ЖЭТФ, 2014, том 145, вып. 6, стр. 1048–1060 © 2014

РЕГУЛЯРНАЯ И ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ДИПОЛЬНОГО МОМЕНТА КВАДРАТНЫХ МАССИВОВ ДИПОЛЕЙ

А. М. Шутый[*]

Ульяновский государственный университет
432970, Ульяновск, Россия

Поступила в редакцию 24 декабря 2013 г.

Исследованы дипольные решетки, представляющие собой квадратные массивы диполей. Получены разные типы равновесной конфигурации массивов и показаны условия их установления. На основе параметрических бифуркационных диаграмм рассмотрены основные виды регулярных и хаотических колебательных режимов суммарного дипольного момента систем; исследована их зависимость от амплитуды, частоты и поляризации переменного поля, а также от исходной равновесной конфигурации массивов. Показаны сценарии возникновения хаотических режимов, в том числе через установление и изменение квазипериодических колебаний дипольного момента системы. Выявлено состояние динамической бистабильности, при котором может быть реализован стохастический резонанс — рост отклика системы на воздействие гармонического сигнала при наличии шума.

DOI: 10.7868/S0044451014060093

1. ВВЕДЕНИЕ

Интерес к самоорганизующимся системам, в том числе к ансамблям наночастиц, приобрел особое значение в связи с достижениями в области информационных технологий и наноструктур. Ансамбли однодоменных частиц являются также удобными объектами для изучения фазовых переходов и других коллективных эффектов вследствие возможности эффективного управления их состоянием. В последние годы ведется систематическое изучение и внедрение в практику создаваемых нанотехнологиями [1] дипольных, в частности магнитных, сверхструктур. Среди них особый интерес представляют двумерные сверхструктуры в виде квадратных решеток наночастиц с формой, близкой к круговой [2]. Упорядоченные структуры ферромагнитных наночастиц можно сформировать методом нанолитографии [3], используя в качестве диполей состоящие из атомов железа наночастицы, которые имеют размер около 10 нм (число атомов ~ 100, что обеспечивает их сферическую форму) и магнитный момент $3\mu_B$ [4]. Уже сейчас разброс наночастиц по размерам при соответствующем контроле может быть меньше 5 % [5]. Дипольный момент наночастиц можно считать классической величиной, и в случае однодоменного состояния основной вклад при взаимодействии наночастиц вносит диполь-дипольное взаимодействие [3, 6]. Накопители информации, изготовленные на основе массивов из магнитных диполей, являются одним из наиболее перспективных видов запоминающих устройств.

В связи с этим большое значение приобретают также исследования влияния на дипольные решетки статических и переменных полей, выявление нелинейных регулярных и хаотических режимов, что представляет интерес, связанный не только с практическим применением, но также с общими вопросами нелинейной динамики. При широко проводимых в настоящее время исследованиях хаотических эффектов [7–9] актуальным является как выявление условий генерации или подавления хаоса, так и изучение влияния стохастических сигналов на динамические режимы. Это связано, в частности, с рядом эффектов, обусловленных влиянием шума [7]. К одному из таких эффектов относится стохастический резонанс, обнаруженный в системах различной природы и проявляемый в усилении отклика системы на воздействие регулярного сигнала при наличии шума [10–12]. При исследовании нелинейной динамики во многих случаях важным является нахождение состояний бистабильности [7, 8, 13], так как в них

[*]E-mail: shuty@mail.ru

система оказывается неустойчивой по отношению к дополнительным возмущениям.

В настоящей работе при предварительном рассмотрении различных типов равновесных конфигураций квадратных массивов диполей и способов их установления исследуются нелинейные колебательные режимы суммарного дипольного момента систем под воздействием внешнего переменного поля. Выявлены основные особенности регулярных и хаотических колебаний, обусловленные как параметрами внешнего поля — его частотой, амплитудой и поляризацией, — так и исходной равновесной конфигурацией массивов. Для анализа переходов между колебательными режимами при изменении параметров поля построены бифуркационные диаграммы. Приведены сценарии возникновения хаотических колебаний, в частности при трансформации аттракторов квазипериодических режимов. Показана возможность реализации стохастического резонанса в условиях состояния динамической бистабильности дипольного момента системы.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

При рассмотрении системы диполей полагаем, что они связаны диполь-дипольным взаимодействием и каждый из них может поворачиваться вокруг центра симметрии. Положение диполей в системе принимается неизменным, а тела с дипольными моментами — однородными и шарообразными [14]. Динамические уравнения для системы диполей имеют вид [15–17]

$$J_i \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt} + \alpha_i \boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{p}_i \times \mathbf{F}_i, \qquad \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_i, \tag{1}$$

где $\mathbf{p}_i$ и $\boldsymbol{\omega}_i = d\boldsymbol{\varphi}_i/dt$ — дипольный момент и угловая скорость i-го диполя (φ_{ij} — угол поворота диполя вокруг оси $j = x, y, z$), J_i — момент инерции, α_i — параметр диссипации. Поле, создаваемое в месте расположения i-го диполя остальными диполями и внешним полем $\mathbf{f}$, определяется выражением

$$\mathbf{F}_i = \sum_{n \neq i} \left[\frac{3\mathbf{e}_{in}(\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{e}_{in}) - \mathbf{p}_n}{a^3 l_{in}^3} \right] + \mathbf{f}, \tag{2}$$

где $\mathbf{e}_{in} = \mathbf{r}_{in}/r_{in}$ — единичные векторы вдоль направления, $\mathbf{r}_{in}$ — вектор между расположениями i-го и n-го диполей, $l_{in} = r_{in}/a$ — расстояние, нормированное на характерный параметр системы a. В рассматриваемых массивах, представляющих собой квадратные решетки, a — расстояние между ближайшими диполями в ряде. Составляющие массив диполи принимаются идентичными: $|\mathbf{p}_i| = p$, $J_i = J$, $\alpha_i = \alpha$. Далее перейдем к безразмерным параметрам [15]:

$$\rho_{ij} = \frac{p_{ij}}{p}, \quad \beta = \frac{\alpha}{\nu J}, \quad \boldsymbol{\omega}_i = \frac{d\boldsymbol{\varphi}_i}{d\tau}, \tag{3}$$

где $\nu = \sqrt{p^2/Ja^3}$ и дифференцирование проводится по безразмерному времени $\tau = \nu t$. Компоненты внешнего поля преобразуются к виду $\phi_j = f_j a^3/p$. В случае решеток, формируемых частицами с магнитным дипольным моментом, в уравнениях (1), (2) $\mathbf{F}_i$ и $\mathbf{f}$ являются напряженностями магнитных полей; в случае решеток электрических диполей в выражения входят соответственно напряженности электрических полей.

3. РАВНОВЕСНЫЕ СОСТОЯНИЯ КВАДРАТНЫХ МАССИВОВ ДИПОЛЕЙ

Численный анализ показывает, что после ориентации диполей квадратных массивов вдоль внешнего поля при последующем выключении поля устанавливается, в зависимости от величины массива, один из двух типов равновесной конфигурации дипольных моментов. На рис. 1*а* приведена равновесная конфигурация массивов 5×5 и 7×7 после выключения поля, ориентированного вдоль оси y, совпадающей с одной из сторон массива (ось x является нормалью к плоскости, в которой расположен массив). Для данных массивов, а также для других массивов с нечетным числом диполей более 9 (для массивов 9×9, 11×11 и т. д., расчеты проводились до систем 17×17) равновесная конфигурация оказывается зеркально-симметричной относительно диагонали массива, при этом ориентация дипольных моментов в центральных областях таких систем имеет «седлообразный» вид. Далее указанную равновесную конфигурацию будем называть симметричной.

На рис. 1*б,в* приведены две равновесные конфигурации массивов 6×6 и 8×8, характерные и для бóльших массивов с четным числом диполей более 16 (для массивов 10×10, $12 \times 12, \ldots$). При этом после выключения внешнего поля устанавливается только конфигурация *б*, называемая далее несимметричной, когда присутствует центральная область, в которой направление дипольных моментов мало меняется относительно направления ранее приложенного внешнего поля и противоположного ему направления. Конфигурация же *в*, подобная равновесной кон-

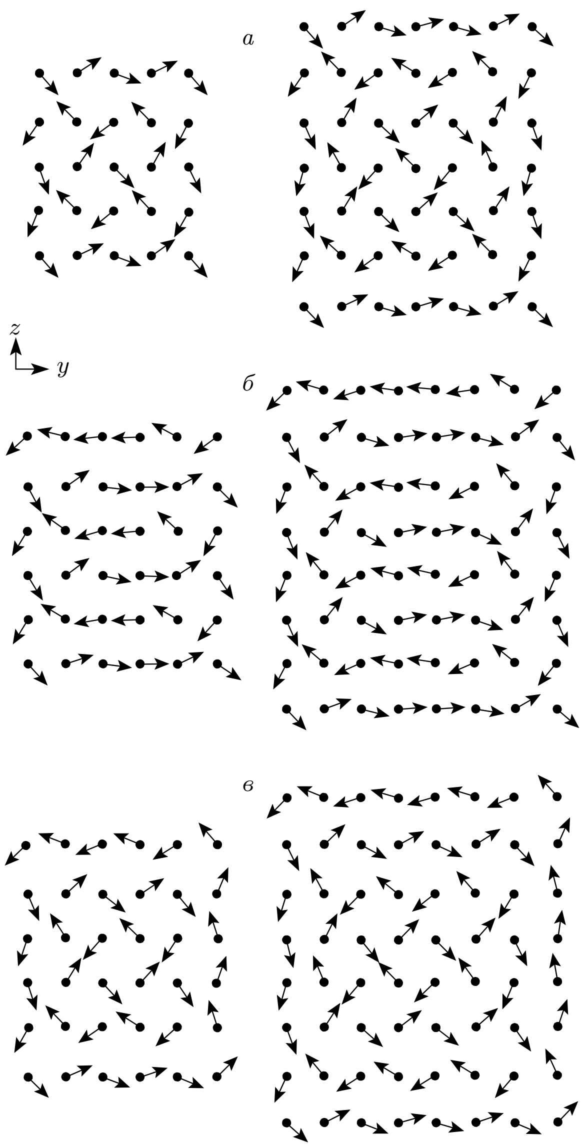

Рис. 1. Симметричная (*а*,*в*) и несимметричная (*б*) равновесные конфигурации квадратных массивов диполей

фигурации массивов 5×5 и 7×7 и имеющая ось симметрии четвертого порядка, не может быть установлена с помощью внешнего статического поля. Суммарный дипольный момент системы $\mathbf{P} = \sum \boldsymbol{\rho}_i$, в таком состоянии равен нулю в отличие от конфигурации *б*. Для установления данной равновесной конфигурации, также далее именуемой симметричной, требуется предварительное возбуждение определенных динамических режимов дипольного момента системы и последующее их выключение (о чем будет сказано ниже).

Объяснение того, что массивы с четным числом диполей могут иметь несимметричную равновесную конфигурацию (рис. 1*б*), а с нечетным числом диполей — только симметричную (рис. 1*в*), может заключаться в следующем. При четном числе диполей оказывается возможным разбиение массива на пары рядов с диполями, ориентированными по ранее приложенному полю, и противоположно ориентированными диполями. В случае же нечетного числа диполей при разбиении на пары рядов один ряд оказывается «лишним», что и приводит к изменению всей конфигурации системы по симметричному типу. Однако заметим, что несимметричная конфигурация обнаружена также в массиве 13×13. Исключение, кроме того, составляют массивы 3×3 и 4×4, так как являются слишком малыми для формирования характерных элементов соответствующих конфигураций; в результате система 3×3, как правило, имеет конфигурацию, близкую к несимметричной, а система 4×4 имеет только симметричную конфигурацию. В случае больших массивов — более 17×17 — наблюдаются нарушения симметрии равновесных конфигураций, связанные с возникновением доменов.

Численный анализ проводился методом Рунге–Кутта четвертого порядка, записанным для системы $6N$ уравнений, где N — число диполей в массиве. Как показали расчеты для различных систем с диполь-дипольным взаимодействием, при численном анализе недостаточно учитывать связь каждого диполя только с ближайшими его соседями. В данных исследованиях рассчитывалась система уравнений, в которой состояние каждого диполя определяется его взаимодействием со всеми диполями массива. Для полученных равновесных конфигураций массивов были также проведены исследования величины энергии диполь-дипольного взаимодействия, которые показали, что любое изменение ориентации диполей (в том числе в направлении нормали к плоскости массивов) в данных конфигурациях приводит к ее увеличению, что подтверждает устойчивое равновесие полученных ориентационных состояний.

4. РЕГУЛЯРНЫЕ И ХАОТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ДИПОЛЬНОГО МОМЕНТА

В случае возбуждения системы диполей линейно поляризованным переменным полем $\mathbf{f}_0\sin(\tilde{\omega}t)$ реализуются различные динамические состояния. Рассмотрим динамику дипольного момента массивов на примере систем 5×5 и 6×6 (колебательные режимы других массивов являются подобными). Анализ ре-

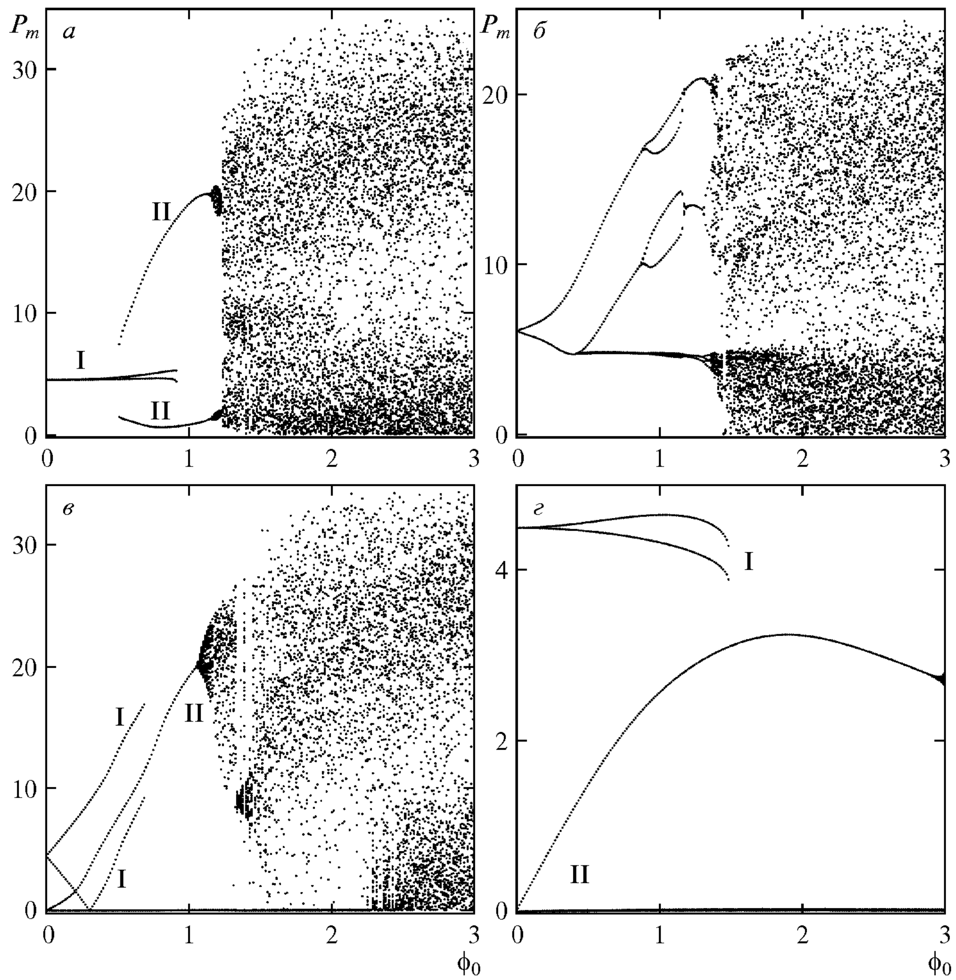

Рис. 2. Диаграммы зависимости экстремумов $P_m = P_{max}, P_{min}$ суммарного дипольного момента систем 6×6 (a,$в$,$г$) и 5×5 ($б$) от амплитуды переменного поля при частоте $\Omega = 1$ (a–$в$), 3 ($г$) и угле поляризации $\psi = 0$ (a,$г$), $\pi/2$ ($б$,$в$); параметр диссипации $\beta = 1$

жимов суммарного дипольного момента удобно проводить с помощью параметрических бифуркационных диаграмм [8]. На рис. 2 приведены диаграммы для суммарного дипольного момента $\mathbf{P}$ систем 6×6 (*а*,*в*,*г*) и 5×5 (*б*) на плоскости $(P_m; \phi_0)$, где $P_m = P_{max}, P_{min}$, и каждому нормированному значению амплитуды поля $\phi_0 = f_0 a^3/p$ соответствуют экстремальные значения суммарного дипольного момента. Поляризация поля ориентирована вдоль оси y, т. е. отсчитываемый от данной оси угол поляризации $\psi = 0$ (*а*,*г*), и вдоль оси z, т. е. $\psi = \pi/2$ (*б*,*в*). Диаграммы рассчитаны при нормированной частоте переменного поля $\Omega = \tilde{\omega}/\nu = 1$ (*а*–*в*) и $\Omega = 3$ (*г*); параметр диссипации $\beta = 1$(здесь и ниже). При этом, если на диаграмме одному значению управляющего параметра ϕ_0 отвечают две точки ветви (или большее конечное их число), то реализуются регулярные колебательные режимы; множеству близко расположенных точек отвечает хаотическая (в редких случаях квазипериодическая) динамика. Кроме того, имеет место также динамическая бистабильность, когда при одних и тех же параметрах системы и внешних полей могут реализоваться различные динамические режимы. На установление того или иного динамического режима при этом влияют флуктуации параметров или же исходное состояние системы. На бифуркационной диаграмме различные, входящие в бистабильность колебательные режимы составляют разные ветви, которые на представленных диаграммах рис. 2 обозначены цифрами I и II (т. е. в зависимости от флуктуаций или начальных параметров реализуются колебания, к которым относятся точки диаграммы на ветви I или точки на ветви II, но не те и другие одновременно).

Из приведенных диаграмм видно, что при достаточно малых полях (и на малых частотах), как правило, устанавливаются регулярные колебания; в случае же относительно больших амплитуд переменного поля имеют место хаотические колебания. Характер колебательных режимов зависит от равновесной конфигурации системы и поляризации внешнего поля. Трудно описать все разнообразие устанавливаемых колебаний в данных системах, кратко приведем лишь основные характеристики в случаях, охватываемых представленными диаграммами. В отличие от колебания дипольного момента системы 5×5 (рис. 2*б*), совершаемых в плоскости yz, колебания дипольного момента системы 6×6 происходят преимущественно вдоль одной из осей. В частности, при поляризации поля вдоль оси y (рис. 2*а*) для систем 6×6 z-составляющая регулярных колебаний мала относительно y-составляющей, а для ветви I регулярные колебания происходят только вдоль оси y. При этом хаотические режимы затрагивают оба направления колебаний, т. е. реализуются в плоскости yz. В случае же поляризации поля вдоль оси z (рис. 2*в*) для систем 6×6 как регулярные, так и хаотические колебания суммарного дипольного момента линейно поляризованы и совершаются только вдоль оси z. Диаграмма на рис. 2*г* отвечает большему значению частоты переменного поля ($\Omega = 3$), поэтому при данных значениях амплитуды ϕ_0 имеют место только регулярные режимы (хаотические колебания наступают при больших ϕ_0). Колебания в данном случае происходят преимущественно вдоль оси y: колебания, относящиеся к ветви II, совсем не имеют z-составляющей, а колебания ветви I совершаются главным образом вдоль оси y при малой амплитуде изменения модуля суммарного дипольного момента ($\Delta P_y \approx 2$ при $\Delta P < 0.1$).

При рассмотрении бифуркационных диаграмм, относящихся к системе 6×6, важно обратить внимание на следующее. Ветви колебательных режимов II при стремлении амплитуды переменного поля к нулю приближаются к нулевому значению суммарного дипольного момента P; ветви же I при $\phi_0 \to 0$ имеют ненулевое значение $P \approx 4.5$. Это говорит о том, что в первом случае конфигурация системы близка к симметричной равновесной конфигурации, отвечающей рис. 1*в*, а во втором случае — к конфигурации, отвечающей рис. 1*б*. Отсюда мы имеем следующий способ перехода от несимметричной равновесной конфигурации (рис. 1*б*) (устанавливающейся после выключения однородного ориентирующего поля) к симметричной равновесной конфигурации (рис. 1*в*). Возбуждая слабым переменным полем колебательный режим при исходной несимметричной равновесной конфигурации, мы оказываемся на ветви I бифуркационной диаграммы; далее, увеличивая амплитуду переменного поля, мы приходим к бифуркации, при которой режимы ветви I становятся неустойчивыми, и динамика дипольного момента переходит к режимам ветви II (см., в частности, рис. 2*г*); после чего с уменьшением и выключением переменного поля система переходит в симметричную равновесную конфигурацию (рис. 1*в*). Заметим, что на диаграмме рис. 2*а* имеет место случай, когда неустойчивой при определенных значениях ϕ_0 становится как ветвь I, так и ветвь II. Таким образом, реализуется не только динамический переход от несимметричной равновесной конфигурации к симметричной, но и обратный динамический переход — от состояния на рис. 1*в* к состоянию на рис. 1*б*.

Здесь необходимо подчеркнуть, что в случае системы 5×5, а также системы 6×6 при исходной равновесной конфигурации изменение поляризации переменного поля на ортогональное не меняет устанавливаемых колебательных режимов, за исключением их ориентации. В случае же системы 6×6 при исходной несимметричной конфигурации различно поляризованные переменные поля, как правило, приводят к разным колебательным режимам. Приведенные бифуркационные диаграммы для системы 6×6 были получены при несимметричной исходной конфигурации, за исключением области пересечения ветвей I и II (ветвь II в данной области достраивалась дополнительно при симметричной равновесной конфигурации).

На рис. 3 приведены диаграммы для суммарного дипольного момента $\mathbf{P}$ систем 5×5 и 6×6 на плоскости (P_m, Ω). Амплитуда переменного поля $\phi_0 = 2$, а его поляризация вдоль оси z (*а,в*) или вдоль оси y (*б*). В случае системы 5×5 колебания дипольного момента совершаются преимущественно вдоль оси z, имея в ряде областей (главным образом, в области хаотических режимов) небольшую составляющую по оси y. То же, только с поворотом ориентаций, имеет место для системы 6×6 при поляризации поля вдоль оси y (рис. 3*б*), т. е. z-составляющая колебаний величины P в некоторых областях частоты Ω мала по сравнению с y-составляющей, а в некоторых областях отсутствует (последнее для выбранных параметров имеет место вблизи значения $\Omega = 3$). В случае же поляризации поля вдоль оси z колебания дипольного момента системы 6×6 (рис. 3*в*) совершаются только вдоль оси z — линейно поляризованные

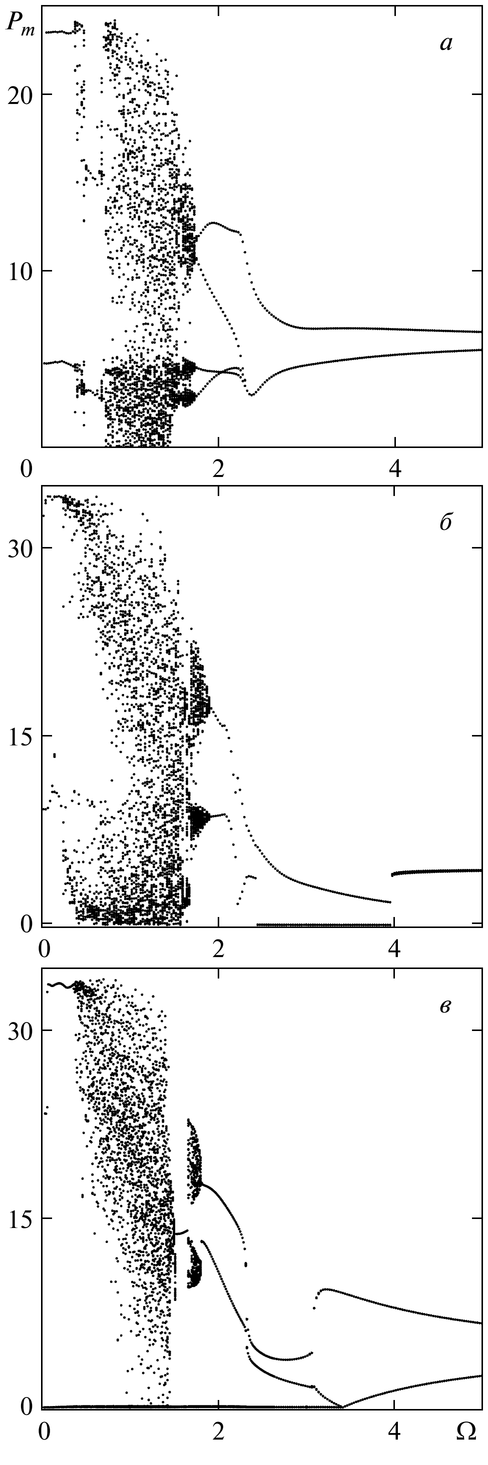

Рис. 3. Диаграммы зависимости экстремумов суммарного дипольного момента систем 5×5 (a) и 6×6 ($б,в$) от частоты внешнего поля при его амплитуде $\phi_0 = 2$ и угле поляризации $\psi = \pi/2$ ($a,в$), 0 ($б$)

колебания.

На рис. 3*б* обращает на себя внимание бифуркация, возникающая при $\Omega \approx 4$: слева (при меньших частотах) от данной бифуркации величина P совершает колебания относительно нулевого значения, а справа имеет место постоянная составляющая $P \approx 4.5$. Отсюда следует, что в первом случае (при частотах $\Omega < 4$) выключение переменного поля приведет систему 6×6 к симметричной равновесной конфигурации (рис. 1*в*), а во втором случае (при колебательных режимах справа от указанной бифуркации) выключение поля приведет систему к несимметричной равновесной конфигурации (рис. 1*б*).

Из рис. 3 также видно, что при малых частотах переменного поля ($\Omega < 0.2$–0.3) для обеих систем характерными являются регулярные высокоамплитудные колебания величины суммарного дипольного момента массива (амплитуда колебаний ΔP близка к максимальной величине суммарного дипольного момента системы $P = N$, где N — число диполей в массиве). При бо́льших частотах (0.2–$0.3 < \Omega < 1.5$–2.0) возникают хаотические колебания дипольного момента. При дальнейшем увеличении частоты поля устанавливаются регулярные колебания с амплитудой, на порядок меньшей максимальной величины дипольного момента массива, причем с ростом частоты поля амплитуда колебаний уменьшается.

Рассмотрим траектории некоторых из устанавливаемых динамических режимов. На рис. 4 приведены траектории стационарных регулярных режимов дипольного момента систем 5×5 и 6×6 при амплитуде поля $\phi_0 = 2$ и различных значениях его частоты Ω; угол поляризации поля: $\psi = \pi/2$ (a), т. е. по оси z, $\psi = \pi/4$ ($б$ — кривые *1* и *2*), $\psi = 3\pi/4$ ($б$ — кривая *3*), $\psi = 0$ ($в$), т. е. по оси y, $\psi = 0, \pi/2, \pi/4, 3\pi/4, \pi/8$ ($г$ — кривые *1*–*5*). Для систем 6×6 в случае рис. 4*в* исходной являлась несимметричная равновесная конфигурация (рис. 1*б*), а в случае рис. 4*г* — симметричная конфигурация (рис. 1*в*). Из приведенного рис. 4 видно, что для обоих массивов траектория высокоамплитудных колебаний, устанавливаемых при $\Omega < 0.3$, имеет форму, близкую к серповидной, которая симметрична относительно оси, ортогональной направлению поляризации переменного поля. С ростом частоты поля амплитуда колебательных режимов уменьшается. В случае массива 5×5 при поляризации поля вдоль диагоналей системы колебательные режимы или оказываются линейно поляризованными (рис. 4*б* — кривая *3*), или имеют траекторию близкую к вытянутому эллипсу (кривые *1* и *2*); для массивов с бо́льшим числом диполей

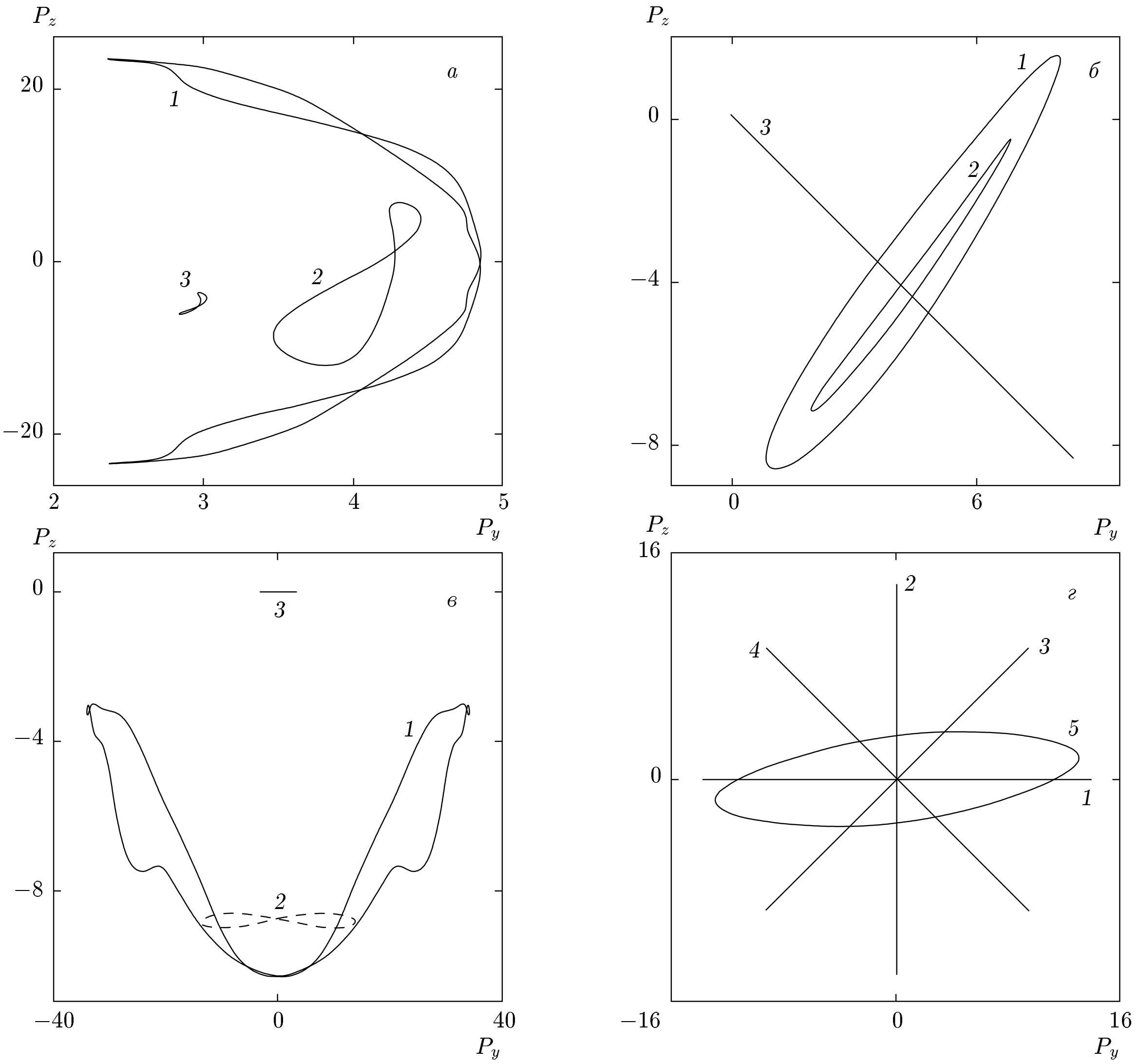

Рис. 4. Траектории регулярных режимов дипольного момента систем 5×5 (*а,б*) и 6×6 (*в,г*) при $\phi_0=2$ на частоте $\Omega=0.2$, 2.0, 3.0 (*а,в* — кривые *1–3*), 2.5 (*б — 1, 3*), 3.0 (*б — 2*), 2.0 (*г*); угол поляризации $\psi=\pi/2$ (*а*), $\pi/4$ (*б — 1, 2*), $3\pi/4$ (*б — 3*), 0 (*в*; *г — 1*), $\pi/2$ (*г — 2*), $\pi/4$ (*г — 3*), $3\pi/4$ (*г — 4*), $\pi/8$ (*г — 5*); для систем 6×6 исходными являются несимметричная (*в*) и симметричная (*г*) конфигурации

(7×7, 9×9 и т. д.) характерными при этом являются эллиптические траектории. В случае массива 6×6 с исходной симметричной равновесной конфигурацией (рис. 4*г*) колебательные режимы линейно поляризованы в направлении поляризации переменного поля при ориентации последнего как вдоль сторон массива, так и вдоль его диагоналей; при другой поляризации поля траектории колебаний дипольного момента становятся эллиптическими.

Колебания дипольного момента массива 6×6 с исходной несимметричной равновесной конфигурацией при поляризации поля вдоль оси z (ортогональной той, вдоль которой было направлено стационарное поле для установления данной конфигурации) как в случае регулярных, так и в случае хаотических режимов являются линейно поляризованными вдоль этой же оси. На рис. 5 для данного случая приведены зависимости от времени величины суммарного дипольного момента при установившихся (отсчет времени поставлен условно) регулярных и хаотических колебательных режимах под воздействием переменного поля с $\phi_0=2$ на различных частотах Ω. Видно, что регулярные колебания близки к гармоническим, и в наибольшей степени это спра-

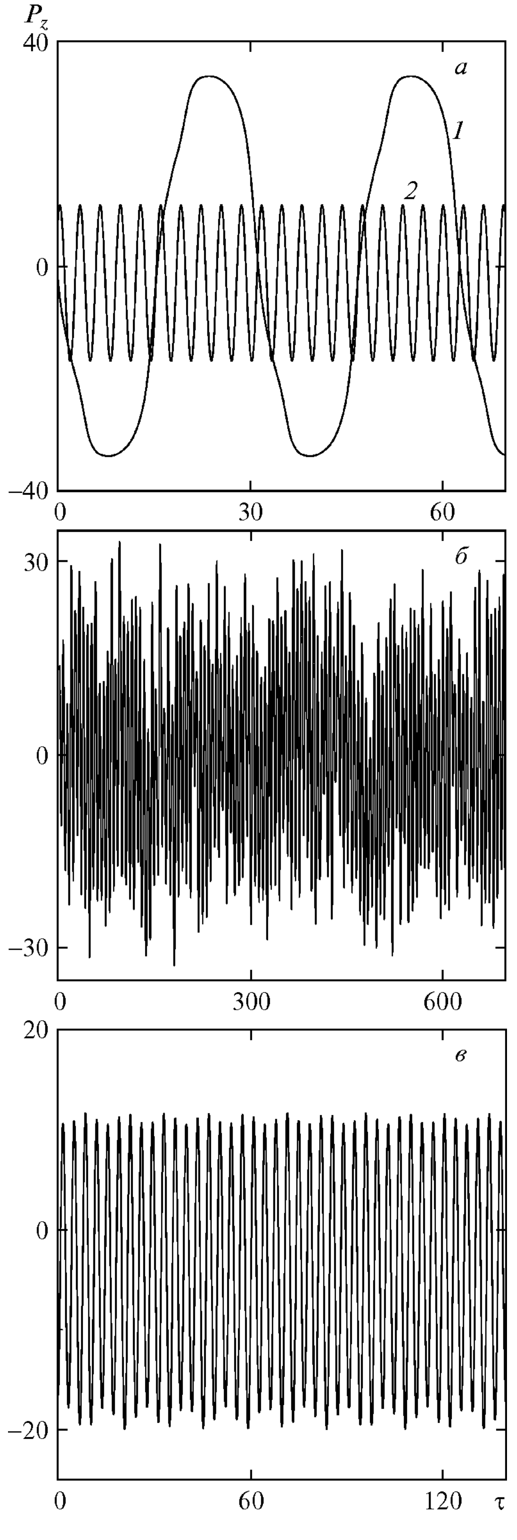

Рис. 5. Зависимости от времени величины суммарного дипольного момента при регулярных (*а*) и хаотических (*б,в*) колебательных режимах под воздействием поля с $\phi_0 = 2$ на частотах $\Omega = 0.2$ (*а* — кривая *1*), 2.0 (*а* — кривая *2*), 0.1 (*б*), 1.8 (*в*)

ведливо для режимов на больших частотах. Хаотические колебания также могут быть близки к гармоническим, с добавлением слабой зашумленности, которая в небольшом интервале варьирует амплитуду колебаний (рис. 5*в*). Однако, как видно из приведенных выше бифуркационных диаграмм (рис. 2 и рис. 3), наиболее характерными, отвечающими большим интервалам значений управляющих параметров, являются режимы с сильной хаотичностью, когда амплитуда колебаний может быть произвольной (в пределах $0 < P \leq N$).

На рис. 6 показано развитие хаотичности — увеличение зашумленности колебаний величины дипольного момента, — возникающее при понижении частоты переменного поля, на примере аттракторов хаотических режимов для систем 5×5 при $\psi = \pi/2$, $\phi_0 = 2$ и различных значениях Ω. Аттрактор (рис. 6*а*) мало отличается от аттрактора регулярного режима — слабая хаотизация, незначительно влияя на амплитуду колебаний, привела лишь к некоторому его размыванию. С уменьшением поля аттрактор расширяется (рис. 6*б*) и режим становится более хаотичным. Далее наблюдается «сборка» странного аттрактора в узкий (со слабой хаотичностью) аттрактор сложных по траектории колебаний с периодом, значительно превосходящим период внешнего переменного поля (рис. 6*в*). Дальнейшее уменьшение частоты приводит к расширению аттрактора и установлению колебательного режима с сильной хаотичностью (рис. 6*г*).

Хаотическим колебаниям могут предшествовать (в плане изменения управляющего параметра) также квазипериодические режимы [7]. На рис. 7 для массива 6×6 представлен переход квазипериодических колебаний к хаотической динамике при уменьшении частоты внешнего поля Ω с амплитудой $\phi_0 = 2$ при угле поляризации $\psi = 0$ и несимметричной исходной конфигурации системы. Узкий аттрактор (рис. 7*а*) квазипериодического режима расширяется (рис. 7*б*) с уменьшением частоты, далее он снова становится достаточно узким, но более сложным по траектории (рис. 7*в*). Заметим, что подобные преобразования аттрактора — расширение и последующее его сужение при одновременном усложнении траектории — с дальнейшим изменением параметра происходят неоднократно. Далее аттрактор квазипериодического режима (рис. 7*г*) переходит в узкий аттрактор (рис. 7*д*). Затруднительно сказать, является ли режим с данным аттрактором (рис. 7*д*) квазипериодическим или хаотическим (со слабым шумом), однако видно, что должен иметь место аналогичный режим с симметричным (относительно вер-

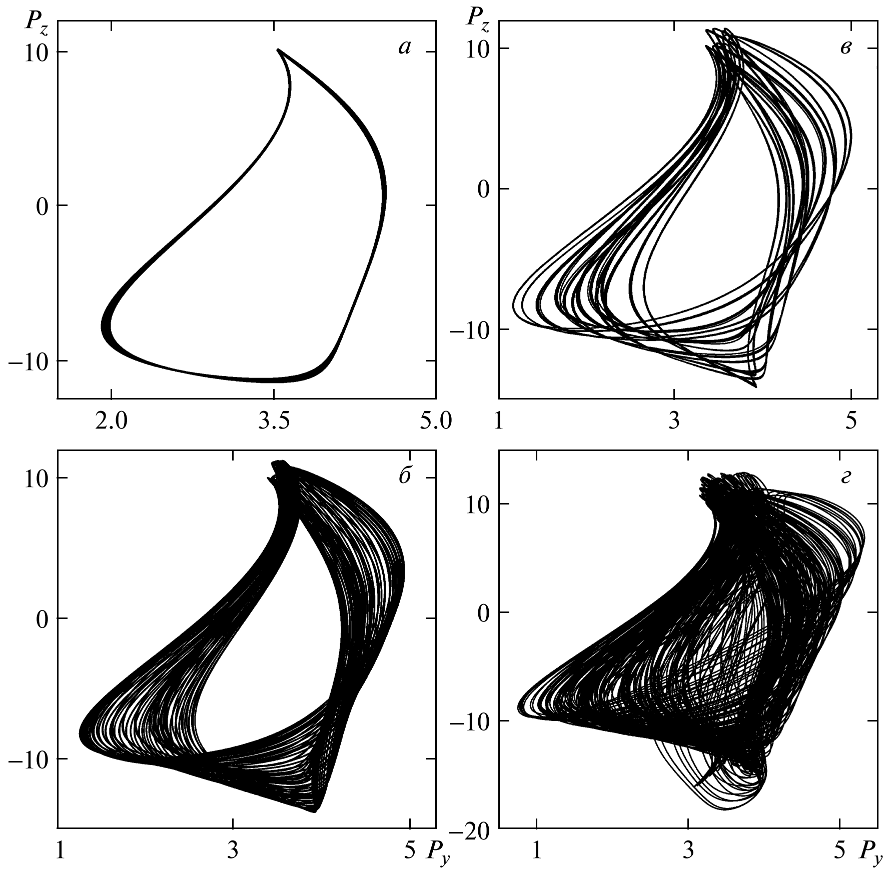

Рис. 6. Развитие хаотичности при понижении частоты поля: аттракторы режимов для систем 5×5; $\psi = \pi/2$, $\phi_0 = 2$, $\Omega = 1.75$ (*а*), 1.71 (*б*), 1.70 (*в*), 1.65 (*г*)

тикальной оси) аттрактором; т. е. возникает состояние динамической бистабильности — устанавливается один из двух симметричных по траектории режимов. При дальнейшем уменьшении частоты, очевидно, происходит «слияние» двух указанных симметричных аттракторов в один странный аттрактор, отвечающий режиму с развитой хаотичностью. Таким образом, видно, что уже незначительное изменение частоты внешнего поля (в представленных случаях $\Delta\Omega = 0.1$) может приводить слабо хаотические режимы к режиму сильного хаоса в динамике дипольного момента систем, а также к ряду преобразований аттракторов квазипериодических колебаний, в том числе и к переходу их к хаотической динамике.

5. СТОХАСТИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС ПРИ ДИНАМИЧЕСКОЙ БИСТАБИЛЬНОСТИ

При наличии динамической бистабильности могут возникнуть условия, необходимые для реализации такого эффекта, как стохастический резонанс. Данный эффект проявляется в том, что в отсутствие шума имеет место слабый отклик системы на внешнее периодическое воздействие, но при дополнительном воздействии шумового сигнала периодический отклик значительно возрастает, достигая максимума при определенном уровне шума. В случае динамической бистабильности шумовой сигнал «перебрасывает» динамику системы с одного аттрактора на другой, который при выбранных параметрах оказывается более устойчивым (т. е. имеет в фазовой плоскости больший бассейн). После этого периодическое внешнее воздействие приводит параметры к таким значениям, при которых второй из указанных аттракторов становится неустойчивым, и динамика системы возвращается к режиму, близкому к исходному [12]. Описанная ситуация возникает в случае массива 6×6, когда имеет место бистабильность при частоте внешнего поля $\Omega = 1$, поляризованного вдоль оси y и имеющего амплитуду $0.5 < \phi_0 < 1$ (см. рис. 2*а*).

Для реализации в рассматриваемой системе опи-

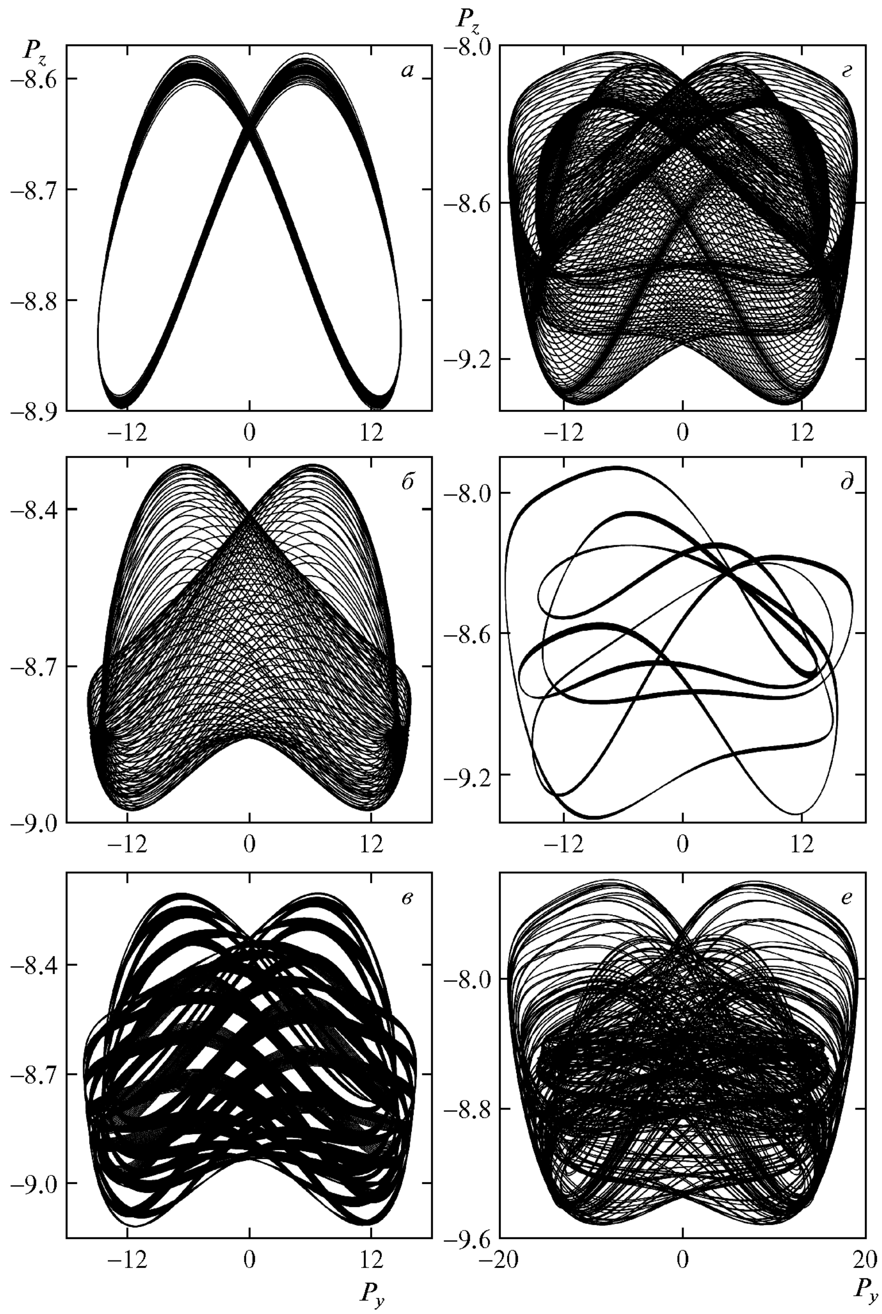

Рис. 7. Аттракторы квазипериодических режимов (*а*–*д*) для массива 6×6, переходящие с уменьшением частоты поля в аттрактор хаотического режима (*е*); частота $\Omega = 1.92$ (*а*), 1.90 (*б*), 1.89 (*в*), 1.86 (*г*), 1.85 (*д*), 1.82 (*е*), амплитуда $\phi_0 = 2$, угол поляризации $\psi = 0$, исходная конфигурация несимметричная

санного стохастического эффекта будем использовать дополнительное переменное поле той же поляризации и аддитивный шумовой сигнал. Дополнительное поле будет выступать в роли гармонического сигнала, который обеспечивает изменение устойчивости входящих в бистабильность динамических режимов и тем самым обусловливает переход между аттракторами (относящимися на диаграмме рис. 2*а* к разным ветвям — I и II). Полное внешнее поле запишем в следующем виде:

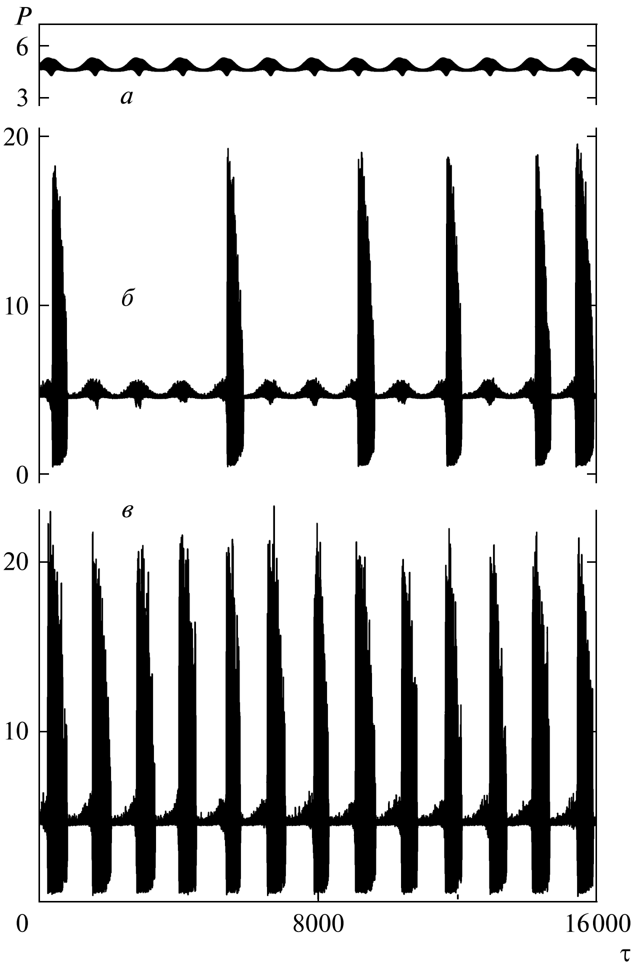

Рис. 8. Зависимости от времени величины дипольного момента системы 6×6 при ориентированных по оси y полях с параметрами $\phi_0 = 0.67$, $\Omega_0 = 1$ и $\phi_1 = 0.25$, $\Omega_1 = 5 \cdot 10^{-3}$, при разной интенсивности шума: $D = 0$ (*а*), 2 (*б*), 12 (*в*)

$$\phi(\tau) = \phi_0 \sin(\Omega_0 \tau) + \phi_1 \sin(\Omega_1 \tau) + \xi(\tau), \qquad (4)$$

где $\xi(\tau)$ — гауссов белый шум с нулевым средним значением и функцией корреляции $\langle \xi(\tau)\xi(\tau+\zeta)\rangle = 2D\delta(\zeta)$ с интенсивностью $2D$; ϕ_1 и Ω_1 — амплитуда и частота дополнительного переменного поля.

На рис. 8 представлены зависимости от времени дипольного момента системы 6×6 при ориентированных по оси y внешних переменных полях с параметрами $\phi_0 = 0.67$, $\Omega_0 = 1$ и $\phi_1 = 0.25$, $\Omega_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ при разных значениях интенсивности шума D. Из рис. 8*а* видно, что при отсутствии шума отклик системы на дополнительный гармонический сигнал мал — колебательные режимы дипольного момента остаются в пределах ветви I (см. рис. 2*а*). При относительно слабом шуме на определенном интервале фазы дополнительного поля возникают высокоамплитудные колебания дипольного момента, обусловленные тем, что его динамика переходит в режимы ветви II бифуркационной диаграммы (после чего система снова переходит к исходным режимам ветви I). Однако данные высокоамплитудные колебания возникают не в каждом периоде дополнительного поля — их появление носит случайный характер (рис. 8*б*). С увеличением интенсивности шума данные «всплески» величины дипольного момента учащаются, и в итоге при достаточно сильном шуме они начинают происходить в каждом периоде дополнительного переменного поля (рис. 8*в*). Таким образом, влияние шума приводит к сильному росту отклика динамической системы на внешний гармонический сигнал, что и характеризует возникновение стохастического резонанса.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный анализ квадратных массивов диполей показал, что их равновесная конфигурация может быть двух типов. При одном типе конфигурация оказывается симметричной относительно диагонали массива и в центре системы характерным является «седлообразная» ориентация дипольных моментов. В случае другого типа равновесной конфигурации в центральной области массива дипольные моменты выстраиваются вдоль сторон массива, составляя пары рядов с взаимно противоположными направлениями дипольных моментов. При этом первый — симметричный — тип равновесной конфигурации наблюдается в любых массивах, больших 3×3. В системах с четным числом элементов — 4×4, 6×6, 8×8, 10×10 — данная конфигурация имеет ось симметрии четвертого порядка и нулевой суммарный дипольный момент. Несимметричный тип равновесной конфигурации наблюдается только в системах с четным числом элементов — 6×6, 8×8, 10×10 (а также в массиве 3×3). Таким образом, в случае указанных выше массивов наблюдается два типа равновесной конфигурации. Несимметричная равновесная конфигурация устанавливается после предварительного включения и последующего выключения внешнего статического поля, ориентированного вдоль сторон массива. Системы с нечетным числом диполей — 5×5, 7×7, 9×9 — после выключения данного статического поля приходят к симметричной конфигурации. Установление симметричной равновесной конфигурации диполей систем с четным числом элементов связано с определенными трудностями. Приведенный анализ показал, что в этом случае требуется динамическое установление конфигурации: системы при исходной несимметричной конфигурации подвергаются воздействию переменного поля, возбуждающего определенные колебательные режимы суммарного дипольного момента, после выключения которых устанавливается уже система симметричной равновесной конфигурации.

С помощью бифуркационных диаграмм проведен анализ колебательных режимов суммарного дипольного момента массивов, при котором выявлены области значений параметров внешнего переменного поля, отвечающие регулярным и хаотическим динамическим режимам. В частности, показано, что на малых частотах ($\Omega < 0.3$) устанавливаются колебания с $P \approx N$ (или $P_j \approx N$); далее следует область хаотической динамики, после которой ($\Omega \geq 2$) следует область регулярных колебаний с амплитудой, уменьшающейся с ростом частоты поля. Показано, что разным исходным равновесным конфигурациям отвечают различные колебательные режимы. Так, в отличие от систем с симметричной равновесной конфигурацией, в случае несимметричной конфигурации воздействие переменного поля с поляризацией вдоль разных сторон системы приводит к существенно различным колебательным режимам. Дополнительные исследования показали, что максимальные и минимальные по амплитуде колебания модуля суммарного дипольного момента для систем с несимметричной равновесной конфигурацией достигаются при поляризации поля вдоль разных сторон массива; для массивов с симметричной конфигурацией амплитуда колебаний максимальна при поляризации поля вдоль любой из сторон системы и минимальна при поляризации вдоль диагоналей. Кроме того, в случае систем с несимметричной конфигурацией при поле, поляризованном перпендикулярно направлению дипольных моментов в центральной области массивов, как регулярные, так и хаотические колебательные режимы оказываются линейно поляризованными.

Рассмотрены различные аттракторы хаотических режимов, а также сценарии хаотизации динамики дипольного момента системы. В частности, приведен случай возникновения сильной хаотичности колебаний через «размывание» аттрактора регулярного режима при возникновении слабой хаотичности и дальнейшее (с уменьшением частоты поля) расширение странного аттрактора. Показано также возникновение хаотического режима через возникновение квазипериодических колебаний, изменения и усложнения их аттракторов с уменьшением частоты и далее их переход в хаотические колебания.

Выявлены параметры переменного поля, отвечающие возникновению динамической бистабильности, которая может быть использована для реализации стохастического резонанса. Показано, что в этом случае использование дополнительного переменного поля в качестве гармонического сигнала позволяет осуществить режим, когда ответ динамической системы на гармоническое воздействие сильно возрастает в условиях интенсивного шума, что объясняется перескоками колебаний дипольного момента системы с одного составляющего бистабильность аттрактора на другой. Полученные в ходе исследований результаты справедливы для различных по природе соответствующих систем диполей.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Skomski, J. Phys.: Condens. Matter **15**, R841 (2003).
2. А. Ю. Галкин, Б. А. Иванов, Письма в ЖЭТФ **83**, 450 (2006).
3. С. А. Гусев, Ю. Н. Ноздрин, М. В. Сапожников, А. А. Фраерман, УФН **170**, 331 (2000).
4. I. A. Becker, A. Chatelain, and W. A. Heer, Phys. Rev. Lett. **71**, 4067 (1993).
5. С. П. Губин, Ю. А. Кокшаров, Неорганические материалы **38**, 1287 (2002).
6. И. Р. Каретникова, И. М. Нефедов, М. В. Сапожников, А. А. Фраерман, И. А. Шерешевский, ФТТ **43**, 2030 (2001).
7. В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова, А. Б. Нейман, Г. И. Стрелкова, Л. Шиманский-Гайер, *Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах*, Институт компьютерных исследований, Москва–Ижевск (2003).
8. А. Ю. Лоскутов, А. С. Михайлов, *Основы теории сложных систем*, НИЦ РХД, Ижевск (2008).

9. A. M. Shutyi and D. I. Sementsov, Chaos **19**, 013110 (2009).

10. B. Xu and W. Zhou, Chaos, Solitons, and Fractals **38**, 1146 (2008).

11. L. Testa and M. Trapanese, Physica B: Phys. Condens. Mat. **403**, 486 (2008).

12. А. М. Шутый, ФТТ **52**, 1323 (2010).

13. A. M. Shutyi and D. I. Sementsov, J. Appl. Phys. **113**, 163904 (2013).

14. С. П. Губин, Ю. А. Кокшаров, Г. Б. Хомутов, Г. Ю. Юрков, Успехи химии **74**, 539 (2005).

15. Ф. В. Лисовский, О. П. Поляков, Письма в ЖЭТФ **73**, 546 (2001).

16. А. М. Шутый, ЖЭТФ **137**, 277 (2010).

17. А. М. Шутый, Письма в ЖЭТФ **97**, 601 (2013).