ЖЭТФ, 2014, том 145, вып. 6, стр. 1101–1105

СООТНОШЕНИЯ ВЗАИМНОСТИ В ЗАДАЧЕ О НЕЛИНЕЙНОЙ ПРОВОДИМОСТИ ДВУМЕРНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ

Б. Я. Балагуров *

Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля Российской академии наук
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 31 января 2014 г.

Преобразование симметрии, предложенное А. М. Дыхне, применено к нелинейной задаче о проводимости двумерных неоднородных сред. Получен ряд соотношений между локальными и эффективными нелинейными характеристиками исходной и взаимной к ней систем. Для двухкомпонентных двумерных композитов установлены соотношения взаимности для четных парциальных моментов напряженности электрического поля произвольного порядка.

DOI: 10.7868/S0044451014060147

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные эффекты в проводимости (отклонения от закона Ома) в «нормальных» проводниках обычно пренебрежимо малы́ при не слишком больших напряженностях электрического поля $\mathbf{E}$. Однако в композиционных материалах ситуация не столь однозначна и при той же напряженности $\mathbf{E}$ вклад нелинейных эффектов в проводимость может быть даже сравним с линейным. Такая ситуация возникает, например, в композитах с фазовым переходом металл–диэлектрик. Причина этого явления в том, что при приближении к критической точке (порогу протекания) линейная эффективная проводимость композита σ_e резко уменьшается, стремясь к нулю. В результате главный член разложения средней плотности тока $\langle \mathbf{j} \rangle$ по степеням средней напряженности $\langle \mathbf{E} \rangle$ оказывается аномально малым. Поэтому начинает играть заметную роль следующий, кубичный по $\langle \mathbf{E} \rangle$, член этого ряда и проводимость композита становится нелинейной. Отметим, что подобная ситуация не является уникальной, присущей только композитам. Нелинейные явления оказываются существенными во всех случаях, когда происходит фазовый переход второго рода, сопровождаемый обращением в нуль соответствующего параметра порядка.

Таким образом, исследование нелинейной проводимости композитов представляет интерес как с общефизической, так и с прикладной точек зрения. Изучению этой проблемы посвящен ряд работ, из которых отметим [1, 2], где рассматривалась первая нелинейная поправка к эффективной проводимости неоднородной среды. Как показано в работах [1, 2], соответствующий (кубичный) эффективный коэффициент нелинейности выражается через моменты напряженности электрического поля четвертого порядка. В следующих по нелинейности приближениях [3] возникают моменты шестого, восьмого и т. д. порядков. Поэтому актуальной задачей теории проводимости композитов является изучение как самих эффективных нелинейных коэффициентов, так и моментов напряженности электрического поля различных порядков. В двумерном случае для этих величин могут быть установлены полезные соотношения методом, аналогичным использованному в работе Дыхне [4].

В работе [4] при решении линейной задачи о проводимости двумерной неоднородной среды было предложено преобразование симметрии, оставляющее неизменными уравнения постоянного тока. С помощью этого преобразования устанавливается связь между свойствами исходной системы с изотропной локальной проводимостью $\sigma(\mathbf{r})$ и «взаимной» к ней системы с проводимостью $\lambda^2/\sigma(\mathbf{r})$, где λ — некоторый независящий от координат параметр. Аналогичное соотношение взаимности имеет место и для эффективных проводимостей этих систем. Это позволило найти в явном виде величину σ_e [4] для двумер-

*E-mail: balagurov@deom.chph.ras.ru, byabalagurov@mail.ru

ной случайно-неоднородной бинарной системы при равных концентрациях компонент. В общем случае соотношение взаимности дает возможность связать значения линейной эффективной проводимости σ_e рассматриваемой системы при различных концентрациях и проводимостях компонент.

В настоящей работе преобразование Дыхне использовано в задаче о нелинейной проводимости изотропной двумерной неоднородной среды. Найдены соотношения между локальными и эффективными нелинейными коэффициентами для исходной и взаимной систем. Рассмотрены системы как с дискретной (композиты), так и с непрерывной зависимостью локальных свойств от координат, а также случайно-неоднородная среда. В качестве одного из следствий получены, например, соотношения взаимности для парциальных (вычисленных по площадям отдельных компонент) моментов напряженности электрического поля четвертого порядка для бинарной системы. Установленные в работе различные соотношения взаимности упрощают изучение нелинейных свойств двумерных моделей композитов.

2. ЭФФЕКТИВНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЫ

Обсудим сначала постановку задачи и введем необходимые обозначения. Для вычисления эффективной проводимости неоднородной среды необходимо решить уравнения постоянного тока

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0 \tag{1}$$

при заданных граничных условиях. В нелинейной задаче плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ и напряженность электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ изотропной неоднородной среды связаны соотношением

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \Big\{\sigma(\mathbf{r}) + \chi^{(3)}(\mathbf{r})\mathbf{E}^2(\mathbf{r}) + \chi^{(5)}\mathbf{E}^4(\mathbf{r}) + \ldots\Big\}\mathbf{E}(\mathbf{r}), \tag{2}$$

обобщающим обычный закон Ома.

С другой стороны, связь $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ можно представить в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \Big\{\rho(\mathbf{r}) + \zeta^{(3)}(\mathbf{r})\mathbf{j}^2(\mathbf{r}) + \zeta^{(5)}(\mathbf{r})\mathbf{j}^4(\mathbf{r}) + \ldots\Big\}\mathbf{j}(\mathbf{r}). \tag{3}$$

Обращая ряд (3) и сравнивая с (2), получим следующие соотношения между локальными коэффициентами этих разложений:

$$\begin{gathered}\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sigma(\mathbf{r})}, \quad \zeta^{(3)}(\mathbf{r}) = -\frac{\chi^{(3)}(\mathbf{r})}{[\sigma(\mathbf{r})]^4},\\ \zeta^{(5)}(\mathbf{r}) = 3\,\frac{\left[\chi^{(3)}(\mathbf{r})\right]^2}{[\sigma(\mathbf{r})]^7} - \frac{\chi^{(5)}(\mathbf{r})}{[\sigma(\mathbf{r})]^6}, \ldots\end{gathered} \tag{4}$$

Эффективные величины нелинейной среды определяются обычным образом:

$$\langle\mathbf{j}\rangle = \Big\{\sigma_e + \chi_e^{(3)}\big(\langle\mathbf{E}\rangle\big)^2 + \chi_e^{(5)}\big(\langle\mathbf{E}\rangle\big)^4 + \ldots\Big\}\langle\mathbf{E}\rangle \tag{5}$$

и соответственно

$$\langle\mathbf{E}\rangle = \Big\{\rho_e + \zeta_e^{(3)}\big(\langle\mathbf{j}\rangle\big)^2 + \zeta_e^{(5)}\big(\langle\mathbf{j}\rangle\big)^4 + \ldots\Big\}\langle\mathbf{j}\rangle. \tag{6}$$

Здесь $\langle\ldots\rangle$ — среднее по площади системы S при $S\to\infty$. Связи между эффективными характеристиками, введенными в (5) и (6), имеют вид, аналогичный (4):

$$\begin{gathered}\rho_e = \frac{1}{\sigma_e}, \quad \zeta_e^{(3)} = -\frac{{\chi_e}^{(3)}}{{\sigma_e}^4},\\ \zeta_e^{(5)} = 3\frac{\left[\chi_e^{(3)}\right]^2}{{\sigma_e}^7} - \frac{\chi_e^{(5)}}{{\sigma_e}^6}, \ldots\end{gathered} \tag{7}$$

Соотношения этого раздела справедливы как для двумерных, так и для трехмерных систем.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИММЕТРИИ

В рассматриваемом двумерном случае преобразование симметрии, предложенное в работе [4], применимо и к нелинейной задаче. Перейдем, как и в [4], к «штрихованной» системе:

$$\begin{gathered}j_x = \lambda\,E'_y, \quad j_y = -\lambda\,E'_x;\\ E_x = \frac{1}{\lambda}j'_y, \quad E_y = -\frac{1}{\lambda}j'_x,\end{gathered} \tag{8}$$

где параметр преобразования λ — константа размерности проводимости. При преобразовании (8) уравнение $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ переходит в уравнение $\operatorname{rot}\mathbf{E}' = 0$, а $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ — в $\operatorname{div}\mathbf{j}' = 0$. Таким образом, уравнения постоянного тока остаются неизменными и при этом связь $\mathbf{j}$ с $\mathbf{E}$ может быть любой — как линейной, так и нелинейной. Отметим, что подобное преобразование возможно только в двумерном случае.

После подстановки $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ из (8) равенство (2) принимает вид, аналогичный (3), так что для «штрихованных» локальных величин получаем следующие выражения:

$$\begin{gathered}\rho'(\mathbf{r}) = \frac{\sigma(\mathbf{r})}{\lambda^2}, \quad {\zeta^{(3)}}'(\mathbf{r}) = \frac{\chi^{(3)}(\mathbf{r})}{\lambda^4},\\ {\zeta^{(5)}}'(\mathbf{r}) = \frac{\chi^{(5)}(\mathbf{r})}{\lambda^6}, \ldots\end{gathered} \tag{9}$$

Отсюда с учетом соотношений (4) находим

$$\sigma'(\mathbf{r}) = \frac{\lambda^2}{\sigma(\mathbf{r})}, \quad {\chi^{(3)}}'(\mathbf{r}) = -\left[\frac{\lambda}{\sigma(\mathbf{r})}\right]^4 \chi^{(3)}(\mathbf{r}),$$

$${\chi^{(5)}}'(\mathbf{r}) = \left[\frac{\lambda}{\sigma(\mathbf{r})}\right]^6 \times \tag{10}$$

$$\times\left\{-\chi^{(5)}(\mathbf{r}) + 3\,\frac{\left[\chi^{(3)}(\mathbf{r})\right]^2}{\sigma(\mathbf{r})}\right\}, \ldots$$

Усредняя равенства (8) по площади рассматриваемой двумерной системы и подставляя полученные $\langle\mathbf{j}\rangle$, $\langle\mathbf{E}\rangle$ в (5), аналогичным образом находим соотношения для эффективных величин:

$$\sigma'_e = \frac{\lambda^2}{\sigma_e}, \quad {\chi_e^{(3)}}' = -\left(\frac{\lambda}{\sigma_e}\right)^4 \chi_e^{(3)},$$

$${\chi_e^{(5)}}' = \left(\frac{\lambda}{\sigma_e}\right)^6 \left\{-\chi_e^{(5)} + 3\frac{\left[\chi_e^{(3)}\right]^2}{\sigma_e}\right\}, \ldots \tag{11}$$

Равенства (11) справедливы для любой нелинейной двумерной системы, обладающей локальной и макроскопической изотропией. При этом локальные характеристики исходной и штрихованной систем связаны соотношениями (10).

Для величин $\chi_e^{(3)}$ имеет место следующее общее выражение [1, 2] (см. также [3]):

$$\chi_e^{(3)} = \langle\chi^{(3)}\mathbf{e}^4\rangle, \tag{12}$$

справедливое как в трехмерном, так и в двумерном случаях. Здесь

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r})}{|\langle\mathbf{E}\rangle|}, \tag{13}$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ — напряженность электрического поля в среде, определенная в рамках линейной задачи о проводимости. Используя (8), находим

$$\big(\mathbf{E}'(\mathbf{r})\big)^2 = \frac{1}{\lambda^2}\big(\mathbf{j}(\mathbf{r})\big)^2 = \left[\frac{\sigma(\mathbf{r})}{\lambda}\right]^2 \big(\mathbf{E}(\mathbf{r})\big)^2. \tag{14}$$

Аналогичным образом для средних величин получаем

$$\big(\langle\mathbf{E}'\rangle\big)^2 = \frac{1}{\lambda^2}\big(\langle\mathbf{j}\rangle\big)^2 = \left(\frac{\sigma_e}{\lambda}\right)^2 \big(\langle\mathbf{E}\rangle\big)^2. \tag{15}$$

Из формул (14), (15) следует, что

$$\big(\mathbf{e}'(\mathbf{r})\big)^2 = \left[\frac{\sigma(\mathbf{r})}{\sigma_e}\right]^2 \big(\mathbf{e}(\mathbf{r})\big)^2. \tag{16}$$

Подстановка в формулу

$${\chi_e^{(3)}}' = \langle{\chi^{(3)}}'\,(\mathbf{e}')^4\rangle \tag{17}$$

выражений ${\chi^{(3)}}'(\mathbf{r})$ из (10) и $\big(\mathbf{e}'(\mathbf{r})\big)^2$ из (16) дает

$${\chi_e^{(3)}}' = -\left(\frac{\lambda}{\sigma_e}\right)^4 \langle\chi^{(3)}\mathbf{e}^4\rangle \tag{18}$$

или

$${\chi_e^{(3)}}' = -\left(\frac{\lambda}{\sigma_e}\right)^4 \chi_e^{(3)}, \tag{19}$$

что совпадает со вторым равенством из (11). Таким образом, общее выражение (12) для $\chi_e^{(3)}$ в двумерном случае удовлетворяет, как и должно быть, соответствующему соотношению взаимности. Используя выражение для коэффициента $\chi_e^{(5)}$ из работы [3], можно показать, что и для него тождественно выполняется третье соотношение из (11).

4. ДВУХКОМПОНЕНТНЫЕ КОМПОЗИТЫ

Для бинарной системы удобно положить

$$\lambda = \sqrt{\sigma_1\,\sigma_2}, \tag{20}$$

где σ_1 и σ_2 — проводимости первой и второй компонент. Такую штрихованную систему, отличающуюся, согласно (10), от исходной заменой $\sigma_1 \rightleftarrows \sigma_2$, также будем называть взаимной и относящиеся к ней величины будем отмечать значком «тильда». При таком выборе параметра λ первое равенство из (11) примет вид соотношения взаимности

$$\sigma_e\widetilde{\sigma}_e = \sigma_1\,\sigma_2, \tag{21}$$

установленного в работе Дыхне [4]. Запишем величину σ_e для рассматриваемой бинарной системы следующим образом:

$$\sigma_e = \sigma_e(p;\sigma_1,\sigma_2) = \sigma_1 f(p,h); \quad h = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \tag{22}$$

где p — безразмерная концентрация (доля занимаемой площади) первой компоненты.

С учетом того, что $\widetilde{\sigma}_1 = \sigma_2$ и $\widetilde{\sigma}_2 = \sigma_1$, соотношение (21) принимает вид

$$\sigma_e(p;\sigma_1,\sigma_2)\,\sigma_e(p;\sigma_2,\sigma_1) = \sigma_1\,\sigma_2 \tag{23}$$

или

$$f(p,h)\,f(p,1/h) = 1 \tag{24}$$

с $f(p,h)$ из (22). Использование соотношения (24) позволяет при определении безразмерной эффективной проводимости $f(p,h)$ (например, численными методами) ограничиться исследованием интервала $0 \leqslant h \leqslant 1$.

Из второго соотношения (11) имеем

$$\widetilde{\chi}_e^{(3)} = -\left(\frac{\lambda}{\sigma_e}\right)^4 \chi_e^{(3)}, \tag{25}$$

где, как следует из (12),

$$\chi_e^{(3)} = \chi_1^{(3)}\,\psi_1^{(4)} + \chi_2^{(3)}\,\psi_2^{(4)}. \tag{26}$$

Здесь

$$\psi_i^{(4)} = \langle \mathbf{e}^4 \rangle^{(i)}, \quad i = 1, 2, \tag{27}$$

— парциальные моменты напряженности электрического поля четвертого порядка. В (27) $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ — то же, что и в (13), и

$$\langle(\ldots)\rangle^{(i)} = \frac{1}{S}\int\limits_{S_i} (\ldots)\, dS \tag{28}$$

— парциальное среднее по площади i-й компоненты S_i. Безразмерные функции $\psi_i^{(4)}$ определяются в рамках линейной задачи и поэтому зависят от тех же аргументов, что и f из (22):

$$\psi_i^{(4)} = \psi_i^{(4)}(p, h). \tag{29}$$

Для величины $\widetilde{\chi}_e^{(3)}$ имеем выражение, аналогичное (26):

$$\widetilde{\chi}_e^{(3)} = \widetilde{\chi}_1^{(3)}\widetilde{\psi}_1^{(4)} + \widetilde{\chi}_2^{(3)}\widetilde{\psi}_2^{(4)}, \tag{30}$$

где

$$\widetilde{\psi}_i^{(4)} = \psi_i^{(4)}(p, 1/h) \tag{31}$$

и, как следует из второго равенства (10),

$$\widetilde{\chi}_1^{(3)} = -\left(\frac{\lambda}{\sigma_1}\right)^4 \chi_1^{(3)}, \quad \widetilde{\chi}_2^{(3)} = -\left(\frac{\lambda}{\sigma_2}\right)^4 \chi_2^{(3)}. \tag{32}$$

Поэтому выражение для $\widetilde{\chi}_e^{(3)}$ принимает вид

$$\widetilde{\chi}_e^{(3)} = -h^2\,\chi_1^{(3)}\widetilde{\psi}_1^{(4)} - \frac{1}{h^2}\,\chi_2^{(3)}\widetilde{\psi}_2^{(4)}. \tag{33}$$

Подставляя в равенство (25) величины $\chi_e^{(3)}$ из (26) и $\widetilde{\chi}_e^{(3)}$ из (33), получаем соотношение

$$h^2\chi_1^{(3)}\widetilde{\psi}_1^{(4)} + \frac{1}{h^2}\,\chi_2^{(3)}\widetilde{\psi}_2^{(4)} = \frac{h^2}{f^4}\left\{\chi_1^{(3)}\,\psi_1^{(4)} + \chi_2^{(3)}\,\psi_2^{(4)}\right\}. \tag{34}$$

Отсюда, в силу произвольности величин $\chi_1^{(3)}$ и $\chi_2^{(3)}$, следуют равенства

$$\psi_1^{(4)}\left(p, \frac{1}{h}\right) = \frac{1}{\left[f(p,h)\right]^4}\,\psi_1^{(4)}(p, h), \tag{35}$$

$$\psi_2^{(4)}\left(p, \frac{1}{h}\right) = \left[\frac{h}{f(p,h)}\right]^4 \psi_2^{(4)}(p, h), \tag{36}$$

являющиеся соотношениями взаимности для моментов $\psi_i^{(4)}$. Эти же соотношения для моментов $\psi_i^{(4)}$ следуют из определения (27) при учете равенства (16).

Отметим, что в общем случае четных моментов

$$\psi_i^{(2n)} = \langle \mathbf{e}^{2n} \rangle^{(i)} \tag{37}$$

произвольного порядка использование равенства (16) приводит к соотношениям взаимности вида

$$\psi_1^{(2n)}\left(p, \frac{1}{h}\right) = \frac{1}{\left[f(p,h)\right]^{2n}}\psi_1^{(2n)}(p, h), \tag{38}$$

$$\psi_2^{(2n)}\left(p, \frac{1}{h}\right) = \left[\frac{h}{f(p,h)}\right]^{2n}\psi_2^{(2n)}(p, h), \tag{39}$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$

Для моментов второго порядка согласно [5] имеем

$$\psi_1^{(2)}(p, h) = f(p, h) - h\,\frac{\partial f(p,h)}{\partial h}, \qquad \psi_2^{(2)}(p, h) = \frac{\partial f(p,h)}{\partial h}. \tag{40}$$

Выражения (40) с учетом равенства (24) тождественно удовлетворяют соотношениям взаимности (38), (39) при $n = 1$.

5. СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНАЯ СРЕДА

Для случайно-неоднородной двухкомпонентной системы одновременная замена $p \to 1 - p$, $\sigma_1 \rightleftarrows \sigma_2$, $\chi_1^{(3)} \rightleftarrows \chi_2^{(3)}, \ldots$ не меняет ее макроскопических свойств, так что выполняются равенства

$$\sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2) = \sigma_e(1 - p; \sigma_2, \sigma_1), \tag{41}$$

$$\chi_e^{(3)}\left(p; \sigma_1, \sigma_2; \chi_1^{(3)}, \chi_2^{(3)}\right) = \chi_e^{(3)}\left(1 - p; \sigma_2, \sigma_1; \chi_2^{(3)}, \chi_1^{(3)}\right), \ldots \tag{42}$$

Соотношение взаимности (23) с учетом (41) примет вид

$$\sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2)\,\sigma_e(1 - p; \sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1\,\sigma_2 \tag{43}$$

или

$$f(p, h)\, f(1 - p, h) = h, \quad h = \sigma_2/\sigma_1. \tag{44}$$

При $p = 1/2$ из (43) следует соотношение

$$\sigma_e(1/2; \sigma_1, \sigma_2) = \sqrt{\sigma_1\,\sigma_2} \tag{45}$$

— результат, полученный Дыхне в работе [4].

Согласно работе [4], концентрация $p_c = 1/2$ является критической (порогом протекания) для рассматриваемой двумерной случайно-неоднородной среды. При диэлектрической второй компоненте ($\sigma_2 = 0$) в пределе $p \to p_c + 0$ система как целое перестает проводить, т. е. происходит фазовый переход металл–диэлектрик. В критической точке (при равных концентрациях компонент) выражение (45) для двумерной случайно-неоднородной системы справедливо при любых проводимостях σ_1 и σ_2. Соответственно, для безразмерной эффективной проводимости такой системы имеем

$$f(1/2, h) = \sqrt{h} \tag{46}$$

при любых h.

Подстановка выражения (26) в равенство (42) дает, в силу произвольности величин $\chi_i^{(3)}$, соотношение

$$\psi_1^{(4)}(p, h) = \psi_2^{(4)}(1 - p, 1/h). \tag{47}$$

Еще одно соотношение такого типа следует из (47) при заменах $p \to 1 - p$ и $h \to 1/h$. Аналогичное равенство справедливо и для четных парциальных моментов произвольного порядка, так что

$$\psi_1^{(2n)}(p, h) = \psi_2^{(2n)}(1 - p, 1/h). \tag{48}$$

Подстановка $\psi_1^{(2n)}(p, 1/h)$ из (48) в (38) дает соотношение

$$\psi_2^{(2n)}(1 - p, h) = \frac{1}{\left[f(p, h)\right]^{2n}}\, \psi_1^{(2n)}(p, h). \tag{49}$$

С другой стороны, подставив $\psi_2^{(2n)}(p, 1/h)$ из (48) в (39), найдем

$$\psi_1^{(2n)}(1 - p, h) = \left[\frac{h}{f(p, h)}\right]^{2n} \psi_2^{(2n)}(p, h). \tag{50}$$

Равенства (49) и (50) при замене $p \to 1-p$ переходят друг в друга в силу соотношения (44).

При критической концентрации $p = 1/2$ согласно (46) имеем $f = \sqrt{h}$, так что из (49) (как и из (50)) следует равенство

$$\psi_1^{(2n)}(1/2, h) = h^n\, \psi_2^{(2n)}(1/2, h), \tag{51}$$

которое с учетом определения величин $\psi_i^{(2n)}$ может быть записано также в виде

$$\sigma_1^n \langle \mathbf{e}^{2n} \rangle^{(1)} = \sigma_2^n \langle \mathbf{e}^{2n} \rangle^{(2)}, \quad p = 1/2. \tag{52}$$

Соотношение (52) совпадает с полученным в работе [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Stroud and P. M. Hui, Phys. Rev. B **37**, 8719 (1988).
2. D. J. Bergman, Phys. Rev. B **39**, 4598 (1989).
3. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **120**, 945 (2001).
4. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 110 (1970).
5. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **93**, 1888 (1987).