

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ ВАКУУМНЫМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН

*Б. А. Векленко**, *В. П. Афанасьев*, *А. В. Лубенченко*

*Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»
111250, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 4 сентября 2013 г.

Методами квантовой электродинамики исследуется взаимодействие зондирующего потока электронов с продольными электромагнитными колебаниями фермиевской плазмы металлов (плазмонами). Квантовое описание плазмонов позволяет построить последовательную теорию процесса рассеяния и указать границы применимости существующих полуклассических теорий. Квантовое описание плазмонов приводит к понятию электромагнитного вакуума продольных волн, служащее предметом изучения настоящей работы. Вакуум продольных волн существенно деформирует диэлектрическую проницаемость плазмы, что влечет за собой уширение ленгмюровских пиков рассеянных электронов, не поддававшееся ранее теоретическому анализу. Наличие электромагнитного вакуума продольных волн плазмы существенно скажется на интегральной вероятности рассеяния электронов на плазмонах.

DOI: 10.7868/S004445101404003X

1. ВВЕДЕНИЕ

Характеристические потери энергии электронов, отраженных от поверхностей металлов, обнаруженные Рудбергом [1] в первой половине прошлого столетия, положили начало дискуссии о природе этого явления. Интерес к предмету возрос после работы Мертон и Ледера [2], когда стало ясно, что, во всяком случае, часть характеристических потерь электронов носит не индивидуальный, а коллективный характер. На рис. 1 представлена типичная зависимость числа зондирующих электронов, прошедших через слой плазмы, как функция потерянной ими энергии [3]. Отчетливо прослеживаются пики, отвечающие потерянной энергии кратной $\hbar\Omega$. Здесь \hbar — постоянная Планка, $\Omega = \sqrt{e^2 n / m}$ — ленгмюровская частота плазмы. Мы используем рационализированную гауссову систему единиц; e , m и n — соответственно заряд, масса и концентрация электронов плазмы.

Изысканная работа по построению квантовой теории пиков рассеяния на полуприближенно-логической основе была выполнена Ритчи [4]. В основе работы использовано предположение Пайнса и Бома [5] о том, что рассеиваемые электроны обмениваются

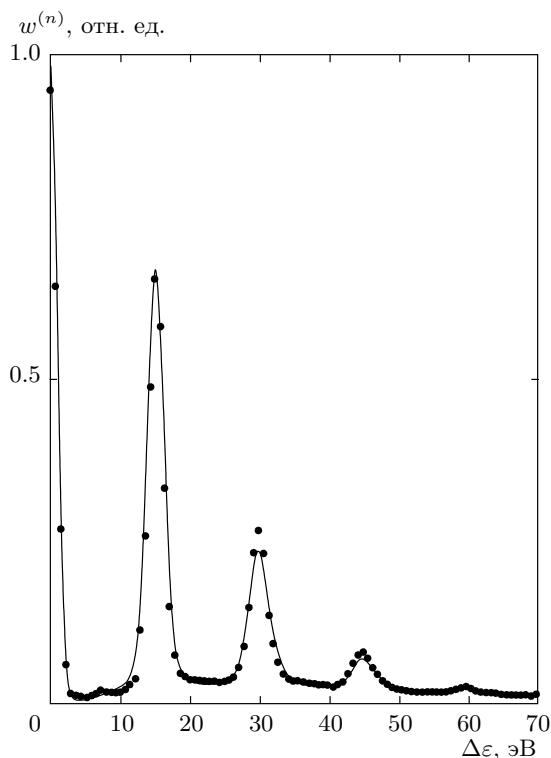


Рис. 1

*E-mail: VeklenkoBA@yandex.ru

энергией с ленгмюровскими [6] колебаниями (плазмонами) свободных (валентных) электронов в металлах, теория которых была предложена Власовым [7] как для максвелловской, так и для фермиевской плазм. Применительно к фермиевской плазме металлов эта теория развивалась далее Гольдманом [8], Силиным и Климонтовичем [9], а также Бомом и Пайнсом [10]. В работе Ритчи рассматривается постулированная им возможность излучения зондирующими электронами ленгмюровских квантов $\hbar\Omega$, но не вскрыт механизм реализации такой возможности. По этой причине работа носит полуфеноменологический характер, проявившийся в том, что не удалось в полной мере учесть зависимость результатов расчетов от постоянной Планка \hbar . В рамках этой работы учет зависимости диэлектрической проницаемости от \hbar оказывается неадекватным. Фактические результаты работы [4] лишь немного корректируют результаты более ранних исследований Феррелла [11], следующих из иных постулатов. В полной мере такие замечания относятся и к более поздним работам [12, 13], послужившим основой современных воззрений.

Суть проблемы и ее трудности наиболее ярко прослеживаются на примере низкотемпературной максвелловской электрон-ионной плазмы. Дело в том, что максвелловская плазма классична, постоянная Планка в ее теории не встречается. Зондирующий поток электронов, обладая энергией, заметно превышающей температуру плазмы, тоже классичен. Взаимодействие зондирующих электронов с плазмой определяется законом Кулона. Возникает вопрос о том, каким образом в теорию попадает постоянная Планка, определяющая потери энергии зондирующих электронов. Искусственное введение постоянной Планка всегда однобоко и неадекватно. В полной мере это относится к полуклассическим теориям, оперирующим с некантованным электромагнитным полем. Такие теории логически незамкнуты [14, 15]. Единственной последовательной возможностью оказывается квантовое описание электромагнитных колебаний плазмы, непосредственно приводящее к возникновению квантов $\hbar\Omega$. На необходимость квантования продольного электромагнитного поля в плазме из иных соображений указывалось в работах [16, 17]. Подчеркнем еще раз, что потеря электронами энергии $\hbar\Omega$, обнаруженная более пятидесяти лет тому назад, это прямая демонстрация следствий существования квантованного продольного ленгмюровского электромагнитного поля. Теории, построенные на иных основаниях, носят полуфеноменологический характер. В недавних

работах [18, 19] продолжает развиваться полуклассическая теория взаимодействия потока электронов с плазмой. Помимо отмеченных трудностей такая теория не позволяет рассчитывать спонтанное излучение зондирующих электронов, описываемых в средах плоской волной де Бройля.

В настоящей работе рассмотрен процесс взаимодействия потока электронов с ленгмюровскими колебаниями фермиевской плазмы. Как электроны, так и продольные электрические колебания плазмы описываются квантовым образом. Квантовое описание продольного электромагнитного поля приводит естественным образом к наличию электромагнитного вакуума. Именно взаимодействие зондирующих электронов с вакуумными колебаниями плазмы вынуждает их спонтанно излучать ленгмюровские кванты (плазмоны). Иного адекватного объяснения явлению не существует, так же как не существует иного объяснения спонтанному излучению возбужденных атомов, кроме как воздействие на них электромагнитного вакуума поперечных электромагнитных волн. Процесс излучения продольных ленгмюровских квантов зондирующими электронами в плазме аналогичен эффекту Вавилова–Черенкова [20], т. е. излучению быстрыми заряженными частицами в средах квантов поперечного электромагнитного поля.

Рассматриваемый в настоящей работе электромагнитный вакуум продольных плазмонов возможен только в средах, заполненных частицами конечной массы при конечной их концентрации. При стремлении концентрации частиц к нулю он исчезает. Вакуум продольных плазмонов обладает специфическими свойствами, часть из которых рассмотрена ниже. Этим он отличается от электромагнитного вакуума поперечных волн, свойства которого хорошо изучены.

Описывая излучение зондирующими электронами ленгмюровских квантов, последовательная квантовая теория требует выполнения законов сохранения энергии и импульса:

$$\varepsilon(\mathbf{p}_0) = \varepsilon(\mathbf{p}) + \hbar\Omega, \quad \mathbf{p}_0 = \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}. \quad (1)$$

Здесь $\varepsilon(\mathbf{p}_0)$ — энергия зондирующего электрона, обладающего импульсом \mathbf{p}_0 , \mathbf{p} — импульс электрона после излучения, \mathbf{k} — волновой вектор испущенного кванта. Уже в первом порядке теории возмущений предлагаемая теория вносит поправки в теории предыдущих работ [4, 12, 13], выводы которых, как правило, не согласуются с законами сохранения (1).

Но этого мало, электромагнитный вакуум ленгмюровских волн заметно меняет диэлектрическую

проницаемость плазмы и макроскопическим образом сказывается на дисперсионных соотношениях для электронов плазмы [17]. Влияние вакуумных флуктуаций на диэлектрическую проницаемость фермиевской плазмы рассматривалась в работе [21]. Экспериментальные следствия такого влияния служат предметом рассмотрений настоящей работы.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ

Мы опускаем обменное взаимодействие между электронами зондирующего потока и электронами плазмы. По этой причине будем говорить о падении на слой плазмы некоторых заряженных частиц, обладающих массой m и зарядом q . При квантовом описании поля этих частиц в представлении Гейзенберга пусть отвечает полевой оператор $\check{\psi}(\mathbf{r}, t)$, заданный в каждой точке пространства \mathbf{r} в любой момент времени t . Спинозные эффекты опускаем. Оператор $\check{\psi}(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \check{\psi}(x)}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{q}{c} \check{\mathbf{A}}(x) \right)^2, \quad \hat{p}^\nu = -i\hbar \nabla^\nu. \quad (2)$$

Здесь $\check{\mathbf{A}}(x)$ — операторный векторный потенциал электромагнитного поля, с которым взаимодействуют зондирующие частицы. Нами использована калибровка с нулевым скалярным потенциалом [4]. Если плотность падающих частиц мала, то вид перестановочного соотношения не имеет значения. Поэтому воспользуемся перестановочным соотношением для полей Бозе–Эйнштейна:

$$[\check{\psi}(x); \check{\psi}^\dagger(x')]_{t=t'} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad x = \{\mathbf{r}, t\}.$$

В отсутствие взаимодействия с электромагнитным полем, оператор $\check{\psi}(\mathbf{r}, t)$ имеет вид

$$\check{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \exp\left(i \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar} t - i \frac{\varepsilon(\mathbf{p})}{\hbar} t\right) \hat{b}_{\mathbf{p}}, \quad (3)$$

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m},$$

причем $\hat{b}_{\mathbf{p}}$ и $\hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger$ — операторы уничтожения и рождения зондирующих частиц в состояниях с импульсом \mathbf{p} , $V = L_x L_y L_z$ — объем квантования.

Далее надлежит выписать квантовые уравнения Максвелла, определяющие $\check{\mathbf{A}}(x)$. При этом теория становится очень громоздкой. Мы поступим иначе. В электрон-ионной плазме существуют [22] незатухающие продольные ленгмюровские колебания с частотой Ω , если только $\Omega > k_c v_F$ и $\Omega > \hbar k_c^2 / 2m$, причем v_F — скорость электронов на поверхности Ферми, $\varepsilon_F = m v_F^2 / 2$. Граничное волновое число k_c при

выполнении неравенства $\hbar \Omega \gg \varepsilon_F$ оказывается равным $k_c = \sqrt{2m\Omega/\hbar}$.

Ленгмюровским колебаниям плазмы в гейзенберговском представлении отвечает оператор векторного потенциала

$$\check{A}^\nu(x) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega(\lambda)V}} \times$$

$$\times e_{\mathbf{k}\lambda}^\nu (\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega(\lambda)t) + \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega(\lambda)t)), \quad (4)$$

$$\omega(\lambda) = \begin{cases} \varpi(k) & \text{при } \lambda = 1, 2, \\ \Omega \theta(k_c - k) & \text{при } \lambda = 3, \end{cases}$$

где $\theta(k_c - k)$ — ступенчатая функция Хевисайда, функция $\varpi(k)$, отвечающая поперечным колебаниям плазмы, из дальнейших расчетов выпадает. Величина амплитуды оператора $\check{A}^\nu(x)$ выбрана согласно стандартному условию коммутации [23]

$$\left[\check{A}^\nu(x); \frac{\partial}{\partial t'} \check{A}^{\nu'}(x') \right]_{t=t'} = i\hbar c^2 \delta_{\nu\nu'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Далее, $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}$ и $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$ — операторы уничтожения и рождения квантов ленгмюровского поля в состоянии с волновым вектором \mathbf{k} и индексом линейной поляризации λ

$$[\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}; \hat{\alpha}_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\mathbf{k}; \mathbf{k}'),$$

причем $\delta(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ — символ Кронекера, индексы $\lambda = 1, 2$ отвечают поперечным поляризациям поля, индекс $\lambda = 3$ отвечает продольной поляризации, $e_{\mathbf{k}\lambda}^\nu$ — орты поляризации. Поскольку нас интересуют лишь продольные колебания, введем операторный псевдопотенциал $\check{\Phi}$, такой что

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \check{A}^\nu = -\frac{\partial}{\partial r_\nu} \check{\Phi}. \quad (5)$$

В согласии с (4) этот псевдопотенциал оказывается равным

$$\check{\Phi}(x) = - \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar \Omega}{2k^2 V}} \left(\hat{\alpha}_{\mathbf{k}3} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\Omega t) + \hat{\alpha}_{\mathbf{k}3}^\dagger \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\Omega t) \right) \theta(k_c - k). \quad (6)$$

Функция $\varpi(k)$ из расчетов выпала. Теперь оказывается удобным исключить оператор $\check{\mathbf{A}}(x)$ из уравнения Шредингера (2), заменив его псевдоскалярным оператором $\check{\Phi}$, определяемым равенством (5). Такая проблема решается посредством вспомогательного оператора

$$\check{X}(x) = -\frac{1}{c} \int \check{A}^\nu(x) dl^\nu.$$

Интегрирование здесь осуществляется вдоль кривой, соединяющей точки с координатами \mathbf{r} и \mathbf{r}_0 , где \mathbf{r}_0 — координата некоторой произвольной фиксированной точки. После замены

$$\check{\psi}(x) = \exp\left(i\frac{q}{\hbar}\check{X}(x)\right)\check{\psi}(x),$$

уравнение (2) принимает вид

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\check{\psi}(x) = \frac{\hat{p}^2}{2m}\check{\psi}(x) + q\check{\Phi}(x)\check{\psi}(x). \quad (7)$$

Если концентрация электронов плазмы убывает, то $\check{\Phi}(x) \sim \sqrt{\Omega} \sim n^{1/4} \rightarrow 0$ и, согласно уравнению (7), зондирующий поток электронов не излучает и с течением времени не изменяется.

Выпишем коррелятор операторов $\check{\Phi}$, согласно (6) равный

$$\begin{aligned} \langle \check{\Phi}(x)\check{\Phi}(x') \rangle &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar\Omega}{2k^2V} \times \\ &\times ((1 + N_{\mathbf{k}}) \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - i\Omega(t - t')) + \\ &+ N_{\mathbf{k}} \exp(-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + i\Omega(t - t'))) \theta(k_c - k), \quad (8) \end{aligned}$$

причем

$$N_{\mathbf{k}} = \langle \hat{a}_{\mathbf{k}3}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}3} \rangle = \frac{1}{e^{\hbar\Omega/T} - 1}$$

— среднее число продольных ленгмюровских квантов в состоянии, определяемом волновым вектором \mathbf{k} . После преобразования Фурье найдем

$$\begin{aligned} \langle \check{\Phi}(x)\check{\Phi}(x') \rangle_{\mathbf{k}\omega} &= \int \langle \check{\Phi}(\mathbf{r})\check{\Phi}(\mathbf{r}') \rangle \times \\ &\times e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + i\omega(t - t')} d(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d(t - t') = \\ &= \frac{\pi\hbar\Omega}{k^2} ((1 + N_{\mathbf{k}})\delta(\omega - \Omega) + N_{\mathbf{k}}\delta(\omega + \Omega)) \theta(k_c - k). \end{aligned}$$

Более общее описание ленгмюровских колебаний в плазме может быть выполнено следующим образом. Согласно флуктуационно-диссипационной теореме [24, 25], образы преобразования Фурье корреляционной функции полевых операторов и функций Грина $D_r^{\nu\nu'}(\mathbf{k}, \omega)$ в состоянии термодинамического равновесия связаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \check{A}^\nu(x)\check{A}^{\nu'}(x') \rangle_{\mathbf{k}\omega} &= i\hbar \left(1 + \frac{1}{e^{\hbar\omega/T} - 1}\right) \times \\ &\times \left[D_r^{\nu\nu'}(\mathbf{k}, \omega) - D_r^{\nu\nu'*}(\mathbf{k}, \omega) \right]. \end{aligned}$$

Для однородной и изотропной плазмы возможно разбиение коррелятора на продольную и поперечную компоненты. Тогда для продольной компоненты [21]

$$\begin{aligned} \langle \check{A}^\nu(x)\check{A}^{\nu'}(x') \rangle_{\mathbf{k}\omega}^l &= i\hbar \left(1 + \frac{1}{e^{\hbar\omega/T} - 1}\right) \times \\ &\times \left[D_r^l(\mathbf{k}, \omega) - D_r^{l*}(\mathbf{k}, \omega) \right], \end{aligned}$$

$$D_r^l(\mathbf{k}, \omega) = \frac{c^2}{\omega^2 \varepsilon(k, \omega)},$$

где $\varepsilon(k, \omega)$ — диэлектрическая проницаемость. Но согласно (5)

$$k^2 \langle \check{\Phi}(x)\check{\Phi}(x') \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{\omega^2}{c^2} \langle \check{A}^\nu(x)\check{A}^{\nu'}(x') \rangle_{\mathbf{k}\omega}^l$$

и потому

$$\begin{aligned} k^2 \langle \check{\Phi}(x)\check{\Phi}(x') \rangle_{\mathbf{k}\omega} &= i\hbar \left(1 + \frac{1}{e^{\hbar\omega/T} - 1}\right) \times \\ &\times \left(\frac{1}{\varepsilon(k, \omega)} - \frac{1}{\varepsilon^*(k, \omega)} \right). \quad (9) \end{aligned}$$

Если

$$\varepsilon(k, \omega) = 1 - \frac{\Omega^2 \theta(k_c - k)}{(\omega + i0)^2}, \quad (10)$$

что согласуется с оператором (4), то мы возвращаемся к формуле (8).

3. МЕТОД ФУНКЦИЙ ГРИНА

Для исследования уравнения (2) удобно воспользоваться методом квантовых функций Грина $G_{ll'}(x, x')$. По определению [26]

$$G_{ll'}(x, x') = \frac{1}{i\hbar} \langle \hat{T} \check{\psi}_l(x) \check{\psi}_{l'}^\dagger(x') \rangle.$$

Здесь \hat{T} — хронологический оператор вдоль временного контура, исходящего по первому пути ($l = 1$) из точки $t \rightarrow -\infty$, простирающегося до $t \rightarrow +\infty$, и возвращающегося по другому пути ($l = 2$) в точку $t \rightarrow -\infty$. В обозначении $\check{\psi}_l(x)$ индекс l относится к временному аргументу t . Функции Грина обладают очевидным свойством:

$$G_{12} + G_{21} = G_{11} + G_{22}.$$

Пользуясь формулой (3), нетрудно найти явные выражения для функций Грина свободных полей:

$$\begin{aligned} G_{ll'}^0(x, x') &= \\ &= \frac{1}{V} \sum_p \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{iE}{\hbar}(t - t')\right) \times \\ &\times G_{ll'}^0\left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}, \frac{E}{\hbar}\right) \frac{dE}{2\pi\hbar}. \quad (11) \end{aligned}$$

В частности,

$$\begin{aligned} \overset{0}{G}_{12} \left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}, \frac{E}{\hbar} \right) &= -2\pi i N_{\mathbf{p}} \delta(E - \varepsilon(\mathbf{p})), \\ N_{\mathbf{p}} &= \langle \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}} \rangle, \end{aligned} \quad (12)$$

причем $N_{\mathbf{p}}$ — среднее число частиц в состоянии с импульсом \mathbf{p} . Если первоначально, до рассеяния, все частицы обладали импульсом \mathbf{p}_0 и концентрация их была n_0 , то в стационарных задачах вероятность $w(\mathbf{p})$ рассеяния частицы в состояние с импульсом \mathbf{p} будет равна

$$w(\mathbf{p}) = N_{\mathbf{p}}/Vn_0. \quad (13)$$

Из (12) следует

$$N_{\mathbf{p}} = i \int \overset{0}{G}_{12} \left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}, \frac{E}{\hbar} \right) \frac{dE}{2\pi}. \quad (14)$$

Это равенство остается справедливым, если в нем заменить $\overset{0}{G}_{12}$ на G_{12} . Далее, нам понадобятся запаздывающая $G_r = G_{11} - G_{12}$ и опережающая $G_a = G_{11} - G_{21}$ функции Грина. Для свободных полей их образы преобразования Фурье согласно (11) выглядят так:

$$\begin{aligned} \overset{0}{G}_r \left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}, \frac{E}{\hbar} \right) &= \frac{1}{E - p^2/2m + i0}, \\ \overset{0}{G}_a \left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}, \frac{E}{\hbar} \right) &= \overset{0}{G}_r^* \left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}, \frac{E}{\hbar} \right) = \\ &= \frac{1}{E - p^2/2m - i0}. \end{aligned} \quad (15)$$

4. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Переходим к выводу уравнений для функций Грина падающих на плазму частиц, взаимодействующих с полем ленгмюровских квантов. Уравнение для матричной функции $G_{ll'}(x, x')$ после дифференцирования ее по времени следует из уравнения (7):

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial G_{ll'}(x, x')}{\partial t} &= (-1)^{l+1} \delta_{ll'} \delta(x, x') + \frac{\hat{p}^2}{2m} G_{ll'}(x, x') + \\ &+ \frac{q}{i\hbar} \langle \hat{T} \check{\Phi}_l(x) \check{\psi}_l(x) \check{\psi}_l^\dagger(x') \rangle. \end{aligned}$$

Наличие последнего слагаемого осложняет исследование этого уравнения. Для перехода к уравнениям Швингера вводим вспомогательный функционал [27]

$$G_{ll'}(x, x'|\rho) = \frac{1}{i\hbar} \frac{\langle \hat{T} \check{\psi}_l(x) \check{\psi}_l^\dagger(x') \hat{S} \rangle}{\langle \hat{S} \rangle},$$

где

$$\hat{S} = \hat{T} \exp \left(\frac{q}{i\hbar} \sum_{l_1} (-1)^{l_1+1} \int \check{\Phi}_{l_1}(x) \rho_{l_1}(x) dx \right),$$

причем $\rho_l(x)$ — некоторая классическая вспомогательная функция. Очевидно, что при $\rho_l(x) = 0$

$$G_{ll'}(x, x'|0) = G_{ll'}(x, x').$$

По временным осям $l = 1, 2$ интегралы распространяются в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Непосредственно проверяется, что

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} G_{ll'}(x, x'|\rho) &= (-1)^{l+1} \delta_{ll'} \delta(x, x') + \\ &+ \frac{\hat{p}^2}{2m} G_{ll'}(x, x'|\rho) + i\hbar (-1)^{l+1} \frac{\delta G_{ll'}(x, x'|\rho)}{\delta \rho_l(x)} + \\ &+ q \langle \check{\Phi}_l(x) | \rho \rangle G_{ll'}(x, x'|\rho), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\langle \check{\Phi}_l(x) | \rho \rangle = \frac{\langle \hat{T} \check{\Phi}_l(x) \hat{S} \rangle}{\langle \hat{S} \rangle}.$$

Для вычисления второй вариационной производной, содержащейся в выражении (16), варьируем это уравнение по $\rho_l(x)$ еще раз:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta G_{ll'}(x, x'|\rho)}{\delta \rho_{l_2}(x_2)} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} \frac{\delta G_{ll'}(x, x'|\rho)}{\delta \rho_{l_2}(x_2)} + \\ &+ i\hbar (-1)^{l+1} \frac{\delta^2 G_{ll'}(x, x'|\rho)}{\delta \rho_{l_2}(x_2) \delta \rho_l(x)} + \\ &+ q \langle \hat{T} \check{\Phi}_l(x) | \rho \rangle \frac{\delta G_{ll'}(x, x'|\rho)}{\delta \rho_{l_2}(x_2)} + \\ &+ \frac{q^2}{i\hbar} (-1)^{l_2+1} \langle \hat{T} \check{\Phi}_l(x) \check{\Phi}_{l_2}(x_2) | \rho \rangle G_{ll'}(x, x'|\rho) - \\ &- \frac{q^2}{i\hbar} (-1)^{l_2+1} \langle \hat{T} \check{\Phi}_l(x) | \rho \rangle \times \\ &\times \langle \hat{T} \check{\Phi}_{l_2}(x_2) | \rho \rangle G_{ll'}(x, x'|\rho). \end{aligned} \quad (17)$$

Разрешая это уравнение с помощью функции Грина $G_{ll'}(x, x'|\rho)$, удовлетворяющей уравнению (16), находим

$$\begin{aligned} \frac{\delta G_{ll'}(x, x'|\rho)}{\delta \rho_{l_2}(x_2)} &= \frac{q^2}{i\hbar} (-1)^{l_2+1} \sum_{l_1} (-1)^{l_1+1} \times \\ &\times \int G_{ll_1}(x, x_1|\rho) [\langle \check{\Phi}_{l_1}(x_1) \check{\Phi}_{l_2}(x_2) | \rho \rangle - \\ &- \langle \check{\Phi}_{l_1}(x_1) | \rho \rangle \langle \check{\Phi}_{l_2}(x_2) | \rho \rangle] dx_1. \end{aligned} \quad (18)$$

Такое решение было бы абсолютно верным, если уравнение (17) было бы уравнением в обычных, а

не вариационных производных. Таким образом, выражение (18) оказывается приближенным и отвечает так называемому однопетлевому приближению в полных функциях Грина. В подавляющем числе прикладных задач такое приближение оказывается достаточным. Выход за рамки однопетлевого приближения очень громоздок и требует специального обоснования. Подстановка (18) в (16) позволяет уравнению (16) придать вид интегродифференциального уравнения

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} G_{ll'}(x, x') = (-1)^{l+1} \delta_{ll'} \delta(x, x') + \frac{\hat{p}^2}{2m} G_{ll'}(x, x') + \sum_{l_1} \int [M_{ll_1}(x, x_1) + q\delta_{ll_1} \langle \check{\Phi}_{l_1}(x) \rangle] \times G_{l_1 l'}(x_1, x') dx_1, \quad (19)$$

где

$$M_{ll_1}(x, x_1) = q^2 G_{ll_1}(x, x_1) (-1)^{l+1} \times \left[\langle \hat{T} \check{\Phi}_{l_1}(x_1) \check{\Phi}_l(x) \rangle - \langle \check{\Phi}_{l_1}(x_1) \rangle \langle \check{\Phi}_l(x) \rangle \right]. \quad (20)$$

Вспомогательная функция $\rho_l(x)$ здесь положена равной нулю. Уравнение (19) носит название уравнения Дайсона – Келдыша. Если в системе отсутствует внешний классический ток, то при $\rho_l(x) = 0$ оказывается, что $\langle \check{\Phi}_l(x) | 0 \rangle = 0$. Поэтому в формуле (20) этот член будем опускать. Уравнению (19) можно придать интегральный вид

$$G_{ll'}(x, x') = G_{ll'}^0(x, x') + \sum_{l_1 l_2} \int G_{ll_2}^0(x, x_2) \times (-1)^{l_2+1} M_{l_2 l_1}(x_2, x_1) G_{l_1 l'}(x_1, x') dx_1 dx_2, \quad (21)$$

при условии, что

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} G_{ll'}^0(x, x') - \frac{\hat{p}^2}{2m} G_{ll'}^0(x, x') = (-1)^{l+1} \delta_{ll'} \delta(x, x').$$

Эти функции согласуются с формулами (11) и (15).

5. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДАЙСОНА – КЕЛДЫША

Воспользовавшись преобразованием [26], осуществляемым матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, получаем из матричного уравнения (21) равенства

$$G_r = G_r^0 + G_r^0 M_r G_r, \quad G_a = G_a^0 + G_a^0 M_a G_a, \\ G = G^0 + G^0 M_a G_a + G_r^0 (M_{21} - M_{12}) G_a + G_r^0 M_r G. \quad (22)$$

Четвертое равенство не выписываем, поскольку оно оказывается тождеством. Здесь приняты обозначения, согласующиеся с обозначениями разд. 3:

$$G_r = G_{11} - G_{12} = -G_{22} + G_{21}, \\ G_a = G_{11} - G_{21} = -G_{22} + G_{12}, \\ G = G_{12} + G_{21} = G_{11} + G_{22}.$$

При этом

$$M_r = M_{11} + M_{12} = M_{22} + M_{21}, \\ M_a = M_{11} - M_{21} = M_{22} - M_{12}. \quad (23)$$

Воспользовавшись тем, что

$$G_{12} = \frac{1}{2} (G - G_r + G_a),$$

находим

$$G_{12} = G_{12}^0 + G_{12}^0 M_a G_a + G_r^0 M_r G_{12} - G_r^0 M_{12} G_a. \quad (24)$$

Функция G_{21} находится из тождества

$$G_r - G_a = G_{21} - G_{12},$$

и отдельно рассчитываться не должна. Решение уравнения (24) ищем в виде двух слагаемых [28]

$$G_{12} = G_{12}^{(c)} + G_{12}^{(n)}. \quad (25)$$

Пусть $G_{12}^{(c)}$ удовлетворяет уравнению

$$G_{12}^{(c)} = G_{12}^0 + G_{12}^0 M_a G_a + G_r^0 M_r G_{12}^{(c)}.$$

Тогда

$$G_{12}^{(n)} = G_r^0 M_r G_{12}^{(n)} - G_r^0 M_{12} G_a.$$

Последние два уравнения допускают симметричную запись

$$G_{12}^{(c)} = (1 + G_r M_r) G_{12}^0 (1 + M_a G_a), \quad (26)$$

$$G_{12}^{(n)} = -G_r M_{12} G_a. \quad (27)$$

6. НЕКОГЕРЕНТНЫЙ КАНАЛ РАССЕЯНИЯ

Представление (25) функции G_{12} в виде двух слагаемых имеет простой физический смысл. Функция $G_{12}^{(c)}$ описывает кинетику заряженных частиц, испытывающих лишь упругое рассеяние и сохраняющих свою энергию. Такой канал рассеяния будем называть когерентным. Функция $G_{12}^{(n)}$ описывает частицы, претерпевшие наряду с упругими рассеяниями хотя бы одно неупругое рассеяние. Этот канал

рассеяния назовем некогерентным. Для нахождения функции распределения $w(\mathbf{p})$ заряженных частиц по импульсам в прошедшем через плазму потоке согласно (13) и (14) надо знать G_{12} . Эту функцию найдем из уравнений (25)–(27). Ограничиваясь пока некогерентным каналом рассеяния, будем иметь

$$G_{12}^{(n)} = -G_r^0 M_{12}^0 G_a^0. \quad (28)$$

Наблюдению подвергаются прошедшие через плазму частицы. Таким образом, нас интересуют частицы, находящиеся в свободном состоянии. Поэтому в последнем равенстве вместо $G_{r,a}$, подчиняющихся уравнению (22), мы использовали функции $G_{r,a}^0$, т.е. в низшем порядке теории возмущений первые члены правых частей этих уравнений. При вычислении массового оператора M_{12} содержащуюся в ней согласно (20) функцию G_{12} аппроксимировать пока не будем. Коль скоро мы рассматриваем плазму конечного объема и ленгмюровское поле вне этого объема равно нулю, то в формуле (20) этот факт в вигнеровском приближении можно учесть умножением коррелятора $\langle \check{\Phi}(x)\check{\Phi}(x') \rangle$ на функцию

$$\vartheta_L \left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \right) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} \vartheta_L(\mathbf{q}) \exp \left(-i\mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \right),$$

обращающуюся в нуль, если аргумент ее выходит за пределы объема плазмы. В свою очередь,

$$\vartheta_L(\mathbf{q}) = \int \vartheta_L \left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \right) \times \exp \left(-i\mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \right) d \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}.$$

Если плазма занимает плоско-параллельный слой толщиной L , расположенный перпендикулярно оси z , то

$$\vartheta_L(\mathbf{q}) = V \delta(q_x, 0) \delta(q_y, 0) \vartheta_L(q_z),$$

$$\vartheta_L(q_z) = \frac{1 - \exp(-iq_z L)}{iq_z L}.$$

Теперь вместо (28) будем иметь

$$G_{12}^{(n)}(x, x') = - \int G_r^0(x, x_1) M_{12}(x_1, x_2) \times \vartheta_L \left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \right) G_a^0(x_2, x') dx_1 dx_2. \quad (29)$$

Согласно (20)

$$M_{12}(x, x') = -q^2 G_{12}(x, x') \langle \check{\Phi}(x') \check{\Phi}(x) \rangle. \quad (30)$$

Подстановка (30) в (29) дает

$$G_{12}^{(n)}(x, x') = -\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \int G_r \left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \frac{E}{\hbar} \right) \times M_{12} \left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}, \frac{E}{\hbar} \right) G_r^* \left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar} - \frac{\mathbf{q}}{2}, \frac{E}{\hbar} \right) \vartheta_L(\mathbf{q}) \times \exp \left(i \frac{\mathbf{p}}{\hbar} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + i \mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2} - i \frac{E}{\hbar} (t - t') \right) \frac{dE}{2\pi \hbar}. \quad (31)$$

Функции G_r^0 известны явно (15). Суммирование по q_x и q_y выполняется за счет символов Кронекера. Суммирование по q_z выполняется после предельного перехода $V \rightarrow \infty$ и использования формулы

$$\sum_{q_z} f(q_z) = \frac{L_z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(q_z) dq_z$$

для произвольной $f(q_z)$. Далее, полагаем $z + z' \rightarrow \pm \infty$ и воспользуемся символическим тождеством

$$\frac{\sin ax}{x} \rightarrow \pi \delta(x), \quad \text{если } a \rightarrow \infty.$$

Найдем

$$G_{12}^{(n)}(x, x') = \mp \frac{m}{V \hbar^2} \sum_{\mathbf{p}} \theta(\pm p_z) \frac{L}{p_z} M_{12} \left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}, \frac{\varepsilon(\mathbf{p})}{\hbar} \right) \times \exp \left(i \frac{\mathbf{p}}{\hbar} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - i \frac{\varepsilon(\mathbf{p})}{\hbar} (t - t') \right). \quad (32)$$

Преобразование Фурье функции (30) с учетом (9) при $T \rightarrow 0$ дает

$$M_{12} \left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}, \frac{E}{\hbar} \right) = -\frac{i \hbar q^2}{V} \sum_{\mathbf{k}} \int \frac{\theta(\omega)}{k^2} \times \left[\frac{1}{\varepsilon(k, \omega)} - \frac{1}{\varepsilon^*(k, \omega)} \right] G_{12} \left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar} + \mathbf{k}, \frac{E}{\hbar} + \omega \right) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (33)$$

С помощью (32), (13) и (14) находим выражение, определяющее в некогерентном канале рассеяния вероятность распределения электронов по импульсам в прошедшем и отраженном плазмой электронных потоках:

$$w^{(n)}(\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{k}} \int w^{(n)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega) \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (34)$$

$$w^{(n)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega) = \mp \frac{q^2 m L}{n_0 V^2 p_z k^2} \theta(\omega) \times \sum_{\mathbf{p}'} \delta \left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}, \frac{\mathbf{p}'}{\hbar} - \mathbf{k} \right) G_{12} \left(\frac{\mathbf{p}'}{\hbar}, \frac{\varepsilon(\mathbf{p}')}{\hbar} + \omega \right) \times \left[\frac{1}{\varepsilon(k, \omega)} - \frac{1}{\varepsilon^*(k, \omega)} \right] \theta(\pm p_z). \quad (35)$$

Для вычисления этой вероятности в низшем приближении по заряду взаимодействия заменим G_{12} на G_{12}^0 и воспользуемся формулой (12). Это означает ограничение в расчетах однократным рассеянием электронов. В противном случае, итерирование уравнения (28) открывает возможность исследования рассеяния электронов любой кратности. Поскольку в падающем потоке все электроны по предположению обладают импульсом \mathbf{p}_0 , $N_{\mathbf{p}} = N_0 \delta(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)$ и окончательно в низшем приближении теории возмущений будем иметь

$$w^{(n)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega) = \pm 2\pi i \frac{q^2 m L}{p_z k^2 V} \theta(\omega) \times \\ \times \delta\left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}, \frac{\mathbf{p}_0}{\hbar} - \mathbf{k}\right) \delta(\varepsilon(\mathbf{p}) + \hbar\omega - \varepsilon(\mathbf{p}_0)) \times \\ \times \left[\frac{1}{\varepsilon(k, \omega)} - \frac{1}{\varepsilon^*(k, \omega)} \right] \theta(\pm p_z).$$

Как и следовало ожидать, эта формула согласуется с законами сохранения (1), следствием которых оказывается равенство

$$\omega = \frac{\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{k}}{m} - \frac{\hbar k^2}{2m},$$

обуславливающее связь между частотой испущенного кванта ω и его волновым вектором \mathbf{k} . Это равенство может служить своеобразным тестом непротиворечивости квантовых теорий, которому не удовлетворяют формулы работ [4, 12, 13, 29, 30].

Представляет интерес функция

$$w^{(n)}(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{\mathbf{p}} w^{(n)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega),$$

описывающая безусловную вероятность излучения электроном ленгмюровского кванта (\mathbf{k}, ω) :

$$w^{(n)}(\mathbf{k}, \omega) = \pm 2\pi i \frac{q^2 m L}{V \hbar (p_0 - \hbar k_z) k^2} \theta(\omega) \times \\ \times \delta\left(-\frac{\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{k}}{m} + \omega + \frac{\hbar k^2}{2m}\right) \times \\ \times \left[\frac{1}{\varepsilon(k, \omega)} - \frac{1}{\varepsilon^*(k, \omega)} \right] \theta(\pm p_z). \quad (36)$$

Эта формула совпадает с основополагающей формулой работы [4] лишь в пренебрежении в аргументе δ -функции слагаемым, содержащим постоянную Планка. По этой причине учет зависимости диэлектрической проницаемости от \hbar в работе [4] не имеет оснований. Несмотря на то что членом $\hbar k^2/2m$ в прикладных вопросах часто можно пренебречь, вывод формулы (36) из полуклассических

соображений оправдывает ее использование лишь при $\varepsilon(k, \omega)$, не зависящих от \hbar . Тем более использование этой формулы вызывало бы сомнение, когда в формировании диэлектрической проницаемости существенную роль играет квантовый вакуум плазменных волн. Такое замечание представляется существенным, поскольку возможны ситуации, и ниже они исследованы, не допускающие в $\varepsilon(k, \omega)$ предельного перехода $\hbar \rightarrow 0$.

Если для диэлектрической проницаемости использовать выражение (10), учитывающее лишь свободные ленгмюровские колебания плазмы, то найдем

$$w^{(n)}(\mathbf{p}) = \pm \pi \frac{q^2 m \Omega L}{\hbar p_z V} \sum_{\mathbf{k}} \delta\left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}, \frac{\mathbf{p}_0}{\hbar} - \mathbf{k}\right) \times \\ \times \delta\left(\frac{\varepsilon(\mathbf{p})}{\hbar} + \Omega - \frac{\varepsilon(\mathbf{p}_0)}{\hbar}\right) \times \\ \times \frac{\theta(\pm p_z)}{k^2} \theta\left(k_c - \sqrt{\frac{|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|^2}{\hbar^2}}\right). \quad (37)$$

Знак «плюс» отвечает заряженным частицам, прошедшим через плазму, знак «минус» — частицам, отраженным от нее. При $p_0 > \hbar k_c$ отраженных электронов нет.

Найдем распределение электронов большой энергии $\varepsilon(\mathbf{p}_0) \gg \hbar\Omega$, прошедших через рассеивающий слой, по углам ϑ :

$$w^{(n)}(\vartheta) d\vartheta = \frac{V d\vartheta \sin \vartheta}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty p^2 w^{(n)}(\mathbf{p}) dp.$$

Воспользовавшись тем, что

$$\Delta p = p_0 - p = p_0 \frac{\hbar\Omega}{2\varepsilon(\mathbf{p}_0)} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\hbar\Omega}{\varepsilon(\mathbf{p}_0)}\right),$$

$$\cos \vartheta = \frac{\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{p}}{p_0 p}, \quad \vartheta_{max} = \frac{\hbar k_c}{p_0} = \sqrt{\frac{\hbar\Omega}{\varepsilon(\mathbf{p}_0)}},$$

находим, что

$$w^{(n)}(\vartheta) = \frac{q^2 m L}{4\pi \hbar^2} \frac{\hbar\Omega}{2\varepsilon(\mathbf{p}_0)} \frac{\vartheta}{\vartheta^2 + (\hbar\Omega/\varepsilon(\mathbf{p}_0))^2/4}. \quad (38)$$

Такое распределение с конечной шириной, пропорциональной \hbar , из работы [4] по указанным выше причинам получено быть не может. Для исключения особенности при $\vartheta \rightarrow 0$ в работе [4] были введены феноменологические релаксационные константы.

7. КОГЕРЕНТНЫЙ КАНАЛ РАССЕЯНИЯ

Этот канал, определяющий функцию распределения $w^{(c)}(\mathbf{p})$ заряженных частиц, претерпевших лишь упругие процессы рассеяния в плазме по импульсам, значительно менее информативен, чем неупругий канал рассеяния. Его свойства на базе формул, правильно учитывающих соотношения (1), изучались в работах [31, 32]. Связь когерентного канала с некогерентным была использована в работе [4] для построения полуфеноменологической теории последнего. В нашей теории формулы когерентного и некогерентного каналов должны быть согласованными. Условие такого согласования рассматривается ниже.

Формулу (26) перепишем с учетом конечных пространственных размеров плазмы и приближений, согласующихся с приближениями, принятыми в разд. 6, в виде

$$G_{12}^{(c)} = G_{12}^0 + \Delta G_{12}^{(c)} + \left(\Delta G_{12}^{(c)}\right)^\dagger,$$

$$\Delta G_{12}^{(c)} = G_r M_r \vartheta_L G_{12}^0.$$

Как и выше, здесь фигурирует функция ϑ_L , учитывающая конечные размеры плазмы. Исследуются частицы, прошедшие через плазму, и потому функция G_r заменена на G_r^0 . В результате дальнейших расчетов вместо формулы (31) для некогерентного канала здесь будем иметь

$$\Delta G_{12}^{(c)}(x, x') = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \int_0^0 G_r \left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \frac{E}{\hbar} \right) \times$$

$$\times M_r \left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}, \frac{E}{\hbar} \right) G_{12}^0 \left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar} - \frac{\mathbf{q}}{2}, \frac{E}{\hbar} \right) \vartheta_L(\mathbf{q}) \times$$

$$\times \exp \left(i \frac{\mathbf{p}}{\hbar} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + i \mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2} - i \frac{E}{\hbar} (t - t') \right) \frac{dE}{2\pi \hbar}.$$

Вместо формулы (33) для этого канала согласно (20) и (23) с учетом неравенства $\langle \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p \rangle \ll 1$ находим

$$M_r \left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}, \frac{E}{\hbar} \right) = \frac{i \hbar q^2}{V} \times$$

$$\times \sum_{\mathbf{k}} \int \frac{\theta(\omega)}{k^2} \left[\frac{1}{\varepsilon(k, \omega)} - \frac{1}{\varepsilon^*(k, \omega)} \right] \times$$

$$\times G_r \left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar} - \mathbf{k}, \frac{E}{\hbar} - \omega \right) \frac{d\omega}{2\pi},$$

$$M_a \left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}, \frac{E}{\hbar} \right) = \left(M_r \left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}, \frac{E}{\hbar} \right) \right)^*.$$

Теперь окончательно:

$$w^{(c)}(\mathbf{p}) = \delta \left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}, \frac{\mathbf{p}_0}{\hbar} \right) - \Delta w^{(c)}(\mathbf{p}),$$

$$\Delta w^{(c)}(\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{k}} \int \Delta w^{(c)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega) \frac{d\omega}{2\pi}, \tag{39}$$

$$\Delta w^{(c)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega) = \mp \frac{q^2 m L}{k^2 p_z V} \theta(\omega) \delta \left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}, \frac{\mathbf{p}_0}{\hbar} \right) \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\varepsilon(k, \omega)} - \frac{1}{\varepsilon^*(k, \omega)} \right] \times$$

$$\times \left[G_r \left(\frac{\mathbf{p}_0}{\hbar} - \mathbf{k}, \frac{\varepsilon(\mathbf{p}_0)}{\hbar} - \omega \right) - \right.$$

$$\left. - G_a \left(\frac{\mathbf{p}_0}{\hbar} - \mathbf{k}, \frac{\varepsilon(\mathbf{p}_0)}{\hbar} - \omega \right) \right] \theta(\pm p_z). \tag{40}$$

Функция $\Delta w^{(c)}(\mathbf{p})$ описывает уменьшение вероятности пребывания заряженной частицы в исходном состоянии с импульсом \mathbf{p}_0 вследствие перехода ее в состояния с другими импульсами в результате рассеяния. Отсюда следует тождество

$$\sum_{\mathbf{p}} |p_z| w^{(n)}(\mathbf{p}) = p_0 \sum_{\mathbf{p}} \Delta w^{(c)}(\mathbf{p}), \tag{41}$$

представляющее собой закон сохранения числа частиц. Справедливо также и другое тождество:

$$\sum_{\mathbf{p}} |p_z| w^{(n)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega) = p_0 \sum_{\mathbf{p}} \Delta w^{(c)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega),$$

также описывающее сохранение числа частиц при условии излучения ими одного ленгмюровского кванта с импульсом \mathbf{k} и частотой ω . Сопоставление (34), (35) с (39), (40) показывает, что такое тождество имеет место, если только

$$N_0 \left[G_r \left(\frac{\mathbf{p}_0}{\hbar} - \mathbf{k}, \frac{\varepsilon(\mathbf{p}_0)}{\hbar} - \omega \right) - \right.$$

$$\left. - G_a \left(\frac{\mathbf{p}_0}{\hbar} - \mathbf{k}, \frac{\varepsilon(\mathbf{p}_0)}{\hbar} - \omega \right) \right] =$$

$$= \sum_{\mathbf{p}'} G_{12} \left(\frac{\mathbf{p}'}{\hbar}, \frac{\varepsilon(\mathbf{p}' - \hbar \mathbf{k})}{\hbar} + \omega \right).$$

В свою очередь, это равенство выполняется, если

$$G_{12} \left(\frac{\mathbf{p}'}{\hbar}, \frac{\varepsilon(\mathbf{p}' - \hbar \mathbf{k})}{\hbar} + \omega \right) = \delta \left(\frac{\mathbf{p}'}{\hbar}, \frac{\mathbf{p}_0}{\hbar} \right) \times$$

$$\times N_0 \left[G_r \left(\frac{\mathbf{p}_0}{\hbar} - \mathbf{k}, \frac{\varepsilon(\mathbf{p}_0)}{\hbar} - \omega \right) - \right.$$

$$\left. - G_a \left(\frac{\mathbf{p}_0}{\hbar} - \mathbf{k}, \frac{\varepsilon(\mathbf{p}_0)}{\hbar} - \omega \right) \right] \tag{42}$$

при условии, что все зондирующие частицы обладают импульсом \mathbf{p}_0 . Нетрудно убедиться в том, что для функций Грина G_{ll}^0 свободных полей это равенство удовлетворяется тождественно и, таким образом, в низшем приближении по заряду из согласования когерентного и некогерентного каналов рассеяния следует закон сохранения числа частиц. Но поскольку закон сохранения числа частиц должен выполняться всегда, то и равенство (42) обязано выполняться в более общих предположениях. Во всяком случае, оно должно выполняться в принятом нами однопетлевом приближении. Это — важное замечание, поскольку равенство (42) позволяет выразить G_{12} , вычисление которой всегда вызывает трудности, через более доступные функции G_r и G_a . И, наконец, из формул (35) и (42) находим

$$w^{(n)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega) = \mp V \frac{q^2 m L}{p_z k^2} \theta(\omega) \delta\left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}, \frac{\mathbf{p}_0}{\hbar} - \mathbf{k}\right) \times \\ \times \left[G_r \left(\frac{\mathbf{p}_0}{\hbar} - \mathbf{k}, \frac{\varepsilon(\mathbf{p}_0)}{\hbar} - \omega \right) - G_r^* \left(\frac{\mathbf{p}_0}{\hbar} - \mathbf{k}, \frac{\varepsilon(\mathbf{p}_0)}{\hbar} - \omega \right) \right] \times \\ \times \left[\frac{1}{\varepsilon(k, \omega)} - \frac{1}{\varepsilon^*(k, \omega)} \right] \theta(\pm p_z). \quad (43)$$

8. СЛЕДСТВИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВАКУУМА ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН

Нас будут интересовать следствия электромагнитных флуктуаций ленгмюровского вакуума. Электромагнитные колебания в вырожденной плазме изучались в работах [7–10]. Процедура квантования ленгмюровских волн, естественным образом, приводит к наличию их флуктуационного вакуума, не исчезающего даже при нулевой температуре. Обратное влияние вакуумных флуктуаций на электроны плазмы оказывается достаточно существенным и заметно изменяет дисперсионные соотношения для них [17]. Подобного рода деформация электронов проявляет себя в свойствах диэлектрической проницаемости фермиевской плазмы, особенно, в области малых волновых чисел k . Теперь в отличие от формулы (10) диэлектрическая проницаемость принимает вид [21]

$$\varepsilon(k, \omega) = 1 - \frac{B_1(k)}{\omega^2} - \frac{B_2(k)}{\omega^2 - c^2(k)} = \\ = \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}{\omega^2 (\omega^2 - c^2(k))},$$

$$\frac{1}{\varepsilon(k, \omega)} - \frac{1}{\varepsilon^*(k, \omega)} = -2\pi i \frac{\omega^2 (\omega^2 - c^2(k))}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \times \\ \times [\delta(\omega^2 - \omega_2^2) - \delta(\omega^2 - \omega_1^2)], \quad (44)$$

где

$$c(k) = \frac{4}{3} \Omega, \quad B_1(k) = \Omega^2, \\ B_2(k) = \frac{9}{16} Z \Omega^2 \left(1 + 2 \frac{k_c^2}{k^2} \sqrt{\frac{4}{9} + Z} \right), \\ Z = \frac{1}{2\pi^2} \frac{e^2}{\hbar v_F} \sqrt{\frac{\varepsilon_F}{\hbar \Omega}} = \frac{1}{2\pi^2 \sqrt{2}} \left(\frac{4\pi l}{r_B} \right)^{3/4}.$$

В этих формулах опущены малые поправки, пропорциональные $Z \ll 1$. Исключение составляет произведение $Z k_c^2 / k^2$, принимающее большие значения при $k \rightarrow 0$. Опущены члены k^2 / k_c^2 в степенях единица и выше. Здесь $r_B = 4\pi \hbar^2 / q^2 m$ — радиус борвской орбиты, $l = n^{-1/3}$ — среднее расстояние между электронами. Параметр Z описывает степень деформации электронов плазмы под воздействием электромагнитного вакуума ленгмюровских волн, меняющую вид диэлектрической проницаемости. Далее

$$\omega_{2,1}^2(k) = \frac{1}{2} (c^2 + B_1 + B_2) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (c^2 - B_1 + B_2)^2 + B_1 B_2}.$$

Уравнение $\varepsilon(k, \omega) = 0$ приводит к двум электромагнитным ветвям колебаний плазмы, частоты которых при $Z \ll 1$ описываются асимптотическими равенствами [21]

$$\omega_1^2 = \Omega^2, \quad \omega_2^2 = \left(\frac{4}{3} \right)^2 \Omega^2$$

при $k_c^2 \gg k^2 \gg Z k_c^2$ (область генерации ленгмюровских квантов) и

$$\omega_1^2 = V_e^2 k^2, \quad V_e^2 = \frac{14 \hbar \Omega}{27 Z m}, \quad \omega_2^2 = \frac{3}{4} Z \Omega^2 \frac{k_c^2}{k^2}$$

при $k^2 \ll Z k_c^2$ (область генерации аномальных квантов, определяемых вакуумными флуктуациями продольного поля).

Графическая зависимость параметра Z от концентрации электронов приведена на рис. 2. Ветви $\omega_1^2 = V_e^2 k^2$ и $\omega_2^2 = 16 \Omega^2 / 9$ формулы (44) осуществляют вклад пропорциональный k^2 / k_c^2 . Им мы пренебрегаем. Оставшиеся асимптоты допускают естественную интерполяцию

$$\omega^2(k) = \left(1 + \frac{3 Z k_c^2}{4 k^2} \right) \Omega^2, \quad (45)$$

отвечающую диэлектрической проницаемости $\varepsilon(k, \omega) = 1 - \omega^2(k) / (\omega + i0)^2$. Подстановка $\omega^2(k)$ в

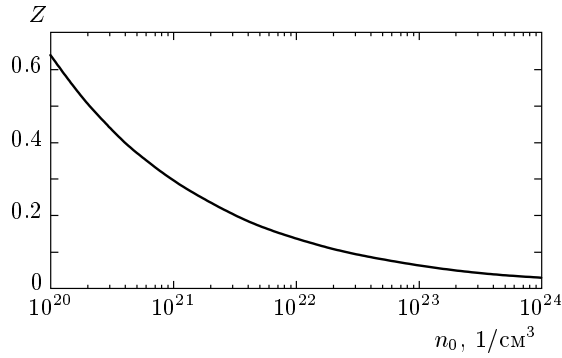


Рис. 2

(34) и (43) в приближении $G_r = G_r^0$, $\varepsilon(\mathbf{p}_0) \gg \hbar\Omega$ и $Z \ll 1$ позволяет записать

$$w^{(n)}(\mathbf{p}) = \pi\hbar \frac{q^2 m L}{V p_0^3} \frac{|\Delta\varepsilon|^2}{|\Delta\varepsilon|^2 - \hbar^2\Omega^2} \times \delta(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta), \quad (46)$$

$$\cos\vartheta_0 = 1 - \frac{3Z}{8p_0^2} \frac{k_c^2 \Omega^2 \hbar^4}{|\Delta\varepsilon|^2 - \hbar^2\Omega^2},$$

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{p}_0) - \varepsilon(\mathbf{p}).$$

При выводе формулы (46) было предположено, что $p_0^2 + p^2 \approx 2p_0^2$. Принимая во внимание, что $(\vartheta_0)_{max} = \hbar k_c / p_0$, находим

$$(|\Delta\varepsilon|^2 - \hbar^2\Omega^2)_{min} = \frac{3}{4} Z \hbar^2 \Omega^2 \quad \text{или}$$

$$(\Delta p)_{min} = (p_0 - p)_{min} = p_0 \frac{\hbar\Omega}{2\varepsilon(\mathbf{p}_0)} \times \left(1 + \frac{3}{8}Z\right). \quad (47)$$

Согласно (43) при $G_r = G_r^0$

$$\left(\frac{\varepsilon(\mathbf{p}_0) - \varepsilon(\mathbf{p})}{\hbar}\right)^2 - \omega^2(k) = 0. \quad (48)$$

Подставляя в $\omega^2(k)$ максимальный аргумент $k_{max} = |\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}|_{max} / \hbar = k_c$, найдем

$$p_{max} = p_0 \left(1 - \frac{\hbar\Omega}{2\varepsilon(\mathbf{p}_0)} \left(1 + \frac{3}{8}Z\right) + \frac{1}{8} \left(\frac{\hbar\Omega}{\varepsilon(\mathbf{p}_0)}\right)^2\right). \quad (49)$$

Полученная из (47) величина p_{max} совпадает с (49), если

$$\frac{3}{2}Z \gg \frac{\hbar\Omega}{\varepsilon(\mathbf{p}_0)}.$$

Мы получили условие применимости используемых ниже формул и оправдали использованное выше приближение $p_0^2 + p^2 \approx 2p_0^2$. Используя в качестве аргумента $\omega^2(k)$ минимальное значение $k_{min} = (\Delta p)_{min} / \hbar$, из формулы (48) находим

$$(\Delta p)_{max} = p_0 \frac{\hbar\Omega}{2\varepsilon(\mathbf{p}_0)} \sqrt{1 + 3Z \frac{\varepsilon(\mathbf{p}_0)}{\hbar\Omega}}, \quad (50)$$

что при $Z \leq 1$ несколько меньше величины $\hbar k_c$. Единицей в (50) можно пренебречь. В этой формуле малый параметр Z умножается на большую величину $\varepsilon(\mathbf{p}_0) / \hbar\Omega$. Поэтому в интегральных характеристиках рассеяния электронов малый параметр Z может играть существенную роль. Из уравнения (46) следует распределение прошедших электронов по модулю их импульсов:

$$w^{(n)}(p) = \frac{p^2 V}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^{\vartheta_{max}} w^{(n)}(\mathbf{p}) \sin\vartheta d\vartheta = \frac{q^2 m L}{4\pi \hbar^2 p_0} \left(1 + \frac{\hbar^2 \Omega^2}{|\Delta\varepsilon|^2 - \hbar^2 \Omega^2}\right), \quad (51)$$

$$\frac{3}{4} Z \hbar^2 \Omega^2 < |\Delta\varepsilon|^2 - \hbar^2 \Omega^2 < 3Z \hbar^2 \Omega^2 \frac{\varepsilon(\mathbf{p}_0)}{\hbar\Omega}.$$

Распределение (51) состоит из фона и ленгмюровского пика. Обусловленная вакуумными флуктуациями ленгмюровских волн ширина этого распределения, определяемая как разность аргументов функций $w^{(n)}(p_{min})$ и $w^{(n)}(p_{max})/2$, оказывается равной $\Delta(\Delta\varepsilon) = 3Z\hbar\Omega/8$. Ранее эта величина теоретическим расчетам не поддавалась, поскольку вакуумные флуктуации продольного электромагнитного поля плазмы во внимание не принимались. Эта ширина определяется параметром Z и, как следует из рис. 1, вполне согласуется с численными экспериментальными данными. Все же полученный результат следует рассматривать как ориентировочный, поскольку форма распределения $w^{(n)}(p)$ чувствительна к виду аппроксимации (45).

Как и в случае вакуума поперечного электромагнитного поля в стандартной теории атомов, вероятность излучения плазмона и ширина его излучения определяются вакуумом, но теперь — продольного электромагнитного поля. Связь между вероятностью излучения и его шириной из соотношения неопределенностей теперь, в отличие от теории атомов, не следует. Вид распределения (51) надлежит учитывать при восстановлении формы распределения отдельного акта рассеяния из экспериментальных данных [3, 33].

Полная вероятность рассеяния электрона при $Z \gg \hbar\Omega / 2\varepsilon(\mathbf{p}_0)$ оказывается равной

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{k}} w^{(n)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) &= \sum_{\mathbf{p}} w^{(n)}(\mathbf{p}) = \int w^{(n)}(p) dp = \\ &= \frac{q^2 mL}{8\pi\hbar^2} \frac{\hbar\Omega}{\varepsilon(\mathbf{p}_0)} \times \\ &\times \left(\sqrt{1 + 3Z \frac{\varepsilon(\mathbf{p}_0)}{\hbar\Omega}} - 1 + \ln \sqrt{\frac{16}{3Z}} \right). \end{aligned} \quad (52)$$

При этом надо учесть, что $(\Delta p)_{min}$ определяется формулой (47), $(\Delta p)_{max}$ определяется формулой (50). Для сравнения приводим формулу для полной вероятности рассеяния электрона, следующую из (37), (38) и отвечающую предельному случаю $Z = 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{k}} w^{(n)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) &= \sum_{\mathbf{p}} w^{(n)}(\mathbf{p}) = \int_0^{\vartheta_{max}} w^{(n)}(\vartheta) d\vartheta = \\ &= \frac{q^2 mL}{8\pi\hbar^2} \frac{\hbar\Omega}{\varepsilon(\mathbf{p}_0)} \ln \sqrt{\frac{4\varepsilon(\mathbf{p}_0)}{\hbar\Omega}}. \end{aligned} \quad (53)$$

Сопоставление (52) с (53) показывает, что учет вакуумных флуктуаций продольных волн плазмы, приводящих к появлению аномальных квантов, численно меняет вероятность рассеяния зондирующих электронов при $Z \sim 1$, на что уже обращалось внимание выше. Введение в теорию параметра $Z \sim 1$ увеличивает эту вероятность примерно в $(\varepsilon(\mathbf{p}_0)/\hbar\Omega)^{1/2}$ раз. Увеличение вероятности обеспечивает фоновая компонента распределения (51). Подобную ситуацию следует ожидать и в других усредненных характеристиках рассеяния.

9. РАДИАЦИОННАЯ СИЛА ТОРМОЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ

Сила F , действующая на слой плазмы с площадью поверхности S и толщиной L со стороны зондирующих частиц определяется импульсом, приобретенным плазмой в единицу времени $n_0 v_0 S p_0$ и импульсом, потерянным ею как в когерентном канале рассеяния

$$n_0 v_0 S p_0 - n_0 S v_0 \sum_{\mathbf{p}} p_0 \Delta w^{(c)}(\mathbf{p}),$$

так и в некогерентном канале

$$n_0 S \sum_{\mathbf{p}} p_z |p_z| \frac{w^{(n)}(\mathbf{p})}{m}.$$

Отраженных электронов при $\varepsilon(\mathbf{p}_0) \gg \hbar\Omega$ нет. Таким образом,

$$\begin{aligned} F &= n_0 v_0 S p_0 - \left(n_0 v_0 S p_0 - n_0 S v_0 \sum_{\mathbf{p}} p_0 \Delta w^{(c)}(\mathbf{p}) \right) - \\ &- n_0 S \sum_{\mathbf{p}} p_z |p_z| \frac{w^{(n)}(\mathbf{p})}{m}, \quad v_0 = \frac{p_0}{m}. \end{aligned}$$

В свою очередь, сила, приходящаяся на каждую рассеиваемую плазмой заряженную частицу, равна $f = F/n_0 S L$. Используя формулы (41) и (43), находим, что

$$\begin{aligned} f &= \frac{\hbar}{V L m} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{k}_0} \int_0^\infty p_z k_z w^{(n)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega) \frac{d\omega}{2\pi} = \\ &= -\frac{\hbar q^2}{V} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{k}_0} \int_0^\infty \frac{k_z}{k^2} \delta\left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}, \frac{\mathbf{p}_0}{\hbar} - \mathbf{k}\right) \times \\ &\times \left[G_r \left(\frac{\mathbf{p}_0}{\hbar} - \mathbf{k}, \frac{\varepsilon(\mathbf{p}_0)}{\hbar} - \omega \right) - \right. \\ &- \left. G_r^* \left(\frac{\mathbf{p}_0}{\hbar} - \mathbf{k}, \frac{\varepsilon(\mathbf{p}_0)}{\hbar} - \omega \right) \right] \times \\ &\times \left[\frac{1}{\varepsilon(k, \omega)} - \frac{1}{\varepsilon^*(k, \omega)} \right] \frac{d\omega}{2\pi}. \end{aligned} \quad (54)$$

Эта формула обобщает стандартный результат [34, 35] на квантовый случай. Она не может быть получена на полуклассической основе. Особенностью этой формулы является ее неаналитичность по постоянной Планка. Она не допускает предельного перехода $\hbar \rightarrow 0$, что связано, в частности, с учетом электромагнитного вакуума ленгмюровских волн, носящего квантовый характер и не имеющего классического аналога.

Расчет силы торможения электронов в среде с диэлектрической проницаемостью, определяемой формулой (54), фактически повторяет вывод формулы (52). Приводим результат расчета при $Z \gg \hbar\Omega/2\varepsilon(\mathbf{p}_0)$:

$$\begin{aligned} f &= \frac{q^2 \Omega^2}{4\pi v_0^2} \left(\sqrt{1 + 3Z \frac{\varepsilon(\mathbf{p}_0)}{4\hbar\Omega}} - 1 + \ln \sqrt{\frac{16}{3Z}} \right), \\ &\frac{3}{2} Z \gg \frac{\hbar\Omega}{\varepsilon(\mathbf{p}_0)}. \end{aligned} \quad (55)$$

Предельный переход $\hbar \rightarrow 0$ здесь недопустим. Для сравнения приводим стандартное выражение для силы торможения, следующее из (54) при $Z = 0$:

$$f = \frac{q^2 \Omega^2}{4\pi v_0^2} \ln \sqrt{\frac{4\varepsilon(\mathbf{p}_0)}{\hbar\Omega}}. \quad (56)$$

Сопоставление формул (55) и (56) показывает при $\varepsilon(\mathbf{p}_0) \gg \hbar\Omega$ и реальных Z , что учет вакуумных

флуктуаций продольных квантов в плазме увеличивает силу лучистого трения зондирующих электронов примерно в $(\varepsilon(\mathbf{p}_0)/\hbar\Omega)^{1/2}$ раз.

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Зондирующие электроны, пересекая плазму, теряют характерную энергию $\hbar\Omega$, где Ω — частота ленгмюровских колебаний плазмы. Вопрос о том, каким образом в теорию попадает постоянная Планка \hbar , оказывается нетривиальным, что ясно видно на примере максвелловской, во всех отношениях классической, плазмы. Искусственное введение \hbar в теорию на полуфеноменологической основе влечет иногда за собой неадекватные результаты. В работе проведено последовательное квантовое описание процесса на основе использования уравнений квантовой электродинамики и квантования продольных волн плазмы (плазмонов). Потеря энергии зондирующими электронами естественно трактуется как процесс спонтанного испускания ими плазмонов вследствие взаимодействия электронов с вакуумными колебаниями продольного электромагнитного поля. Иного механизма не существует. Таким образом, потеря зондирующими электронами энергии $\hbar\Omega$, обнаруженная более пятидесяти лет тому назад, это прямая демонстрация следствий существования в природе квантованного продольного ленгмюровского электромагнитного поля. Квантовое описание поля уже в первом порядке теории возмущений вносит поправки в расчеты существующих полуфеноменологических теорий и указывает на существование электромагнитного вакуума ленгмюровских волн.

Возникает вопрос: возможен ли путь корректного расчета рассеяния зондирующих электронов плазмой без квантования плазменных волн. Процессы поглощения плазмонов зондирующими электронами и процессы рассеяния в низшем порядке теории возмущений могут быть изучены таким образом. С процессами излучения дело обстоит сложнее. На этом пути может быть построена логически незамкнутая [14, 15] полуклассическая теория Ритчи [4] с отмеченными выше ее недостатками. Возможен косвенный путь нахождения правильных формул. Он заключается в предварительном расчете коэффициентов поглощения плазмонов с помощью полуклассической теории с последующим использованием коэффициентов Эйнштейна. Такой путь скрывает физическую причину излучения плазмонов зондирующими электронами, фактически учитывает через термодинамическое равновесие существование ваку-

ума плазменных волн и использует выражение для диэлектрической проницаемости, при расчете которой квантование плазменных волн было уже учтено.

Таким образом, использованный в работе метод квантования поля плазмонов не только адекватен рассматриваемой задаче, но и наиболее прост.

Квантовый электромагнитный вакуум продольных ленгмюровских волн макроскопическим образом деформирует диэлектрическую проницаемость плазмы, что проявляется в возникновении, наряду со спектром ленгмюровских квантов, спектра других, аномальных, квантов. Именно эти кванты определяют в численном согласии с экспериментом уширение ленгмюровских пиков рассеянных электронов. Они же увеличивают интегральную вероятность рассеяния электронов на плазмонах в несколько раз. Последнее обстоятельство указывает на необходимость корректив в работах по восстановлению элементарных сечений рассеяния из экспериментов по рассеянию электронов толстыми металлическими пленками.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Rudberg, Phys. Rev. **50**, 138 (1936).
2. L. Marton and L. B. Leder, Phys. Rev. **94**, 203 (1954).
3. R. F. Egerton and Z. L. Wang, Ultramicroscopy **32**, 137 (1990).
4. R. H. Ritchie, Phys. Rev. **106**, 874 (1957).
5. D. Pines and D. Bohm, Phys. Rev. **85**, 338 (1952).
6. L. Tonks and I. Langmuir, Phys. Rev. **33**, 195 (1929).
7. А. А. Власов, ЖЭТФ **8**, 291 (1938).
8. И. И. Гольдман, ЖЭТФ **17**, 681 (1947).
9. Ю. Л. Климонтович, В. П. Силин, ЖЭТФ **23**, 151 (1952).
10. D. Bohm and D. Pines, Phys. Rev. **92**, 609 (1953).
11. R. A. Ferrell, Phys. Rev. **101**, 554 (1955).
12. R. H. Ritchie, Phil. Mag. **36**, 463 (1977).
13. S. Tougaard and J. Kraar, Phys. Rev. B **43**, 1651 (1991).
14. N. Bohr and L. Rosenfeld, Phys. Rev. **78**, 794 (1950).
15. В. Гайтлер, *Квантовая теория излучения*, Изд-во иностр. лит., Москва (1956).

16. Б. А. Векленко, Прикладная физика № 4, 5 (2011).
17. Б. А. Векленко, *Юбилейная научная конференция, посвященная 50-летию ОИВТ РАН*. Сб. тезисов докладов, Москва (2011), с. 496.
18. М. В. Кузелев, Физика плазмы **36**, 132 (2010).
19. Ю. В. Бобылев, М. В. Кузелев, Физика плазмы **37**, 953 (2011).
20. П. А. Черенков, ДАН СССР **14**, 101 (1937).
21. Б. А. Векленко, Инженерная физика № 1, 14 (2013).
22. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред*, Книжный дом «ЛИБРОКОМ», Москва (2012).
23. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1969).
24. Н. В. Callen and T. A. Welton, Phys. Rev. **83**, 34 (1951).
25. Н. Н. Боголюбов, С. В. Тябликов, ДАН СССР **126**, 53 (1959).
26. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ **47**, 1515 (1964).
27. Ш. М. Коган, ФТТ **2**, 1186 (1960).
28. V. P. Budak and B. A. Veklenko, J. Quant. Spectr. Rad. Trans. **112**, 864 (2011).
29. J. Lindhard and K. Dan, Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Medd. **28**, 8 (1954).
30. D. Pines, *Elementary Excitations in Solids*, Benjamin, New York (1964), Chap. 4.
31. J. J. Quinn, Phys. Rev. **126**, 1453 (1962).
32. L. Kleiman, Phys. Rev. B **3**, 2982 (1971).
33. V. P. Afanas'ev, A. V. Lubenchenko, and M. K. Gubkin, Europ. Phys. J. B **37**, 117 (2004).
34. E. Fermi, Phys. Rev. **57**, 485 (1940).
35. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982), с. 542.