x} \frac{N_c - N}{N_c}. \quad (87)$$

Таким образом, согласно (86), (87), в методе ЕМА даже исходно сильно анизотропная среда при приближении к точке фазового перехода металл–диэлектрик практически полностью изотропизуется. При этом проводимость системы в целом определяется наименьшей из составляющих тензора $\hat{\sigma}_1$.

Заметим, что вывод об изотропизации эффективной проводимости выходит за рамки рассмотренной с помощью приближенного метода двумерной модели и справедлив, по-видимому, для всех композитов с естественной анизотропией при геометрически (структурно) изотропном распределении компонент [5, 6].

Отметим также, что в методе ЕМА проводимость композита при приближении к порогу протекания обращается в нуль по линейному закону $\sigma_{ex} \approx \sigma_{ey} \propto (N_c - N)$. Однако в действительности эта зависимость, вообще говоря, нелинейна. Следует ожидать, что, как и в изотропном случае, величины σ_{ex} и σ_{ey} при $N \rightarrow N_c - 0$ убывают степенным образом:

$$\sigma_{ex}^{(d)} \approx \sigma_{ey}^{(d)} \propto (N_c - N)^t \quad (88)$$

с критическим индексом t . Зависимость же проводимости от концентрации определяется, прежде всего, чисто геометрическим фактором — топологией бесконечного кластера [11]. Поэтому величина этого индекса, по-видимому, такая же, как и для изотропных композитов той же размерности пространства [5, 6].

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Landauer, J. Appl. Phys. **23**, 779 (1952).
2. S. Kirkpatrick, Rev. Mod. Phys. **45**, 574 (1973).
3. J. Bernasconi, Phys. Rev. B **9**, 4575 (1974).
4. Б. Я. Балагуров, ФТТ **27**, 2375 (1985).
5. Б. И. Шкловский, Письма в ЖТФ **7**, 1312 (1981).
6. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **82**, 2053 (1982).
7. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **140**, 976 (2011).
8. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **139**, 378 (2011).
9. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **137**, 301 (2010).
10. Jiantong Li and Shi-Li Zhang, Phys. Rev. E **80**, 040104 (2009).
11. Б. И. Шкловский, А. Л. Эфрос, УФН **117**, 401 (1975).