

ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ВБЛИЗИ ПЛОСКИХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ГРАНИЦ МЕТАМАТЕРИАЛА

А. П. Аниютин^{а*}, И. П. Коршунов^{б**}, А. Д. Шатров^б

^аРоссийский новый университет
105005, Москва, Россия

^бФрязинский филиал института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова Российской академии наук
141190, Фрязино, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 7 июня 2013 г.

Рассматриваются свойства двумерных электромагнитных полей, возбуждаемых нитевидным источником, расположенным вблизи плоских и цилиндрических границ тел, выполненных из метаматериалов, диэлектрическая и магнитная проницаемости которых близки к значению минус единица. Исследуются эффекты субволновой локализации поля; явления, связанные с резонансами поверхностных волн; эффекты нерезонансного усиления поля.

DOI: 10.7868/S0044451014010040

1. ВВЕДЕНИЕ

Электромагнитное поле вблизи плоской границы, разделяющей среды с материальными параметрами $\varepsilon = \mu = 1$ и $\varepsilon = \mu = -1$, обладает необычными свойствами. Так, задача возбуждения точечным источником полупространства, заполненного метаматериалом с параметрами $\varepsilon = \mu = -1$, не имеет решения, а на границе раздела существуют поверхностные волны с непрерывным спектром постоянных распространения [1]. При возбуждении тел из метаматериалов точечным источником, расположенным вблизи их границ, возникают поверхностные волны, поля которых не могут быть описаны методами геометрической оптики.

Обсудим подробнее свойства волновых полей вблизи плоских и искривленных границ в двумерных задачах о дифракции цилиндрической волны на телах из метаматериалов, диэлектрическая и магнитная проницаемости которых близки или равны минус единице.

Для определенности будем рассматривать случай ТМ-поляризации, когда в электромагнитном поле присутствуют компоненты $H_z(x, y)$, $E_x(x, y)$, $E_y(x, y)$. Задача дифракции сводится в этом слу-

чае к нахождению скалярной функции $U(x, y) = H_z(x, y)$, которая должна удовлетворять вне и внутри тела уравнениям Гельмгольца, а также соответствующим граничным условиям на его поверхности и условиям излучения на бесконечности. Падающее поле $U^0(r, \varphi)$ задается в виде

$$U^0(r, \varphi) = H_0^{(2)} \left[k \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} \right], \quad (1)$$

где $H_0^{(2)}$ — функция Ганкеля, k — волновое число в свободном пространстве, (r, φ) и (r_0, φ_0) — полярные координаты соответственно точек наблюдения и источника. Зависимость полей от времени описывается множителем $\exp(i\omega t)$.

2. ДИФРАКЦИЯ НА ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Задача возбуждения полупространства, заполненного метаматериалом (см. рис. 1) аналитически исследована в работе [1]. В этой работе показано, что при $\varepsilon = \mu = -1$ задача не имеет решения. В предположении, что ε и μ являются вещественными величинами и приближаются к значению минус единица вдоль кривой $\varepsilon\mu = 1$ (например, $\varepsilon = -1 + \delta$, $\mu = -1 - \delta$, $|\delta| \rightarrow 0$), установлено, что поле неограниченно возрастает по закону

$$U(x, y) = \frac{2i}{\varepsilon + 1} V(x, y) = \frac{2i}{\delta} V(x, y), \quad (2)$$

*E-mail: anioutine@mail.ru

**E-mail: korip@ms.ire.rssi.ru

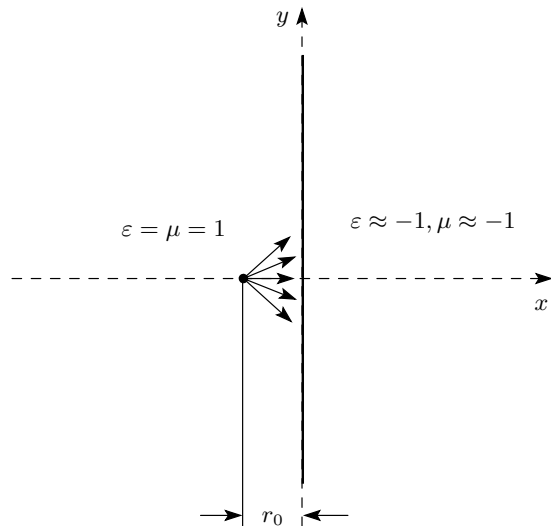


Рис. 1. Полупространство, заполненное метаматериалом

где функция $V(x, y)$ определяется интегралом

$$V(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_k^\infty \frac{1}{\sqrt{h^2 - k^2}} \times \exp \left[-\sqrt{h^2 - k^2} (r_0 + |x|) \right] \cos(hy) dh, \quad (3)$$

где h — поперечная постоянная распространения.

В работах [2, 3] численно исследована трехмерная задача возбуждения полупространства из метаматериала электрическим диполем, параллельным границе раздела сред. Предполагалось, что метаматериал обладает небольшими тепловыми потерями: $\epsilon = -1 - i\delta$, $\mu = -1 - i\delta$. Показано, что при $\delta \rightarrow 0$ поле возрастает по закону $1/\delta$, что согласуется с формулой (2) (в этих расчетах потери достигали весьма малых величин $\delta \sim 10^{-10}$).

Интеграл (3) можно записать в эквивалентной форме, более удобной для численных расчетов:

$$V(x, y) = -N_0 \left[k \sqrt{(r_0 + |x|)^2 + y^2} \right] + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin [k(r_0 + |x|) \cos t] \cos(ky \sin t) dt, \quad (4)$$

где N_0 — функция Неймана.

На рис. 2 представлены нормированные распределения полей вдоль границы раздела $x = 0$ при различных значениях параметра kr_0 , характеризующего удаление источника от границы $x = 0$. Поле имеет многолепестковый интерференционный характер и сконцентрировано вблизи точки $y = 0$. С

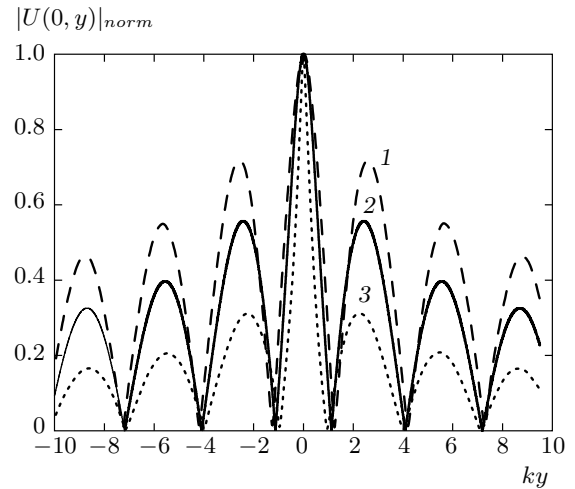


Рис. 2. Нормированное распределение модуля поля на плоскости $x = 0$ при $\epsilon \rightarrow -1$, $\mu \rightarrow -1$, $r_0 = 1.0$ (1), 0.5 (2), 0.1 (3)

уменьшением параметра kr_0 уменьшаются как ширина основного лепестка, так и уровень боковых лепестков.

Из формулы (4) следует, что при $y = 0$ зависимость поля от координаты описывается выражением

$$V(x, 0) = -N_0 (kr_0 + |kx|) + \mathbf{H}_0 (kr_0 + |kx|), \quad (5)$$

где \mathbf{H}_0 — функция Струве [4]. На рис. 3 изображены нормированные графики функций (5) при различных значениях параметра kr_0 . Из рисунка видно, что поля монотонно убывают при удалении от границы раздела сред и имеют вид, характерный для поверхностных волн.

Заметим, из формулы (2) и рис. 2, 3 следует, что при $\epsilon \rightarrow -1$, $\mu \rightarrow -1$ в точке $x = 0$, $y = 0$ имеет место эффект субволновой локализации поля, т. е. поле концентрируется в области, размер которой существенно меньше длины волны $\lambda = 2\pi/k$.

Напомним, что согласно (2) при $\epsilon \rightarrow -1$ поле неограниченно возрастает и, следовательно, его значение в точке $x = 0$, $y = 0$ может значительно превосходить величину возбуждающего поля в этой точке $H_0^{(2)}(kr_0)$.

3. ДИФРАКЦИЯ НА КРУГОВОМ ЦИЛИНДРЕ

Рассмотрим задачу о дифракции на круговом цилиндре радиусом a с параметрами $\epsilon < 0$, $\mu < 0$ (см. рис. 4).

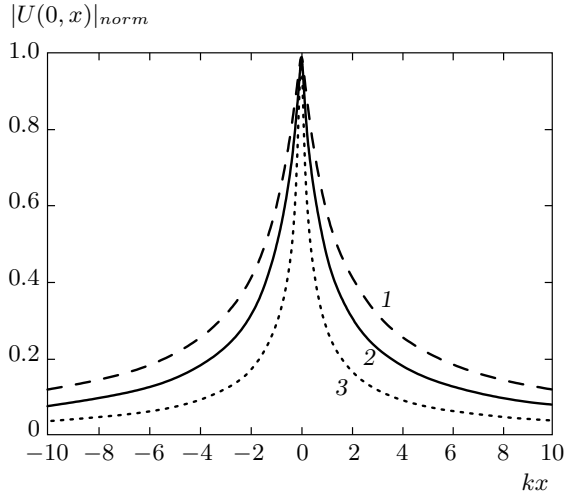


Рис. 3. Нормированное распределение модуля поля вдоль линии $y = 0$ при $\varepsilon \rightarrow -1, \mu \rightarrow -1, r_0 = 1.0$ (1), 0.5 (2), 0.1 (3)

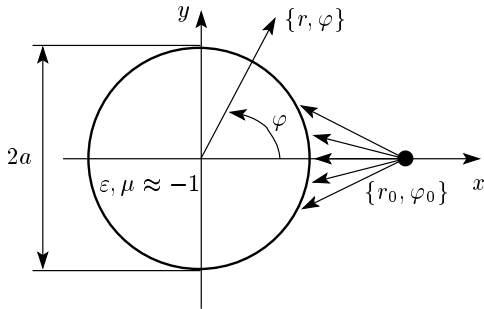


Рис. 4. Цилиндр из метаматериала, геометрия задачи

Эта задача допускает аналитическое решение методом разделения переменных (ряды Рэлея [5]). В частности, поле внутри цилиндра может быть записано в виде [6]

$$U(r, \varphi) = -\frac{2i}{\pi ka} \times \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m H_m^{(2)}(kr_0) J_m(knr) \cos(m\varphi) \times \left\{ H_m^{(2)'}(ka) J_m(kna) - \frac{n}{\varepsilon} H_m^{(2)}(ka) J_m'(kna) \right\}^{-1}, \quad r < a, \tag{6}$$

где

$$\delta_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 2, & m \geq 1, \end{cases} \tag{7}$$

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}, \tag{8}$$

J_m — функция Бесселя, штрих обозначает дифференцирование по аргументу.

Поле вне цилиндра ($r \geq a$) состоит из двух составляемых — падающего и рассеянного полей:

$$U(r, \varphi) = U^0(r, \varphi) + U^s(r, \varphi). \tag{9}$$

Рассеянное поле U^s в дальней зоне ($kr \rightarrow \infty$) имеет вид

$$U^s(r, \varphi) \sim \Phi^s(\varphi) \left(\frac{2}{\pi kr} \right)^{1/2} \exp\left(-ikr + \frac{i\pi}{4}\right), \tag{10}$$

где $\Phi^s(\varphi)$ — диаграмма рассеяния. Диаграмма направленности падающего поля $U^0(r, \varphi)$ выражается следующей формулой:

$$\Phi^0(\varphi) = \exp(ikr_0 \cos \varphi). \tag{11}$$

Формулы, которые использовались для расчета поля вне цилиндра и для расчета диаграммы направленности рассеянного поля, приводить не будем; они содержатся в работе [6].

Отметим, что при $\varepsilon = \mu = -1$ и $ka \gg 1$ сходимость ряда (6) существенно замедляется. Причиной этого является поведение при $m \rightarrow \infty$ знаменателя в формуле (6). При $\varepsilon = \mu = -1$ имеем

$$H_m^{(2)'}(ka) J_m(kna) - \frac{n}{\varepsilon} H_m^{(2)}(ka) J_m'(kna) = H_m^{(2)'}(ka) J_m(ka) + H_m^{(2)}(ka) J_m'(ka) = \frac{d}{d(ka)} \left[H_m^{(2)}(ka) J_m(ka) \right]. \tag{12}$$

При $m \gg ka \gg 1$ справедливы асимптотические представления [4]

$$J_m(ka) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \left(\frac{eka}{2m} \right)^m, \tag{13}$$

$$H_m^{(2)}(ka) \sim i \sqrt{\frac{2}{\pi m}} \left(\frac{eka}{2m} \right)^{-m}.$$

Поэтому

$$H_m^{(2)}(ka) J_m(ka) \sim \frac{i}{\pi m} \tag{14}$$

и, следовательно, при $m \rightarrow \infty$ главный член знаменателя асимптотики (12) обращается в нуль, что и объясняет ухудшение сходимости ряда (6).

Представленные ниже численные результаты получены как суммированием рядов Рэлея, так и с помощью модифицированного метода дискретных источников [7, 8]. Результаты этих расчетов находятся в полном соответствии друг с другом.

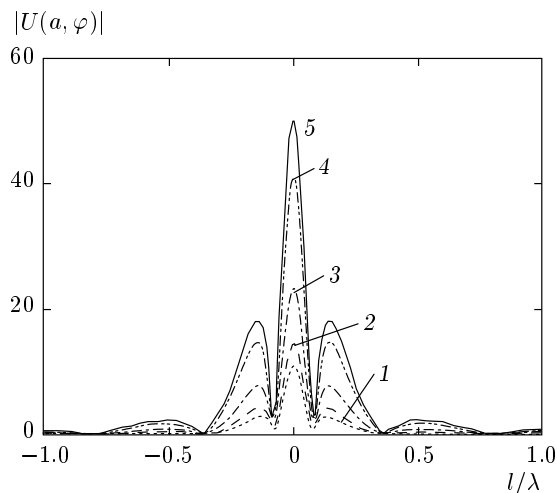


Рис. 5. Распределение модуля поля на поверхности цилиндра при $\varepsilon = \mu = -1$, $kr_0 = ka + 1.0$, $ka = 2.4$ (1), 4 (2), 8 (3), 16 (4), 20 (5); $l/\lambda = ka\varphi/2\pi$

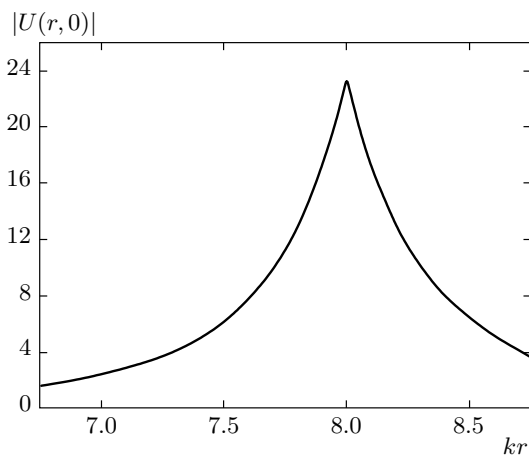


Рис. 6. Распределение модуля поля по радиусу в цилиндре из метаматериала с параметрами $\varepsilon = \mu = -1$, $ka = 8$, $kr_0 = 9.0$, $\varphi = 0$

На рис. 5 изображены распределения модуля поля вдоль поверхности цилиндра. Кривые 1–5 соответствуют различным диаметрам цилиндра. Расстояние от источника до поверхности цилиндра предполагалось фиксированным и равным $k(r_0 - a) = 1$. Видно, что поле сконцентрировано в направлении на источник ($\varphi = 0$) и размер пятна, определенный по расстоянию между соседними минимумами поля, одинаков для всех кривых и приближенно равен $\lambda/10$, т. е. проявляется эффект субволновой локализации поля.

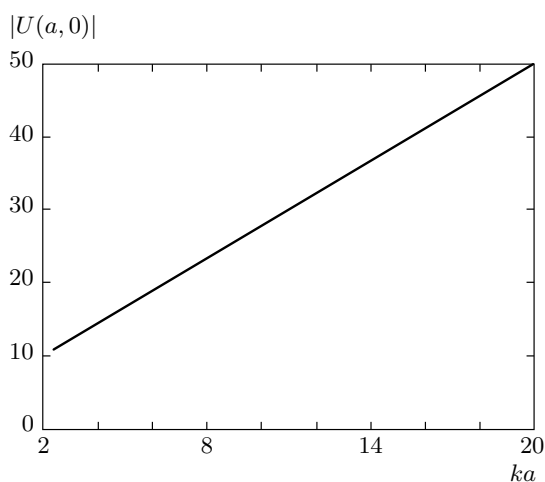


Рис. 7. Зависимость максимального значения модуля поля на поверхности цилиндра от радиуса a при $\varepsilon = \mu = -1$, $kr_0 = ka + 1.0$, $\varphi = 0$

Концентрация поля вблизи цилиндрической поверхности наблюдается и по нормали к ней. Это видно из рис. 6, на котором представлен график зависимости поля от радиальной координаты $|U(r, 0)|$ для $ka = 8$ и $k(r_0 - a) = 1$. При других значениях ka , указанных на рис. 5, характер поведения распределения $|U(r, 0)|$ сохраняется, изменяется лишь амплитуда поля в максимуме. Качественно поведение поля вблизи цилиндрической границы совпадает с поведением поля вблизи плоской границы (см. рис. 3). Как и в случае плоской границы, здесь имеет место эффект субволновой локализации поля в точке $r = a$, $\varphi = 0$ [9]. Из расчетов, приведенных в работе [9], следует, что при удалении от поверхности вглубь цилиндра поле монотонно убывает и эффектов «фокусировки», вытекающих из приближенных представлений геометрической оптики не существует. Задача о дифракции на цилиндрах большого размера, возбуждаемых полем удаленного точечного источника, исследована модифицированным методом дискретных источников в работе [10]. В работе [10] дана наглядная физическая интерпретация полученным результатам на основе метода геометрической оптики.

С увеличением радиуса цилиндра a поле монотонно возрастает, что видно на рис. 7. Такое поведение поля согласуется с результатами предыдущего раздела, из которых следует, что при $a \rightarrow \infty$ цилиндрическая поверхность переходит в плоскую границу, а в этом случае задача дифракции не имеет решения.

Характер распределения поля в пространстве и зависимость его амплитуды от частоты возбуждаю-

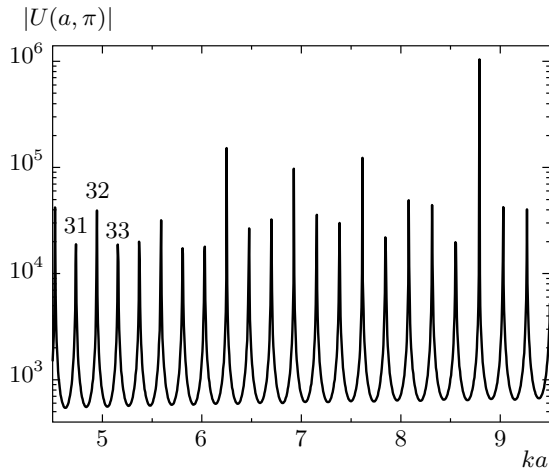


Рис. 8. АЧХ цилиндра из метаматериала с параметрами $\varepsilon = -1.001$, $\mu = -0.98$; $kr_0 = ka + 0.15$; $\varphi = \pi$

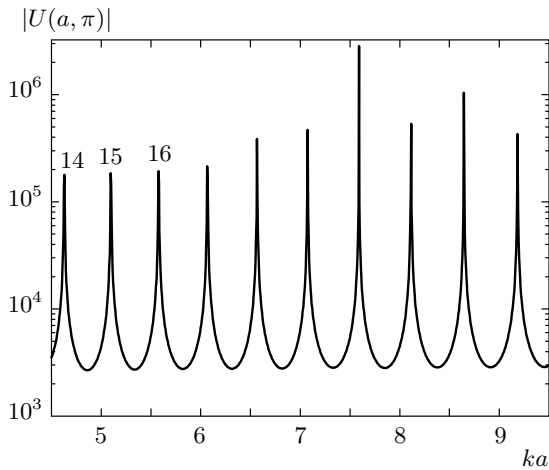


Рис. 9. АЧХ цилиндра из метаматериала с параметрами $\varepsilon = -1.01$, $\mu = -0.98$; $kr_0 = ka + 0.15$; $\varphi = \pi$

щего источника радикальным образом изменяются при малых отклонениях величин ε и μ от значения минус единица. Продемонстрируем это на следующих примерах.

Поведение поля в полосе частот будем описывать с помощью амплитудно-частотной характеристики (АЧХ), под которой будем понимать зависимость модуля поля на поверхности цилиндра в точке $r = a$, $\varphi = \pi$ от безразмерного параметра ka . Частотной дисперсией метаматериала пренебрегаем.

На рис. 8, 9 изображены АЧХ цилиндров с параметрами:

$$\varepsilon = -1.001, \quad \mu = -0.98 \quad (15)$$

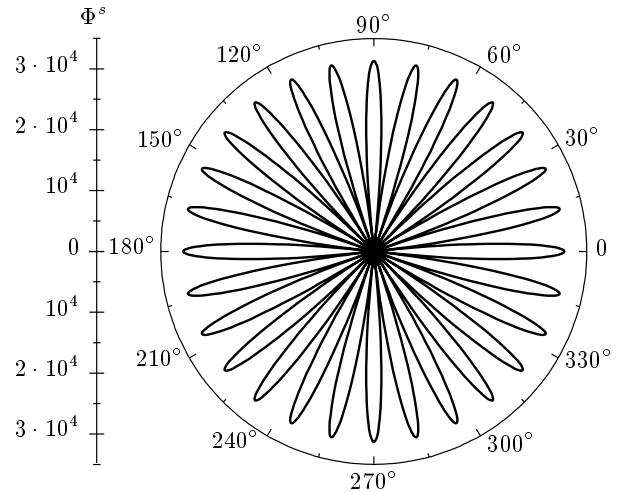


Рис. 10. Модуль диаграммы рассеянного поля $\Phi^s(\varphi)$ для цилиндра при $\varepsilon = -1.01$, $\mu = -0.98$; $ka = 4.62778205$; $kr_0 = ka + 0.15$

и

$$\varepsilon = -1.01, \quad \mu = -0.98. \quad (16)$$

Кривые на рис. 8, 9 представляют собой последовательности почти эквидистантно расположенных резонансных пиков. Несмотря на то что материальные параметры (15) и (16) весьма близки, кривые на рис. 8, 9 различаются числом резонансов в одном и том же интервале частот более, чем в два раза. Распределение поля вдоль поверхности цилиндра и диаграмма рассеяния на каждой из резонансных частот с большой точностью описываются единственной азимутальной гармоникой $\cos(m\varphi)$. При этом индексы m , совпадающие с номерами резонансов на рис. 8, 9 (они указаны для трех низших резонансов), также различаются в два раза.

Важно отметить, что амплитуда гармоники $\cos(m\varphi)$ очень велика в ближнем поле (порядка 10^8-10^9) и остается достаточно большой в дальнем поле ($\Phi^s(\varphi)$ порядка 10^4 , см. рис. 10). Заметим, что модуль диаграммы направленности падающего поля $\Phi^0(\varphi)$ равен единице.

На рис. 11 изображено распределение модуля полного поля по радиусу вдоль направления $\varphi = \pi$ при тех же параметрах, что и на рис. 10. Видно, что кривая содержит два участка $kr < 10$ и $kr > 20$, на которых поле описывается функциями $|U| \sim (kr)^{-m}$ и $|U| \sim (kr)^{-1/2}$. Эти участки соответствуют ближней и дальней зонам дифракционного поля.

Обсуждаемые эффекты можно объяснить, рассматривая цилиндр как кольцевой резонатор для поверхностных волн. Действительно, вдоль плоской

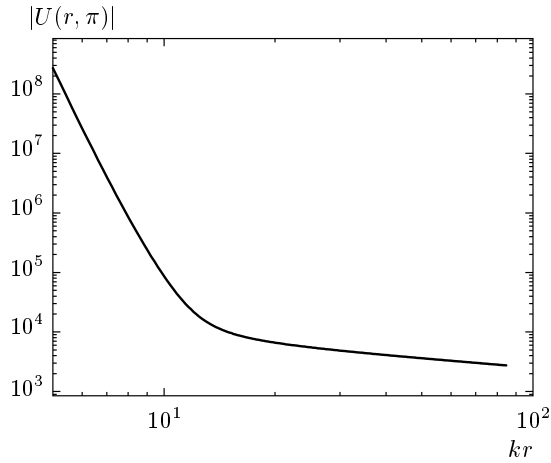


Рис. 11. Радиальное распределение модуля полного поля вне цилиндра при $\varepsilon = -1.01$, $\mu = -0.98$; $ka = 4.62778205$; $kr_0 = ka + 0.15$

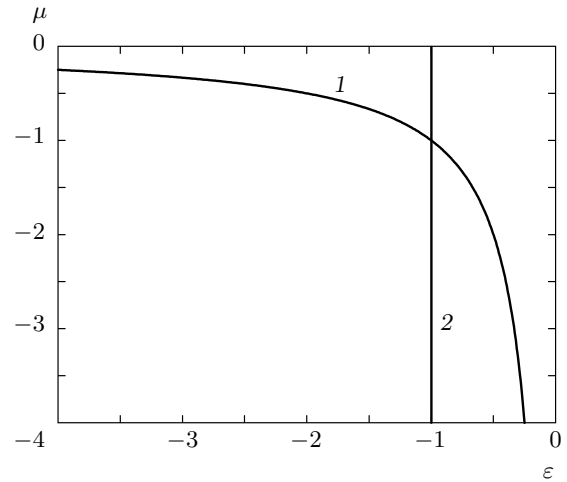


Рис. 12. Области существования поверхностных волн

границы полупространства, заполненного средой с параметрами $\varepsilon < 0$, $\mu < 0$, может распространяться незатухающая поверхностная волна с постоянной распространения h , которая определяется из соотношения [1]

$$\frac{h^2}{k^2} = \frac{\varepsilon(\varepsilon - \mu)}{\varepsilon^2 - 1}. \quad (17)$$

Значения материальных параметров, где существует эта поверхностная волна, находятся в третьем квадранте плоскости (ε, μ) и лежат в областях 1 и 2, расположенных между двумя пересекающимися в точке $(-1, -1)$ линиями: вертикальной прямой $\varepsilon = -1$ и гиперболой $\mu = 1/\varepsilon$ (см. рис. 12). В этих областях выражение (17) одновременно удовлетворяет условиям

$$\frac{h^2}{k^2} > 1, \quad \frac{h^2}{k^2} > \varepsilon\mu,$$

т. е. условиям убывания поля поверхностной волны при удалении от границы раздела сред.

При $ka \gg 1$ можно пренебречь кривизной поверхности цилиндра и определять резонансные частоты кольцевого резонатора из соотношения $ha = m$, откуда с учетом выражения (17) следует формула для расстояния между соседними резонансными частотами:

$$\Delta(ka) = \sqrt{\frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon(\varepsilon - \mu)}}. \quad (18)$$

Материальные параметры (15), (16) расположены в области существования поверхностной волны и для этих параметров из формулы (18) соответственно получим: $\Delta(ka) \approx 0.3$ и $\Delta(ka) \approx 0.8$. Заметим, что в

области высоких частот расстояния между соседними резонансами на рис. 8, 9 составляют $\Delta(ka) \approx 0.25$ и $\Delta(ka) \approx 0.6$. Таким образом, плоская модель границы позволяет на качественном уровне описать резонансные свойства метаматериального цилиндра.

Покажем, что уход из режима существования поверхностных волн принципиально изменяет пространственное и частотное распределения поля. Выберем следующие значения материальных параметров, которые находятся вне областей 1 и 2 на рис. 12:

$$\varepsilon = -0.98, \quad \mu = -1.001. \quad (19)$$

Этому случаю соответствует АЧХ, показанная на рис. 13. Видно, что она, в отличие от кривых на рис. 8, 9, не содержит высокочастотных резонансов. Кроме того, при этих значениях параметров отчетливо проявляется эффект субволновой локализации поля, что видно из рис. 14, на котором представлено распределение поля на поверхности цилиндра в частотной точке $ka = 6$. Таким образом, этот эффект реализуется не только при $\varepsilon = \mu = -1$, но и в некоторой области параметров ε, μ вблизи точки $(-1, -1)$.

Из рис. 14 следует также, что локальные максимумы поля $U(a, \varphi)$ на поверхности цилиндра значительно превосходят амплитуду падающего поля $U^0(a, \varphi)$ в этих точках. Поэтому можно говорить также и об эффекте нерезонансного усиления электромагнитного поля на цилиндрической границе метаматериала. Напомним, что поле на границе возрастает с увеличением радиуса цилиндра a (см. рис. 7). Предельный случай этого эффекта иллюстрирует

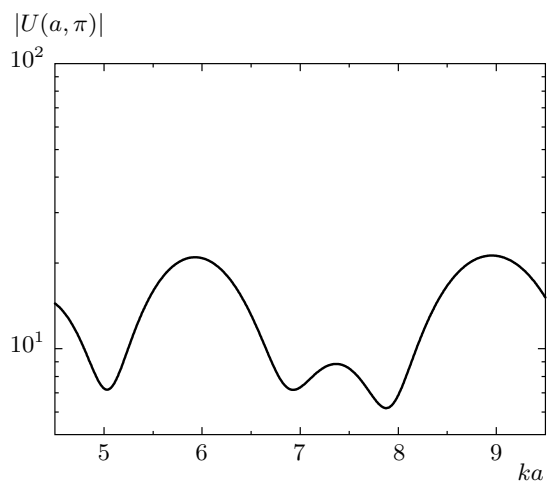


Рис. 13. АЧХ цилиндра из метаматериала с параметрами $\epsilon = -0.98$, $\mu = -1.001$; $kr_0 = ka + 0.15$; $\varphi = \pi$

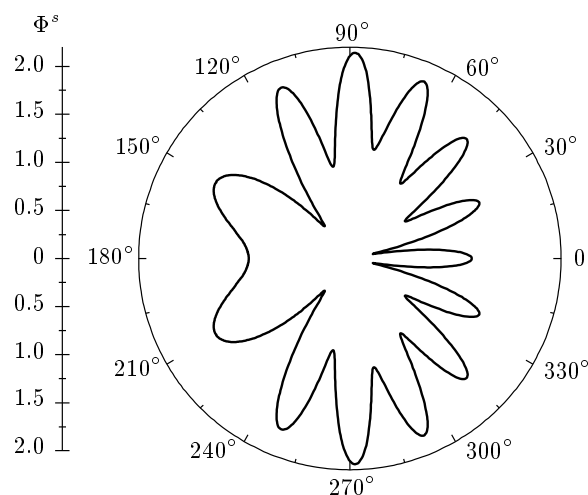


Рис. 15. Модуль диаграммы рассеяния для цилиндра из метаматериала при $\epsilon = -0.98$, $\mu = -1.001$; $ka = 9.5$, $kr_0 = 9.65$

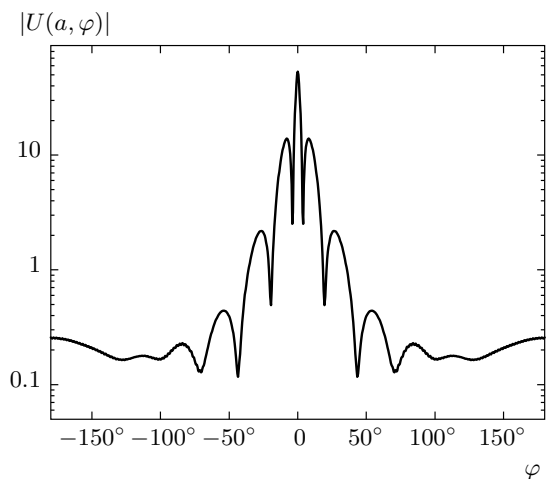


Рис. 14. Модуль рассеянного поля на поверхности цилиндра из метаматериала с параметрами $\epsilon = -0.98$, $\mu = -1.001$; $ka = 6$, $kr_0 = 6.15$

4. ВЫВОДЫ

Исследованы пространственная структура и спектральные свойства электромагнитных полей вблизи границ тел из метаматериалов. Показано, что электромагнитное поле, возникающее при возбуждении точечным источником цилиндра из метаматериала с электродинамическими параметрами $\epsilon \rightarrow -1$, $\mu \rightarrow -1$, существенным образом зависит от направления, по которому эти параметры в плоскости (ϵ, μ) приближаются к особой точке $(-1, -1)$. Исследованы свойства полей в полосе частот. Установлены области параметров, где существуют высокодобротные резонансы. Показано, что на резонансной частоте поле концентрируется вблизи границы и с большой точностью описывается одной азимутальной гармоникой $\cos(m\varphi)$. Обнаружены и исследованы нерезонансные режимы, которые характеризуются концентрацией поля не только вблизи границы, но и вдоль нее. Эти режимы сопровождаются эффектом субволновой локализации поля, когда размер пятна может иметь порядок $\lambda/10$, а также эффектом нерезонансного усиления, когда полное поле на границе метаматериала может значительно превышать величину падающего поля в широкой полосе частот.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-02-00062-а).

задача о дифракции на полупространстве с параметрами $\epsilon = \mu = -1$, когда коэффициент усиления поля становится бесконечно большим.

На рис. 15 приведена диаграмма рассеяния для цилиндра с параметрами (19). Диаграмма содержит большое число лепестков различной амплитуды и ширины. Поскольку амплитуды лепестков превышают единицу, в дальней зоне вкладом падающего поля можно пренебречь, что является подтверждением эффекта нерезонансного усиления поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Шатров, Радиотехн. и электрон. **52**, 909 (2007).
2. А. Б. Петрин, Письма в ЖЭТФ **87**, 550 (2008).
3. А. Б. Петрин, ЖЭТФ **134**, 436 (2008).
4. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, Наука, Москва (1979).
5. В. Z. Katsenelenbaum, *High-Frequency Electrodynamics*, Wiley-VCH, Weinheim (2006).
6. А. П. Анютин, И. П. Коршунов, А. Д. Шатров, ЖТФ **84** (2014).
7. А. Г. Кюркчан, С. А. Минаев, А. Л. Соловейчик, Радиотехн. и электрон. **46**, 666 (2001).
8. А. П. Анютин, А. Г. Кюркчан, С. А. Минаев, Радиотехн. и электрон. **47**, 955 (2002).
9. А. П. Анютин, И. П. Коршунов, А. Д. Шатров, Радиотехн. и электрон. **58**, 679 (2013).
10. А. П. Анютин, Радиотехн. и электрон. **56**, 1029 (2011).