

НЕЛИНЕЙНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В ТОНКОМ ЖИДКОМ СЛОЕ ПРИ ВОЛНООБРАЗОВАНИИ

*Л. А. Прокудина**

*Южно-Уральский государственный университет
454080, Челябинск, Россия*

Поступила в редакцию 20 июня 2013 г.

Представлена математическая модель состояния свободной поверхности тонкого слоя жидкости (жидкой пленки) в теплообменных процессах конденсации и испарения. Изучено волновое течение жидкой пленки при неоднородности поверхностного натяжения. В рамках нелинейного параболического уравнения исследовано нелинейное развитие возмущений, принадлежащих непрерывной полосе волновых чисел, на поверхности тонкого слоя жидкости. Показано, что волновые пакеты, несущая волна которых лежит вблизи гармоники максимального инкремента, самоупорядочиваются, в результате на поверхности жидкой пленки реализуется монохроматическая волна. При возбуждении волнового пакета в окрестности кривой нейтральной устойчивости проявляется эффект направленного переноса энергии к волнам в окрестности гармоники максимального инкремента.

DOI: 10.7868/S0044451014030173

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение волнового течения тонкого слоя вязкой жидкости (жидкой пленки), начатое П. Л. Капицей [1, 2], получило дальнейшее развитие в работах [3, 4]. Исследования пленочных течений обусловлено, прежде всего, их прикладным значением [5–7]. Технологические процессы, связанные с переносом тепла и массы через поверхность раздела газ–жидкость, широко распространены в химической, нефтехимической, энергетической, металлургической, пищевой промышленности. Пленочные аппараты, в которых реализуется течение тонких жидких пленок под действием силы тяжести, весьма перспективны в химической и нефтехимической технологиях. В жидких пленках обеспечиваются высокие скорости переноса тепла и массы в сочетании с малой толщиной пленки. Технологические процессы в жидких пленках связаны с понятиями неустойчивости, нелинейности, нестационарности, а решение задач течения жидких пленок проведено, как правило, в линейном приближении. Основным недостатком

линейной теории, как отмечено в работе [6], является то, что она не позволяет определить амплитуду волны. Развитие нелинейной теории [4, 6, 8] волновых течений при гравитационном стекании жидких пленок позволило рассчитать амплитуду волны оптимального режима течения. Исследования нелинейных волн интенсивно продолжаются [9–13] и связаны с созданием нелинейных математических моделей, адекватно отображающих реальный механизм нелинейного волнообразования в жидких пленках при различных числах Рейнольдса.

В данной работе представлена математическая модель волнового течения трехмерной жидкой пленки [11]. Последовательное применение методов узких полос [10, 14] и возмущений позволило вывести нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных для отклонения свободной поверхности неизотермической жидкой пленки от невозмущенного состояния для чисел Рейнольдса $Re \leq 20$ [15]. Это уравнение является нелинейной математической моделью состояния свободной поверхности жидкой пленки в теплообменных процессах (конденсация, испарение).

Жидкая пленка, являясь нелинейной открытой системой (из-за обмена веществом, энергией), позволяет подойти к решению таких чрезвычайно важ-

*E-mail: prokudina-la@mail.ru

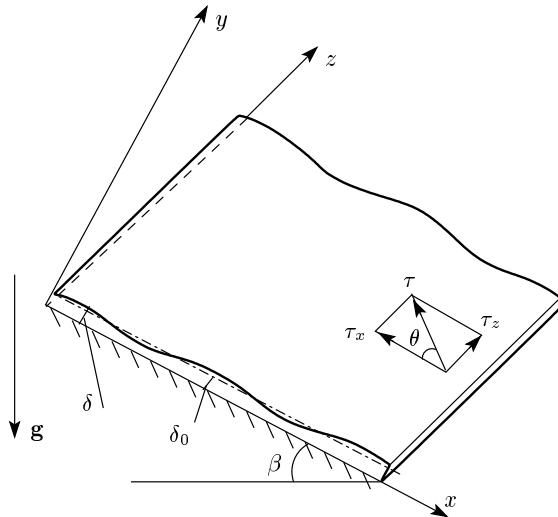


Рис. 1. Схема течения жидкой пленки

ных и интересных проблем, как самоорганизация и образование структур. В работе представлено нелинейное параболическое уравнение [15, 16], которое относится к числу базовых моделей нелинейных сред (модель Гинзбурга–Ландау). В рамках данной модели исследовано долговременное нелинейное развитие и взаимодействие возмущений в жидкой пленке.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОЛНОВОГО ТЕЧЕНИЯ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ

Рассмотрим течение тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости (жидкой пленки) толщиной δ под действием силы тяжести по твердой наклонной плоскости, сопровождающееся обдувом ее свободной поверхности парогазовым потоком. Введем прямоугольную систему координат $x y z$, при этом плоскость xz связана с поверхностью, по которой движется пленка, ось x направлена по течению пленки, ось y — по нормали к пленке жидкости (рис. 1).

Математическая модель течения трехмерной жидкой пленки толщиной δ представляет собой систему уравнений Навье–Стокса и уравнения неразрывности с граничными условиями, учитывающими влияние процессов теплопереноса, [11]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_+}{\partial t_+} + u_+ \frac{\partial u_+}{\partial x_+} + v_+ \frac{\partial u_+}{\partial y_+} + w_+ \frac{\partial u_+}{\partial z_+} &= \\ &= -\frac{\partial P_+}{\partial x_+} + F_x + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u_+}{\partial x_+^2} + \frac{\partial^2 u_+}{\partial y_+^2} + \frac{\partial^2 u_+}{\partial z_+^2} \right), \\ \frac{\partial v_+}{\partial t_+} + u_+ \frac{\partial v_+}{\partial x_+} + v_+ \frac{\partial v_+}{\partial y_+} + w_+ \frac{\partial v_+}{\partial z_+} &= \\ &= -\frac{\partial P_+}{\partial y_+} + F_y + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_+}{\partial x_+^2} + \frac{\partial^2 v_+}{\partial y_+^2} + \frac{\partial^2 v_+}{\partial z_+^2} \right), \quad (1) \\ \frac{\partial w_+}{\partial t_+} + u_+ \frac{\partial w_+}{\partial x_+} + v_+ \frac{\partial w_+}{\partial y_+} + w_+ \frac{\partial w_+}{\partial z_+} &= \\ &= -\frac{\partial P_+}{\partial z_+} + F_z + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w_+}{\partial x_+^2} + \frac{\partial^2 w_+}{\partial y_+^2} + \frac{\partial^2 w_+}{\partial z_+^2} \right), \\ \frac{\partial u_+}{\partial x_+} + \frac{\partial v_+}{\partial y_+} + \frac{\partial w_+}{\partial z_+} &= 0; \\ y = 0: \quad u_+ = w_+ = 0, \quad v_+ = V_0; \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = \delta: \quad \frac{1}{\text{Re}} \left[2 \frac{\partial u_+}{\partial x_+} \frac{\partial \delta_+}{\partial x_+} - 2 \frac{\partial v_+}{\partial y_+} \frac{\partial \delta_+}{\partial x_+} - \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial v_+}{\partial x_+} + \frac{\partial u_+}{\partial y_+} \right) + \frac{\partial \delta_+}{\partial z_+} \left(\frac{\partial u_+}{\partial z_+} + \frac{\partial w_+}{\partial x_+} \right) \right] + \\ + M \frac{\partial \delta_+}{\partial x_+} + N \left(\frac{\partial^2 u_+}{\partial x_+^2} + \frac{\partial^2 w_+}{\partial x_+ \partial z_+} \right) + \tau_x = 0; \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Re}} \left[2 \frac{\partial w_+}{\partial z_+} \frac{\partial \delta_+}{\partial z_+} - 2 \frac{\partial v_+}{\partial y_+} \frac{\partial \delta_+}{\partial z_+} - \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial w_+}{\partial y_+} + \frac{\partial v_+}{\partial z_+} \right) + \frac{\partial \delta_+}{\partial x_+} \left(\frac{\partial u_+}{\partial z_+} + \frac{\partial w_+}{\partial x_+} \right) \right] + \\ + M \frac{\partial \delta_+}{\partial z_+} + N \left(\frac{\partial^2 w_+}{\partial z_+^2} + \frac{\partial^2 u_+}{\partial x_+ \partial z_+} \right) + \tau_z = 0; \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_+ = \frac{2}{\text{Re}} \left[\frac{\partial v_+}{\partial y_+} - \frac{\partial \delta_+}{\partial x_+} \left(\frac{\partial u_+}{\partial y_+} + \frac{\partial v_+}{\partial x_+} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\partial \delta_+}{\partial z_+} \left(\frac{\partial w_+}{\partial y_+} + \frac{\partial v_+}{\partial z_+} \right) \right] - \sigma_+ \left(\frac{\partial^2 \delta_+}{\partial x_+^2} + \frac{\partial^2 \delta_+}{\partial z_+^2} \right) + \\ + P_0 - \text{sign } \Delta T \frac{\rho_1 / \rho_2 - 1}{(\text{Re Pr Ku})^2} \frac{1}{\delta^2}. \quad (5) \end{aligned}$$

Условие на свободной поверхности жидкой пленки при фазовых превращениях имеет вид

$$\frac{\partial \delta}{\partial t_+} = v_+ - u_+ \frac{\partial \delta}{\partial x_+} - w_+ \frac{\partial \delta}{\partial z_+} + \frac{1}{\text{Re Pr Ku}} \frac{1}{\delta}. \quad (6)$$

В формулах (1)–(6) безразмерные величины

$$u_+ = \frac{u}{u_0}, \quad v_+ = \frac{v}{u_0}, \quad w_+ = \frac{w}{u_0}$$

— проекции скорости на соответствующие оси координат; $t_+ = t u_0 / \delta_0$ — время;

$$x_+ = \frac{x}{\delta_0}, \quad y_+ = \frac{y}{\delta_0}, \quad z_+ = \frac{z}{\delta_0}$$

— переменные; $\delta_+ = \delta/\delta_0$ — толщина жидкой пленки; $Re = u_0\delta_0\rho/\mu$ — число Рейнольдса;

$$F_x = \frac{g_x\delta_0}{u_0^2}, \quad F_y = -\frac{g_y\delta_0}{u_0^2}, \quad F_z = \frac{g_z\delta_0}{u_0^2}$$

— проекции числа Фруда на соответствующие оси координат; $P_+ = P/\rho u_0^2$ — давление;

$$N = \frac{k + e}{\rho\delta_0^2 u_0}$$

— параметр поверхностной вязкости;

$$\bar{\tau}_x = \frac{\tau_x}{\rho u_0^2}, \quad \bar{\tau}_z = \frac{\tau_z}{\rho u_0^2}$$

— проекции касательного напряжения; $M = M_T + M_K$ — параметр Марангони,

$$M_T = \frac{\partial\sigma}{\partial T^0} \left(\frac{\partial T^0}{\partial y} \right)_{y=\delta} \frac{1}{\rho u_0^2}, \quad M_K = \frac{\partial\sigma}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial\delta} \frac{1}{\rho u_0^2};$$

$Pr = \rho c_p \nu/\lambda$ — число Прандтля; $Ku = r'/c_p \Delta T$ — число фазового перехода; $\sigma_+ = \sigma/\rho u_0^2 \delta_0$ — параметр поверхностного натяжения, где u_0 — средняя скорость основного течения жидкой пленки, δ_0 — толщина пленки в невозмущенном состоянии. В процессе конденсации $\text{sign } \Delta T = 1$, а в процессе испарения $\text{sign } \Delta T = -1$.

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СОСТОЯНИЯ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ

Для нахождения проекций скорости и давления в поставленной задаче (1) с граничными условиями (2)–(5) использовался метод узких полос [14, 15], позволивший ввести в (1)–(5) малый параметр $\varepsilon = \delta/\lambda$ (с учетом того, что толщина пленки δ много меньше длины волны λ). Разложив проекции скорости и давление в формулах (1)–(5) в ряд по малому параметру с последующим выделением членов при одинаковых степенях малого параметра, получим системы дифференциальных уравнений для определения u , v , w , P в различных приближениях. Подставив найденные по двум первым приближениям проекции скорости в условие (6), получим нелинейное дифференциальное уравнение для отклонения $\psi(x, z, t)$ свободной поверхности неизотермической трехмерной жидкой пленки от невозмущенного состояния для диапазона чисел Рейнольдса $Re \leq 20$.

Уравнение содержит пространственные производные от первого до четвертого порядка и производные по времени как в линейной, так и нелинейной частях. Линейная часть уравнения свободной поверхности жидкой пленки записывается как

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Re Pr Ku} - \frac{1}{Re Pr Ku} \psi + \left(a_7 \frac{\partial}{\partial x} + a_9 \frac{\partial}{\partial z} + a_{13} \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} + \\ & + a_1 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + a_2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial z^2} + \\ & + a_3 \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} + a_4 \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial z^2} \right) + a_5 \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial z} \right) + \\ & + a_6 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a_8 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + \\ & + a_{10} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + a_{11} \frac{\partial \psi}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0. \quad (7) \end{aligned}$$

Коэффициенты уравнения (7) имеют вид

$$a_1 = -\frac{Re \sigma}{3}, \quad a_2 = 2a_1, \quad a_3 = a_1,$$

$$a_4 = -\frac{Re^2 F_x N}{2}, \quad a_5 = -\frac{Re^2 F_z N}{2},$$

$$a_6 = -\frac{Re F_y}{3} - \frac{Re M}{2} + \frac{3}{40} Re^3 F_x (\tau_x + F_x) + \frac{2}{3} \text{sign } \Delta T \frac{Re}{(Re Pr Ku)^2},$$

$$a_7 = \frac{5}{24} Re^2 F_x,$$

$$a_8 = \frac{3}{20} Re^3 F_x F_z + \frac{3}{40} Re^3 (F_z \tau_x + F_x \tau_z),$$

$$a_9 = \frac{5}{24} Re^2 F_z,$$

$$a_{10} = -\frac{Re F_y}{3} - \frac{Re M}{2} + \frac{3}{40} Re^3 F_z (\tau_z + F_z) + \frac{2}{3} \text{sign } \Delta T \frac{Re}{(Re Pr Ku)^2},$$

$$a_{11} = -Re F_x - Re \tau_x, \quad a_{12} = -Re F_z - Re \tau_z,$$

$$a_{13} = -1.$$

3.1. Неустойчивость жидкой пленки

Исследование неустойчивости жидкой пленки по отношению к возмущениям, волновой вектор k_Σ которых направлен под углом α к оси x :

$$k_\Sigma = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}, \quad \text{tg } \alpha = \frac{k_z}{k_x},$$

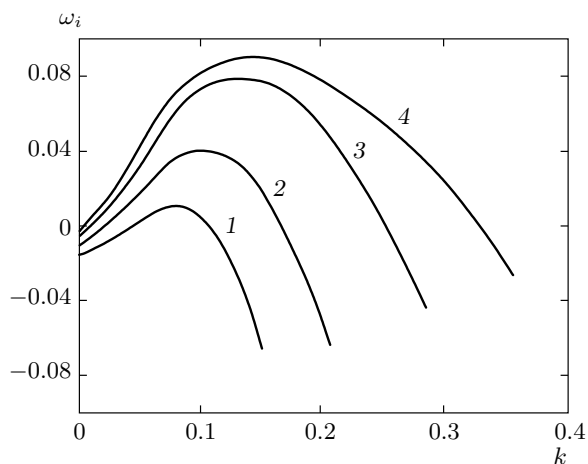


Рис. 2. Зависимость инкремента от волнового числа: $Re = 7$ (1), 10 (2), 15 (3), 20 (4)

где k_x и k_z — его проекции соответственно на оси x и z , проведено для диапазона чисел Рейнольдса $Re \leq 20$.

Полагая в (7)

$$\psi = A \exp i(k_x x + k_z z - \omega t),$$

получим дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} \omega(a_7 k_x + a_9 k_z + i) + a_1 k_x^4 + a_2 k_x^2 k_z^2 + a_3 k_z^4 - \\ - a_4 i k_x^3 - a_5 i k_z^3 - a_6 k_x^2 - a_8 k_x k_z - \\ - a_{10} k_z^2 + a_{11} i k_x + a_{12} i k_z - \frac{1}{Re Pr Ku} = 0, \end{aligned}$$

где $\omega = \omega_r + i\omega_i$, ω_r — частота, ω_i — инкремент.

На рис. 2 представлены кривые инкремента в режиме свободного стекания вертикальной пленки воды. На каждой кривой инкремента можно отметить характерные точки перегиба, которым соответствует значение волнового числа k_p ; максимального значения инкремента $k_{\omega_i max}$; а также точки, соответствующие нейтральной устойчивости $k_{\omega_i=0}$, в которых инкремент равен нулю.

Совокупность точек $k_{\omega_i=0}$ для исследуемого диапазона чисел Рейнольдса образует кривую нейтральной устойчивости, отделяющую область неустойчивости жидкой пленки, где $\omega_i > 0$, от области ее устойчивости. В области неустойчивости совокупность точек $k_{\omega_i max}$ образует кривую максимального роста возмущений (кривая максимального инкремента).

Экспериментальные исследования течения жидких пленок [2, 9] показали, что наиболее реализуемыми являются возмущения с максимальным значе-

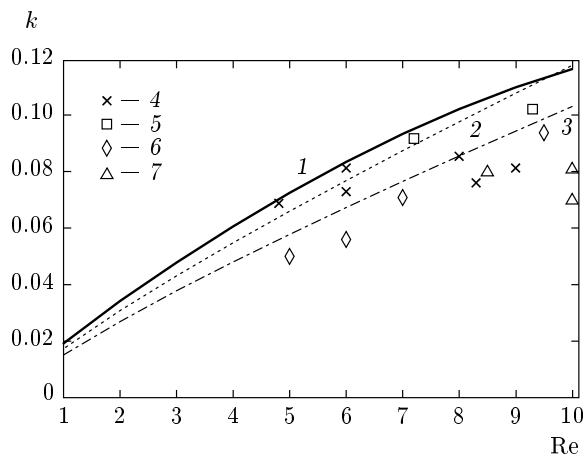


Рис. 3. Область неустойчивости вертикальной пленки воды. Кривые максимального инкремента: 1 — данные автора, 2 — [21], 3 — [22]; экспериментальные данные: 4 — [24], 5 — [2], 6 — [18], 7 — [5]

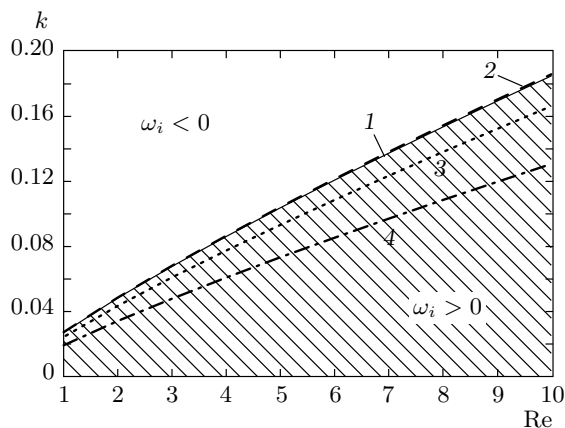


Рис. 4. Кривые нейтральной устойчивости вертикальной пленки воды: 1 — данные автора, 2 — [9], 3 — [21], 4 — [22]

нием инкремента ($\omega_i max$). Результаты вычислительных экспериментов для вертикальной пленки воды в сравнении с экспериментальными [2, 5, 17–20] и теоретическими [6, 9, 21–23] данными других исследователей представлены на рис. 3, 4. Фазовая скорость $c_r = \omega_r/k$ для каждого числа Рейнольдса в области неустойчивости жидкой пленки имеет минимальное значение ($c_r min$), которое соответствует волновому числу $k_{\omega_i max}$. С ростом числа Рейнольдса отмечается снижение величины фазовой скорости $c_r min$ (рис. 5).

При исследовании неустойчивости жидкой пленки в тепломассообменных процессах конденсации и

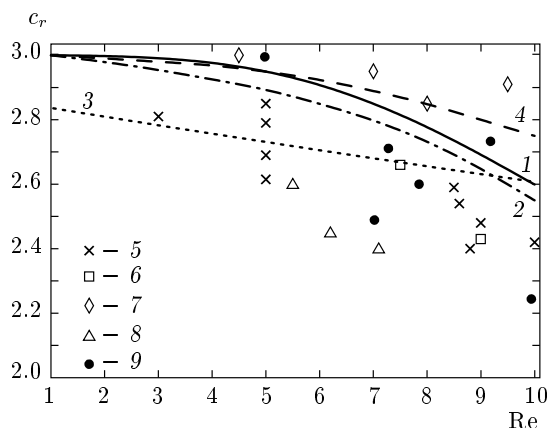


Рис. 5. Фазовая скорость гармоник максимального инкремента. Теоретические кривые: 1 — данные автора, 2 — [23], 3 — [6], 4 — [9]; экспериментальные данные: 5 — [17], 6 — [2], 7 — [18], 8 — [19], 9 — [20]

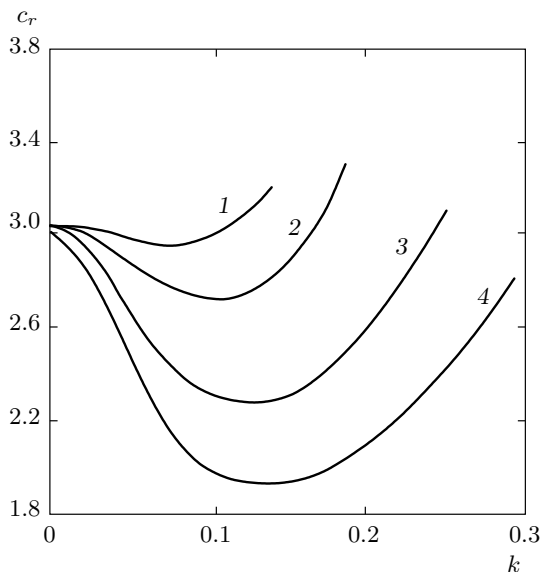


Рис. 7. Зависимости фазовой скорости от волнового числа: $Re = 7$ (1), 10 (2), 15 (3), 20 (4)

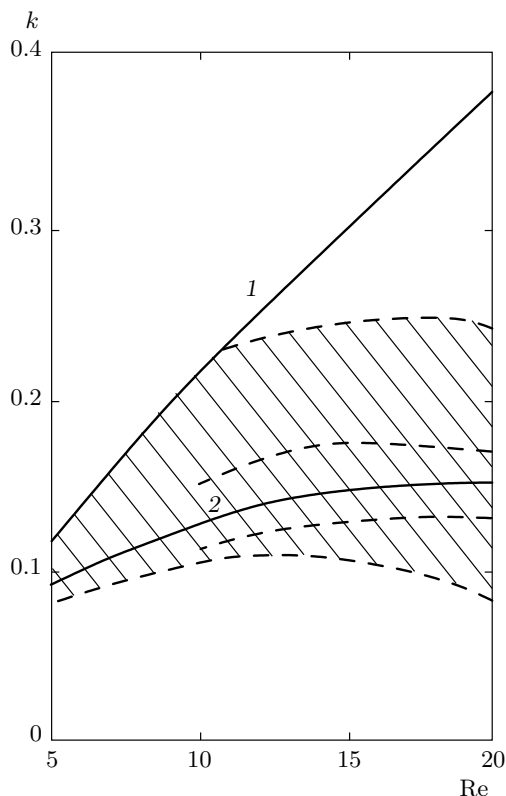


Рис. 6. Области неустойчивости и существования волновых режимов вертикальной пленки воды при испарении

испарения рассчитанные волновые характеристики позволили определить положение кривых нейтральной устойчивости и максимальной скорости роста возмущений (рис. 6). В области неустойчивого течения жидких пленок определены области существования волновых режимов. Например, для вертикальной пленки воды при испарении эти области представлены на рис. 6. Зависимость фазовой скорости от волнового числа показана на рис. 7.

Исследование наклонных возмущений, волновой вектор которых направлен под углом α к оси x , показало, что они наиболее устойчивы по сравнению с возмущениями, волновой вектор которых направлен вдоль оси x . Величина максимального значения инкремента наклонных возмущений в зависимости от угла наклона α уменьшается до 50 % по сравнению с величиной инкремента возмущений с углом $\alpha = 0$. Убывание скорости роста наклонных возмущений ($\alpha \neq 0$) приводит к заметному сокращению области неустойчивости жидкой пленки по диапазону волновых чисел (рис. 8). Наиболее быстро растущие гармоники сдвигаются в область длинных волн.

Любые изменения на межфазной поверхности при воздействии различных физико-химических факторов, представленных в формулах (1)–(5), качественным образом влияют на величину инкремента, частоту, фазовую скорость, положение кривых нейтральной устойчивости и максимальной скорости роста возмущений.

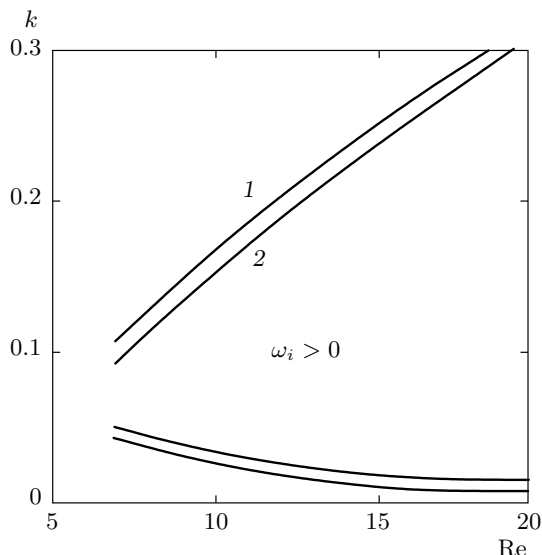


Рис. 8. Области неустойчивости вертикальной пленки воды при конденсации: $\alpha = 0$ (1), 10° (2)

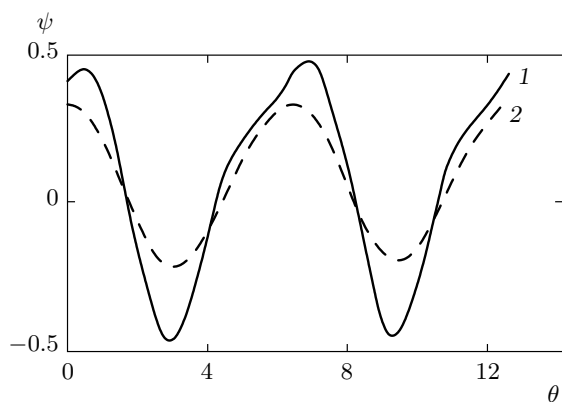


Рис. 9. Форма волны при $Re = 15$: 1 — $M = 1$, $N = 0$; 2 — $M = 1$, $N = 1$

3.2. Формы волн жидкой пленки

Поверхностное натяжение зависит от температуры и концентрации вещества на свободной поверхности пленки. Градиенты температуры и концентрации вызывают неоднородность поверхностного натяжения и ведут к появлению градиентов поверхностного натяжения. На межфазной поверхности возникают силы, природа которых определяется реальным физическим процессом, например, термокапиллярные силы возникают при течении пленки жидкости по нагретой стенке. Форма волны вертикальной пленки воды при неоднородности поверхностного натяжения представлена на рис. 9, кривая 1. На-

личие в жидкой пленке нерастворимых поверхностно-активных веществ, таких как масла, жиры (параметр N), вязкость которых больше вязкости воды и возрастает с увеличением их молекулярной массы, при движении жидкого слоя приводит к возникновению сил поверхностной вязкости, качественно влияющих на волновые характеристики течения трехмерной жидкой пленки и границу устойчивости. Пленки нерастворимых поверхностно-активных веществ, обладая большим внутренним трением, при движении тонкого слоя вязкой жидкости забирают значительную часть его энергии, что ведет к уменьшению скорости возмущенного течения и сглаживанию профиля волн (рис. 9, кривая 2).

4. НЕЛИНЕЙНОЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

В жидкой пленке, являющейся нелинейной открытой системой (обмен энергией, веществом), в результате развития неустойчивости осуществляется переход от ее старого состояния в новое состояние. Реализуемость того или иного состояния связана с нелинейным развитием и взаимодействием возмущений из непрерывной полосы спектра волновых чисел (волнового пакета) [10, 15]

$$\psi = \int_{k_{0x}-\Delta k_x}^{k_{0x}+\Delta k_x} \int_{k_{0z}-\Delta k_z}^{k_{0z}+\Delta k_z} F(k_\Sigma) \times \exp\{i(k_x x + k_z z - \omega t)\} dk_x dk_z, \quad (8)$$

где k_0 — центр волнового пакета, $\omega = \omega_r + i\omega_i$, $F(k_\Sigma)$ — фурье-компонента разложения, k_Σ — волновой вектор возмущений, при следующих допущениях: ширина полосы волновых чисел $\Delta k_\Sigma = o(\varepsilon)$, инкремент $\omega_i = \varepsilon^2 \bar{\omega}_i = o(\varepsilon^2)$, ε — малый параметр (отношение толщины пленки к длине волны).

Представив волновой пакет (8) в виде

$$\psi = A \exp\{i(k_{0x} x + k_{0z} z - \omega(k_0)t)\},$$

где комплексная амплитуда A огибающей волнового пакета является функцией «медленных» переменных $x_1 = \varepsilon x$, $z_1 = \varepsilon z$, $t_1 = \varepsilon t$, $t_2 = \varepsilon^2 t$ [10], получим нелинейное параболическое уравнение [16]:

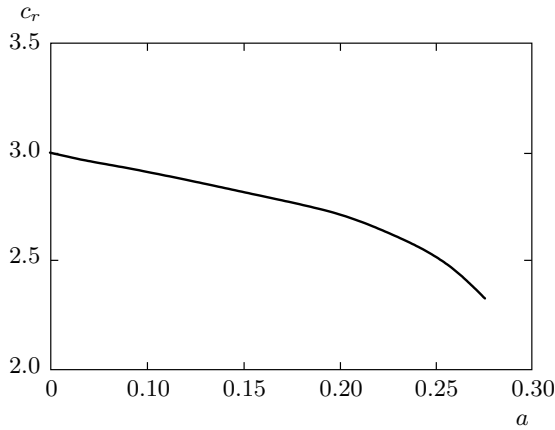


Рис. 10. Зависимость фазовой скорости от амплитуды

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A}{\partial t_2} + \frac{i}{\varepsilon} \frac{\partial \omega_i}{\partial k_x} \frac{\partial A}{\partial x_1} + \frac{i}{\varepsilon} \frac{\partial \omega_i}{\partial k_z} \frac{\partial A}{\partial z_1} - \\ & - \frac{i}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k_x^2} + i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k_x^2} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} - \frac{i}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k_z^2} + i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k_z^2} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial z_1^2} - \\ & - i \left(\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k_x \partial k_z} + i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k_x \partial k_z} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial z_1} = \bar{\omega}_i A - \\ & - (\beta_1 + i\beta_2) |A|^2 A. \end{aligned} \quad (9)$$

Коэффициенты уравнения (9) в явном виде выражаются через параметры волнового течения трехмерной жидкой пленки: инкремент, частоту и их производные первого и второго порядков. Коэффициенты при нелинейном члене уравнения (9) характеризуют нелинейное затухание возмущений (β_1), зависимость фазы от амплитуды (β_2).

Нелинейная теория волновых течений при гравитационном стекании жидких пленок позволила рассчитать фазовую скорость c_r и амплитуду a периодического течения, которые вычисляются по формулам:

$$c_r = \frac{\omega_r}{k} + \frac{\beta_2 a^2}{k}, \quad a^2 = \frac{\bar{\omega}_i}{\beta_i}.$$

На рис. 10 показана зависимость фазовой скорости от амплитуды волнового течения вертикальной жидкой пленки воды при свободном стекании. Установлено, что нелинейное развитие и взаимодействие возмущений для чисел Рейнольдса $Re \leq 7$ приводит к линейной зависимости фазовой скорости от амплитуды волнового течения жидкой пленки, а для чисел Рейнольдса $Re > 7$ эта зависимость носит нелинейный характер.

5. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО РАЗВИТИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ СПЕКТРАЛЬНО УЗКОГО ВОЛНОВОГО ПАКЕТА

В системе координат, движущейся с групповой скоростью

$$\eta = x_1 - \frac{\partial \omega_r}{\partial k_x} t_1,$$

одномерное нелинейное параболическое уравнение для амплитуды $A(\eta, t_2)$ огибающей волны,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A}{\partial t_2} + \frac{i}{\varepsilon} \frac{\partial \omega_i}{\partial k_x} \frac{\partial A}{\partial \eta} - \frac{i}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k_x^2} + i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k_x^2} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} = \\ & = \frac{\omega_i}{\varepsilon^2} A - (\beta_i + i\beta_2) |A|^2 A, \end{aligned}$$

в переменных [24]

$$A_0 = A \sqrt{\frac{\varepsilon^2 \beta_1}{\omega_i}}, \quad \tau = \frac{t_2 \omega_i}{\varepsilon^2}, \quad \eta_0 = \eta \sqrt{\frac{2\omega_i}{\varepsilon^2 \left| \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k_x^2} \right|}}$$

имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A_0}{\partial \tau} + i\alpha_3 \frac{\partial A_0}{\partial \eta_0} + \left(\text{sign} \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k_x^2} - i\alpha_1 \right) \frac{\partial^2 A_0}{\partial \eta_0^2} = \\ & = A_0 - (\text{sign} \beta_1 + i\alpha_2) |A_0|^2 A_0, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\partial^2 \omega_r / \partial k_x^2}{\left| \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k_x^2} \right|}, \quad \alpha_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_1|}, \\ \alpha_3 &= \frac{\partial \omega_i}{\partial k_x} \sqrt{\frac{2}{\omega_i \left| \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k_x^2} \right|}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Переход к безразмерным комплексам (11) в нелинейном параболическом уравнении (10) облегчает как постановку, так и анализ результатов проводимого численного эксперимента по развитию и взаимодействию возмущений волнового пакета. Безразмерные комплексы $\alpha_{1,2,3}$ (11) характеризуют дисперсию системы, т. е. отношение дисперсии групповой скорости к дисперсии инкремента (α_1), нелинейную зависимость фазы от амплитуды (α_2), смещение центра волнового пакета от гармоники максимального инкремента (α_3). Безразмерные комплексы (11) являются управляющими параметрами. В ходе вычислительных экспериментов установлено влияние каждого из них на развитие возмущений в жидкой пленке. Особое качественное влияние на развитие и взаимодействие возмущений волнового пакета связано с параметром $\alpha_2 \neq 0$, который характеризует нелинейную дисперсию системы.

Долговременное нелинейное развитие волновых пакетов рассчитывалось методом прямых. После подстановки $A_0 = U + iV$ в уравнение (10) действительная и мнимая части разделены и осуществлен переход от системы уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dU_j}{dt} &= \alpha_3 V_j' + \text{sign} \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k_x^2} U_j'' - \alpha_1 V_j'' + \\ &+ U_j - (U_j^2 + V_j^2)(\text{sign} \beta_1 U_j - \alpha_2 V_j), \\ \frac{dV_j}{dt} &= -\alpha_3 U_j' + \text{sign} \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k_x^2} V_j'' + \alpha_1 U_j'' + \\ &+ V_j - (U_j^2 - V_j^2)(\text{sign} \beta_1 V_j + \alpha_2 U_j), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} U_j' &= \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2\Delta x}, & V_j' &= \frac{V_{j+1} - V_{j-1}}{2\Delta x}, \\ U_j'' &= \frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{\Delta x^2}, & V_j'' &= \frac{V_{j+1} - 2V_j + V_{j-1}}{\Delta x^2}, \\ & & j &= 1, 2, \dots, 100. \end{aligned}$$

Для решения системы дифференциальных уравнений (12) применялся метод Рунге–Кутты четвертого порядка точности. Длина участка L , занятого возбужденным волновым пакетом, и интервал дискретности волнового пакета связаны соотношением $\Delta k = 2\pi/L$. На концах отрезка L принимались периодические граничные условия. Вычислительные эксперименты по эволюции возмущений проведены при возбуждении на поверхности пленки воды волнового пакета в окрестности кривой нейтральной устойчивости, а также вблизи гармоники максимального инкремента.

5.1. Окрестность гармоники максимального инкремента

Для волнового пакета в окрестности $\omega_{i \max}$ (см. рис. 6) нелинейное взаимодействие возмущений таково, что наблюдаются незначительные изменения коэффициентов β_1 и β_2 — они практически сохраняют свое значение. В этих условиях для волновых пакетов в окрестности гармоники максимального инкремента свойственна самая высокая степень неустойчивости системы. Происходит сужение спектра волнового пакета, что ведет к монохроматической волне. На рис. 11 для вертикальной пленки воды ($Re = 10$) представлена эволюция амплитуды огибающей такого волнового пакета.

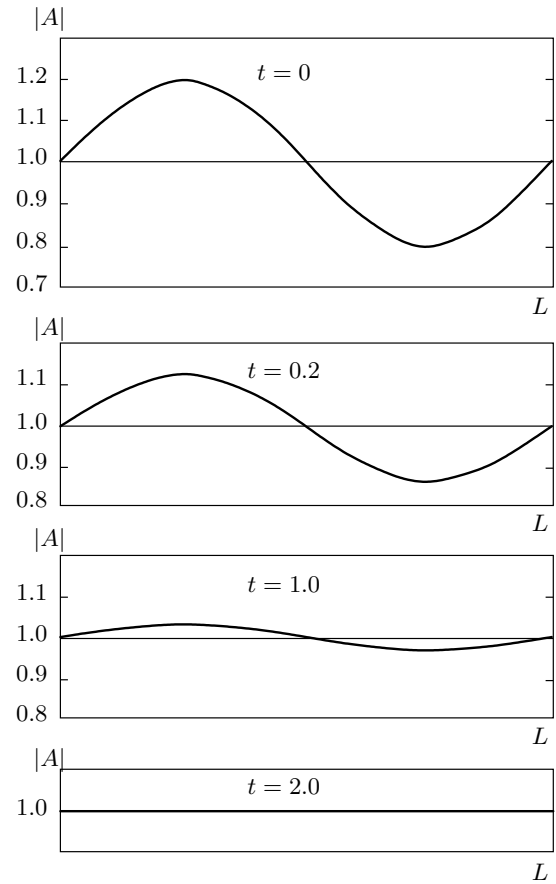


Рис. 11. Эволюция амплитуды огибающей волнового пакета

В экспериментах, проведенных на жидких пленках [2], также реализуются монохроматические волновые режимы с волновыми числами из окрестности гармоники максимального инкремента.

5.2. Окрестность кривой нейтральной устойчивости

При возбуждении волнового пакета в окрестности кривой нейтральной устойчивости для чисел Рейнольдса $Re \leq 20$ в результате нелинейного взаимодействия возмущений наблюдается направленный перенос энергии к волнам, лежащим в окрестности гармоники максимального инкремента. Направленный перенос энергии ведет к росту волн, обладающих максимальной величиной инкремента, и затуханию остальных мод. График эволюции мод для числа Рейнольдса $Re = 20$ приведен на рис. 12.

Существование в жидких пленках явления направленного переноса энергии связано с продольной неустойчивостью, которая может быть вызвана

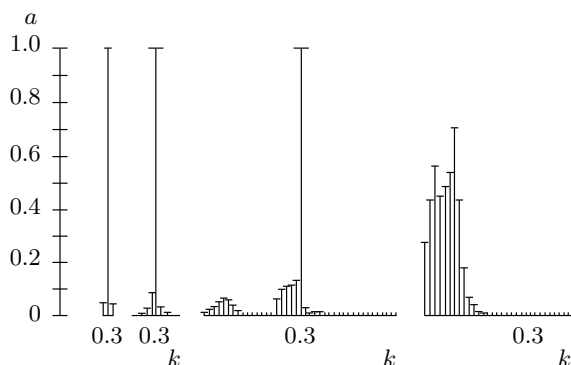


Рис. 12. Амплитуды гармоник волнового пакета

изменением знака второй производной $\partial^2\omega_i/\partial k^2$. О данном типе неустойчивости при течении жидких пленок можно судить по наличию точки перегиба на кривой инкремента (см. рис. 2). Продольная неустойчивость развивается в интервале волновых чисел от точки перегиба кривой инкремента до точки, соответствующей нейтральной устойчивости.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Представлена нелинейная математическая модель состояния свободной поверхности неизотермической трехмерной жидкой пленки для чисел Рейнольдса $Re \leq 20$.

2. В линейном приближении рассчитаны волновые характеристики: частота, инкремент, фазовая скорость. Показано существование точек перегиба на кривых инкремента. Определены волновые числа, соответствующие максимальным значениям инкремента для исследуемого диапазона чисел Рейнольдса.

3. Определены наиболее неустойчивые возмущения, волновой вектор которых направлен вдоль оси x , по сравнению с наклонными возмущениями.

4. В нелинейном приближении рассчитаны формы волн на поверхности жидкой пленки при неоднородности поверхностного натяжения.

5. Выведено нелинейное параболическое уравнение для амплитуды огибающей волнового пакета, которое относится к одной из базовых моделей нелинейных сред (типа модели Гинзбурга – Ландау).

6. В нелинейном параболическом уравнении осуществлен переход к безразмерным комплексам (11), которые являются управляющими параметрами, облегчают как постановку вычислительных экспериментов, так и анализ результатов.

7. В рамках одномерного нелинейного параболического уравнения проведены вычислительные эксперименты, связанные с нелинейным развитием и взаимодействием возмущений на поверхности тонкого жидкого слоя, анализ результатов которых показал следующее.

— В окрестности гармоники максимального инкремента реализуются монохроматические волновые режимы.

— В окрестности кривой нейтральной устойчивости в результате нелинейного взаимодействия возмущений наблюдается направленный перенос энергии к волнам, лежащим в окрестности гармоники максимального инкремента. Направленный перенос энергии ведет к росту волн, обладающих максимальной величиной инкремента, и затуханию остальных мод.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Л. Капица, ЖЭТФ **18**, 3 (1948).
2. П. Л. Капица, С. П. Капица, ЖЭТФ **19**, 105 (1949).
3. Л. П. Холпанов, ИФЖ **8**, 488 (1965).
4. В. Я. Шкадов, Изв. АН СССР, сер. МЖГ **1**, 43 (1967).
5. В. М. Олевский, В. Р. Ручинский, А. М. Кашников, В. И. Чернышев, *Пленочная тепло- и массообменная аппаратура*, Химия, Москва (1998).
6. Л. П. Холпанов, В. Я. Шкадов, *Гидродинамика и тепло-массообмен с поверхностью раздела*, Наука, Москва (1990).
7. С. В. Алексеенко, В. Е. Накоряков, Б. Г. Покусаев, *Волновое течение пленок жидкости*, Наука, Москва (1992).
8. В. Я. Шкадов, Изв. АН СССР, сер. МЖГ **2**, 20 (1968).
9. С. В. Алексеенко, В. Е. Накоряков, Б. Г. Покусаев, ПМТФ **20**(6), 77 (1979).
10. В. А. Елюхин, Л. А. Калимулина, Изв. АН СССР, сер. МЖГ **1**, 83 (1979).
11. Л. А. Прокудина, Г. П. Вяткин, ДАН **362**, 770 (1998).
12. А. Н. Белоглазкин, В. Я. Шкадов, Изв. РАН, сер. МЖГ **47**, 32 (2012).
13. С. П. Актершев, С. В. Алексеенко, ПМТФ **54**(2), 21 (2013).

14. Ю. П. Иванилов, Ж. вычислит. матем. и матем. физ. **1**, 1061 (1961).
15. Л. А. Прокудина, *Математическое моделирование нелинейной эволюции возмущений в жидкой пленке*, Изд. центр ЮУрГУ, Челябинск (2011).
16. Л. А. Прокудина, Г. П. Вяткин, ДАН **439**, 481 (2011).
17. L. O. Jones and S. Whitaker, AIChE J. **12**, 525 (1966).
18. F. P. Stainthorpe and J. M. Allen, Trans. Inst. Chem. Eng. (London) **43**, 85 (1965).
19. C. Massot, F. Irani, and E. N. Lightfoot, AIChE J. **12**, 445 (1966).
20. V. Penev, V. S. Krylov, Ch. Boyadjiev, and V. P. Vorotilin, Int. J. Heat Mass Transfer **15**, 7 (1972).
21. B. Gjevik, Phys. Fluids **13**, 1918 (1970).
22. C. S. Yih, Phys. Fluids **6**, 321 (1963).
23. В. Г. Левич, В. С. Крылов, В. П. Воротилин, ДАН СССР **183**, 6 (1968).
24. Л. А. Прокудина, Изв. Челяб. науч. центра УрОРАН **4**, 6 (2001).