

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-РАСЧЕТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЫБРОСА ЧАСТИЦ С УДАРНО-НАГРУЖЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

*А. Л. Михайлов, В. А. Огородников, В. С. Сасик, В. А. Раевский, А. И. Лебедев,
Д. Е. Зотов, С. В. Ерунов, М. А. Сырунин, В. Д. Садунов, Н. В. Невмержицкий,
С. А. Лобастов, В. В. Бурцев, А. В. Мишанов, Е. В. Кулаков, А. В. Сатарова*,
А. Б. Георгиевская, В. Н. Князев, О. А. Клещевников, М. В. Антипов, В. В. Глушихин,
И. В. Юртов, А. А. Утенков, Е. Д. Сеньковский, С. А. Абакумов, Д. В. Пресняков,
И. А. Калашник, К. Н. Панов, В. А. Аринин, Б. И. Ткаченко, В. Н. Филяев,
А. В. Чапаев, А. В. Андраманов, М. О. Лебедева, В. В. Игонин*

*Российский федеральный ядерный центр –
Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики
607188, Саров, Нижегородская обл., Россия*

Поступила в редакцию 30 июня 2013 г.

Продемонстрированы возможности созданного в Институте экспериментальной газодинамики и физики взрыва (ИФВ) РФЯЦ–ВНИИЭФ измерительного комплекса «Пыление», предназначенного для исследования параметров частиц, выбрасываемых со свободной поверхности ударно-нагруженных материалов. Работа комплекса основана на трех дополняющих друг друга методах с использованием разных физических принципов: лазерно-оптическом методе (макро- и микросъемке), методах импульсной рентгенографии и пьезоэлектрических датчиков давления. С их применением исследован выброс частиц со свободной поверхности образцов из свинца при выходе на нее ударной волны с давлением на фронте 7, 16, 23 ГПа. Показана степень влияния шероховатости поверхности и амплитуды давления на фронте ударной волны на количественные характеристики процесса. Расчетно-теоретическое моделирование осуществляли путем двумерных численных расчетов газодинамических течений, результаты которых использовались для оценок характеристик «пыления» по предложенной феноменологической модели процесса.

DOI: 10.7868/S0044451014050127

При нормальном падении ударной волны (УВ) на свободную поверхность (СП) образца из конденсированного материала может наблюдаться ряд эффектов, связанных, например, с отклонением скорости движения СП от закона удвоения, дисперсией скорости поверхности или потерей ею устойчивости. В реальных случаях СП металлов всегда имеет искажения. Это может быть шероховатость поверхности и локальные микродефекты. Взаимодействие УВ с любыми неоднородностями поверхности приводит к возникновению неустойчивого течения — неустойчивости Рихтмайера–Мешкова [1, 2]. Обзор работ, посвященных исследованиям этого процесса в газах и жидкостях, представлен в [3, 4]. Частным случа-

ем гидродинамической неустойчивости СП сплошной среды при выходе на нее УВ интенсивностью в несколько гигапаскалей, может быть микрокумуляция, обусловленная шероховатостью СП из-за неидеальности механической обработки. В этом случае после выхода УВ на СП конденсированной среды возмущения «переворачиваются» по фазе и в дальнейшем из впадин начальных возмущений развиваются кумулятивные струи, впоследствии распадающиеся на множество частиц. Этот процесс называют выбросом частиц с СП материала или «пылением» [5, 6]. Исследованию различных стадий этого процесса посвящены работы [5–18].

Интерес к проблеме «пыления» обусловлен рядом причин, а именно нежелательным влиянием выброса частиц с СП на результаты измерений динамики ее движения с использованием теневых,

*E-mail: satarova_n@bk.ru

электроконтактных, емкостных и интерферометрических методов регистрации движения [5], а также важности в ряде физических процессов, например, в проблеме инерциального термоядерного синтеза при сжатии плазмы [19, 20]. Рассматриваемое явление представляет большой практический интерес применительно к исследованию диспергирования конструкционных материалов, в том числе делящихся, под действием ударно-волновых нагрузок с точки зрения образования и распыления мелкодисперсной фракции при гипотетических авариях с ядерным оружием или на атомной электростанции [21]. Несмотря на определенный интерес, проявляемый к проблеме «пыления» как в России, так и за рубежом [5–18], ряд вопросов по-прежнему остается открытым. В частности, интерес представляет определение массы выброшенных частиц с СП металла, распределение плотности частиц в пространстве и его эволюция во времени, спектральные характеристики процесса «пыления» — распределения частиц по размерам и скоростям. Развитие этого процесса зависит от ряда начальных условий — величины начальных возмущений на СП, амплитуды и формы выходящей на нее УВ, фазового состояния металла и его реологических характеристик после УВ-воздействия. Исследование такого широкого спектра задач требует проведения экспериментов с применением высокоточных диагностических методов и создания численных методик, позволяющих рассчитывать эти процессы на временах, характерных для экспериментов.

На первых этапах этих исследований в Институте экспериментальной газодинамики и физики взрыва (ИФВ) РФЯЦ-ВНИИЭФ использовали рентгенографическую и фотохронографическую методики регистрации [6]. Было показано, что «пыление» с СП определяется в основном не дефектами в образцах или способом их изготовления (литье, прессование, термообработка), а неидеальностью СП, связанной с шероховатостью или чистотой ее обработки. Результаты опытов по нагружению УВ образцов из стали, алюминия, меди и свинца, имеющих высоту неровностей профиля СП от 80 мкм до 3.2 мкм, свидетельствовали о примерно линейной зависимости количества выбрасываемого металла от шероховатости поверхности и плотности материала образца:

$$m = kR_z\rho_0,$$

где m [мг/см²] — удельная на единицу поверхности масса выбрасываемого металла, R_z — параметр шероховатости в соответствии с ГОСТ 2789-73 или средняя высота микронеровностей, ρ_0 [г/см³] —

плотность металла, $0.1 \leq k \leq 0.5$ в зависимости от материала образца [6]. Анализ полученных результатов для различных металлов показал, что выбрасываемый с СП объем вещества при близких значениях R_z практически одинаков, а это свидетельствует в пользу микрокумулятивного механизма выброса частиц. Результаты фотометрирования рентгеновских снимков указывали на то, что плотность потока выброшенных частиц убывает в направлении от СП к его переднему фронту, а их скорость превышает скорость СП в 1.2–1.8 раз в зависимости от конкретного металла и величины R_z . Следует отметить, что наряду со средней высотой микронеровностей и расстоянием между ними, которые можно принять за начальные амплитуду a_0 ($R_z \approx 2a_0$) и длину волны λ возмущений СП, на процесс «пыления» должна влиять и прочность материала образца [10, 12, 22]. В работе [10] расчетно-теоретически было показано, что существует критическое соотношение параметров начальных периодических возмущений на СП вещества и интенсивности УВ, при котором прочность материала может не только уменьшить скорость выброса частиц, но и полностью подавить рост возмущений. В упругопластическом веществе с линейным термическим разупрочнением критическое значение начальной амплитуды возмущений, при котором возможно разрушение струи и отрыв частиц с поверхности, имеет вид

$$\left(\frac{a_0}{\lambda}\right)_c \approx \frac{1}{\pi U_{fs}} \left(\Delta Q_m \left(1 - \exp\left(-\frac{Y \varepsilon_p}{\rho_0 \Delta Q_m}\right) \right) + \frac{2\pi\gamma}{\lambda\rho_0} \right)^{1/2},$$

где U_{fs} — скорость свободной поверхности вещества, γ — работа по образованию единицы новой поверхности, аналогичная поверхностному натяжению жидкостей, Y — предел текучести в веществе, разгруженном после УВ-воздействия, ΔQ_m — удельная энергия, необходимая для нагрева вещества до состояния плавления, ε_p — критическое значение деформации, при которой начинается разрушение вещества.

Позднее в работе [12] этот результат был подтвержден экспериментально в опытах с алюминиевыми образцами с различной величиной начальных возмущений. Подобные исследования проводятся в Лос-Аламосской национальной лаборатории [22].

Помимо выяснения условий, при которых происходит образование частиц, и механизма их выброса с СП при выходе на нее УВ рассмотрен вопрос о размерах частиц и их зависимости от величины R_z . Раз-

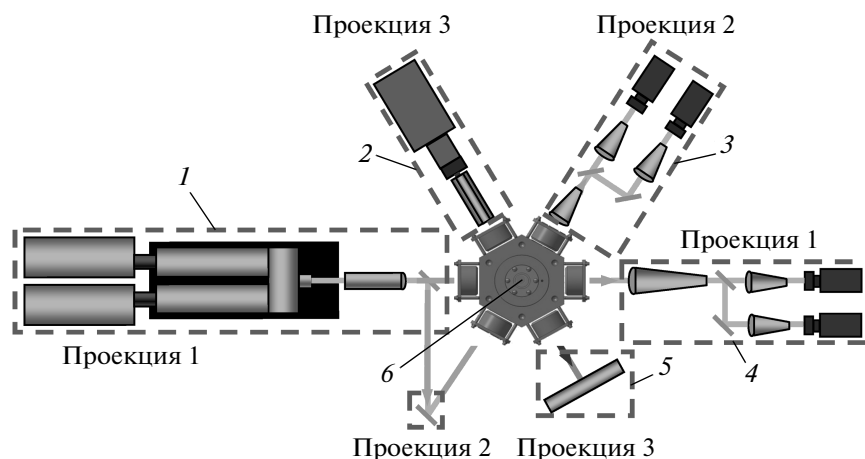


Рис. 1. Схема аппаратного комплекса «Пыление»: 1 — лазерная система подсветки, 2 — система импульсной рентгенографии, 3 — система построения и регистрации изображения на макроуровне, 4 — система построения и регистрации изображения на микроуровне, 5 — система регистрации рентгенографического изображения, 6 — приемник с пьезодатчиками

мер частиц оценивали, основываясь на экспериментальном исследовании их торможения в сжатом воздухе и других газах [6]. В опытах с использованием образцов из меди и фотохронографического метода регистрации траектории движения частиц установлено, что основная масса частиц, выбрасываемых с СП, характеризуется размерами $R = 15 \pm 10$ мкм и $R = 30 \pm 15$ мкм, что соответствует высоте микрорельефа этих поверхностей ($R \approx R_z$).

Ясно, что такие оценки массы и размеров частиц [6] являются приближенными, поскольку основываются на ряде упрощающих предположений, и требуют уточнения. С этой целью в работе [18] для регистрации изображения потока частиц с СП использовали также теневой метод, но с применением высокоскоростной электронно-оптической камеры с ПЗС-матрицей и импульсной лазерной подсветки с длительностью импульса 4 нс. Было получено распределение частиц по размерам и скоростям, что явилось основанием для дальнейшего развития методики.

Интерес к рассматриваемой проблеме возобновился в последнее десятилетие во многих странах, в том числе и в России [13, 15–18, 23, 24]. Так, в ИФВ РФЯЦ–ВНИИЭФ создан измерительно-вычислительный комплекс (ИВК) «Пыление», в котором одновременно использованы независимые методики: двухкадровой двухракурсной электронно-оптической микро- и макросъемки, импульсной рентгенографии и пьезоэлектрического датчика. Схема измерительного комплекса «Пыление» приведена на

рис. 1. Применение двухимпульсной лазерной подсветки с наносекундной длительностью и современных электронных регистраторов с ПЗС-матрицами позволяет получать данные о распределении частиц на фронте потока по размерам и скоростям, а использование методик импульсной рентгенографии и пьезоэлектрического датчика позволяет получать информацию о распределении плотности и массы в потоке частиц перед СП образца в направлении их движения, а также данные о местонахождении фронта потока частиц и СП во времени и пространстве.

Регистрацию теневого изображения потока частиц проводили в двух проекциях 1 и 2, как показано на рис. 1. В проекции 1 проводили микроскопическую съемку процесса, а в проекции 2 — макроскопическую съемку. Излучение двухимпульсного неодимового лазера с длиной волны 532 нм делили с помощью полупрозрачного зеркала на два луча одинаковой интенсивности и направляли в двух проекциях. При этом для создания равномерной освещенности исследуемого процесса в каждой из проекций лазерное излучение проходило через набор «молочных» светофильтров. Трансляцию лазерного излучения в обеих проекциях внутрь взрывокализирующей камеры к исследуемому образцу и к системам регистрации осуществляли через оптические окна (кварцевое стекло). В проекциях 1 и 2, вне взрывокализирующего контура, располагали системы регистрации, состоящие из оптических систем построения изображения, выполненных из объективов с различны-

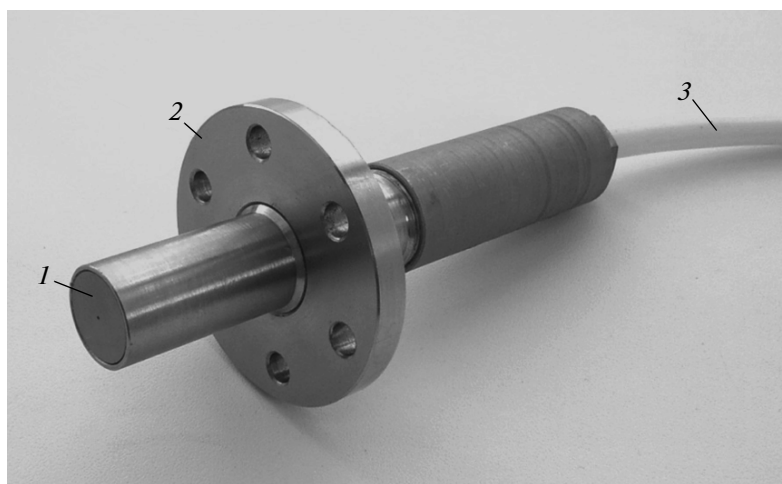


Рис. 2. Матричный пьезодатчик: 1 — чувствительная зона, 2 — фланец для крепления датчика, 3 — кабель

ми фокусными расстояниями и высокоскоростных цифровых камер. Для управления цифровыми камерами в опытах использовали персональные компьютеры. Времена выхода импульсов лазерного излучения t_1 и t_2 ($t_2 - t_1 \leq 1$ мкс) и срабатывания высокоскоростных цифровых камер регистрировали с помощью осциллографов. Такая компоновка систем регистрации на макро- и микроуровнях позволяет проводить исследование процесса пыления по двум независимым каналам с двухкадровой регистрацией процесса в каждом из них в разные моменты времени t_1 и t_2 , которые в дальнейшем используются для определения как скорости фронта основного потока, так и скорости опережающих его отдельных частиц, по их смещению относительно начального положения свободной поверхности исследуемого образца.

Регистрацию рентгеновского изображения, соответствующего процессу выброса частиц со свободной поверхности ударно-нагруженного материала в заданный момент времени, осуществляли с помощью генератора рентгеновских импульсов «ГРИ-1000» и пакета из десяти запоминаящих пластин, которые располагали вне взрывокализирующего контура. Рентгенографирование процесса «пыления» проводили через окна взрывокализирующего контура из алюминия Д16 в проекции 3, как показано на рис. 1. Коэффициент увеличения изображения при рентгеновской съемке составил значение $K = 1.03$. В качестве тест-объекта использовали свинцовый, алюминиевый и вольфрамовый клинья, которые располагали непосредственно в зонах, граничащих с областью протекания регистрируемого процесса. Измерение времени выхода импульса

рентгеновского излучения осуществляли с помощью сцинтилляционного детектора ССДИ-8М и осциллографов.

Для проведения измерения интегральных параметров пылевого потока в экспериментах использовали матричный пьезодатчик давления, вид которого показан на рис. 2. Основой данного датчика является поляризованный пьезокерамический элемент, разделенный на несколько независимых пьезочувствительных зон. Такая конструкция позволяла наиболее оптимально использовать интересующую область экспериментальной сборки, равную диаметру пылевого потока, при обеспечении максимально возможной чувствительности каждой пьезочувствительной зоны. Площадь отдельной чувствительной зоны приблизительно равнялась 0.2 см^2 , что примерно в 6 раз больше, чем у датчиков, использовавшихся в работе [15]. Большая площадь чувствительных зон позволяла определять усредненные параметры потока, в то время как при использовании небольших датчиков получаемые данные больше отражают локальные параметры потока и могут существенно отличаться от средних для потока значений. Пьезоэлемент изготавливался из сегнетожесткой пьезокерамики, сохраняющей линейные свойства пьезоэффекта в области давлений до сотен мегапаскалей. Сигналы от каждой из пьезочувствительных зон пьезоэлемента передавались по независимым радиочастотным кабельным линиям. Каждый сигнал регистрировали одновременно не менее чем на четырех каналах осциллографов, имевших разные чувствительности, что позволяло регистрировать низкоплотные и высокоплотные части потоков. Перед

пьезоэлементом расположен латунный экран, защищающий пьезоэлемент от разрушения. После изготовления датчики калибровали импульсами давления, имевшими амплитудно-временные параметры близкие к параметрам создаваемых потоком частиц.

Пьезоэлектрический метод получения данных о плотностях и массах пылевых потоков аналогичен использованному в работе [15]. Метод основан на следующих предположениях: 1) выброс частиц происходит мгновенно (сразу после выхода УВ на СП образца), 2) удар частиц по пьезодатчику (ps) — неупругий, 3) частицы в вакууме не взаимодействуют друг с другом.

В опытах моменты удара фронта потока частиц (t_p) определяли по зарегистрированным сигналам пьезодатчиков, а по резкому возрастанию их амплитуды — момент удара по датчикам СП (t_{fs}). При обработке сигналов получали зависимости от времени следующих величин: $p(t)$ — давления пылевого потока на торец датчика, $\rho(t)$ — средней плотности частиц в потоке, налетавшем на торец датчика, $m(t)$ — удельной массы потока, налетавшего на единицу поверхности датчика, $I(t)$ — суммарного импульса налетающего потока частиц, U_n, U_{fs} — скоростей фронта потока частиц и СП. С учетом введенных предположений справедлива система преобразования сигнала:

$$P(t) = \frac{1}{d_{ps}S} \int_{t_i}^t \frac{V(t)}{R} dt, \quad \rho(t) = \frac{t^2}{d_{ps}Sh^2} \int_{t_i}^t \frac{V(t)}{R} dt,$$

$$m(t) = h \int_{t_i}^t \frac{\rho(t)}{t} dt, \quad I(t) = \int_{t_i}^t P(t) dt,$$

$$U(t) = \frac{h}{t}, \quad U_{fs} = \frac{h}{t_{fs}},$$

где d_{ps} — пьезомодуль чувствительного элемента пьезодатчика, S — площадь чувствительного элемента ПД, $V(t)$ — напряжение, регистрируемое на осциллографах, R — согласующее сопротивление, h — расстояние от начального положения СП образца до пьезодатчика.

Развитие методик регистрации параметров процесса выброса частиц с использованием современной элементной базы и их совмещение в одном эксперименте открывает новые возможности для исследования этого процесса с учетом структуры и дефектности материала, его фазового состояния, наличия газовой среды перед СП, начального давления в ней и т. п. Полученная в таких экспериментах информация позволит восполнить существующий пробел в

знаниях, создать более обоснованные модели процесса и методики расчета выброса частиц с СП металлов при выходе на нее УВ различной интенсивности и профиля.

В данной работе с применением ИВК «Пыление» исследовали выброс частиц с СП образцов из свинца С1 в объеме камеры с разреженным воздухом при давлении около $2 \cdot 10^4$ Па. Образцы имели диаметр 35 мм и толщину 2.0 мм. Поверхность образца, с которой происходил выброс частиц, имела шероховатость R_z или глубину микронеровностей от 8 мкм до 160 мкм и расстояния между вершинами микронеровностей λ от 30 мкм до 520 мкм, получаемые в результате токарной обработки. На рис. 3 приведены схемы нагружения образцов, расположенных в камере, и фотографии микрорельефа СП. Опыты проводили с использованием взрывозащитной камеры, позволяющей обеспечить герметизацию объема, локализовать продукты взрыва и частицы диспергированного свинца.

Ударную волну в образцах создавали при контактном подрыве заряда взрывчатого вещества диаметром 15 мм и высотой 5 или 10 мм на стенке взрывозащитной камеры из стали (12Х18Н10Т) толщиной 2 и 5 мм, отделяющей образец от заряда взрывчатого вещества. В такой геометрии на СП свинцовых образцов выходит нестационарная УВ (УВ со спадающим профилем давления за ее фронтом — волна Тейлора [25]). Градиент давления dp/dx за фронтом УВ, выходящей на СП образца, определяется затуханием УВ по мере прохождения по стали и образцу. Эта величина, соответственно, зависит от геометрии эксперимента и уравнений состояния используемых веществ [26, 27]. С целью калибровки численных расчетов были проведены специальные опыты по измерению профилей скорости свободной поверхности образцов из стали с помощью лазерного интерферометра Фабри–Перо [28]. Такие эксперименты позволяли получить надежную информацию о затухании в стальной стенке взрывозащитной камеры нестационарной УВ, которая впоследствии распространялась в свинцовые образцы. С учетом данных, полученных методом лазерной интерферометрии, в такой постановке на СП образцов из свинца выходит УВ, имеющая амплитуду на фронте $p = 7, 16, 23$ ГПа. Основные параметры постановки проводимых опытов приведены в табл. 1.

Для иллюстрации на рис. 4а,б приведены результаты одного из опытов, регистрируемые с помощью макро- и микросъемки при использовании двухимпульсной лазерной подсветки длительностью 4 нс, а на рис. 4в,г — с помощью соответственно им-

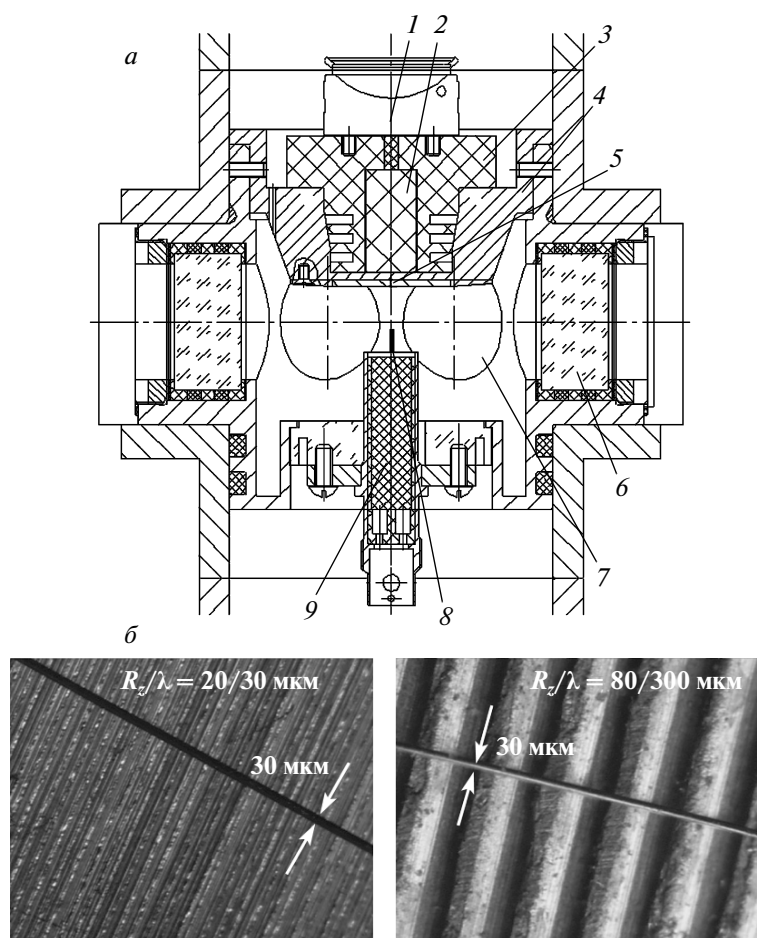


Рис. 3. а) Схема нагружения образцов, расположенных в камере: 1 — розетка с электродетонатором, 2 — заряд взрывчатого вещества, 3 — вставка из пенопласта, 4 — стальная обойма, 5 — образец из свинца $\text{Ø}35 \times 2 \text{ мм}^2$, 6 — оптическое стекло $\text{Ø}40 \times 20 \text{ мм}^2$, 7 — крышка из алюминия марки Д16 $\text{Ø}40 \times 2 \text{ мм}^2$, 8 — тест-объект для оптической настройки изображения ($\text{Ø}0.2 \times 5 \text{ мм}^2$), 9 — матричный пьезодатчик. б) Микрорельефы СП

Таблица 1. Параметры постановки опытов

Параметр	Опыт 1	Опыт 2	Опыт 3	Опыт 4	Опыт 5	Опыт 6	Опыт 7
Δ_{expl} , мм	5	10	10	10	10	10	10
Δ_{Fe} , мм	—	5.00	5.00	5.00	1.36	1.40	1.43
Δ_o , мм	7.75	1.97	2.00	2.00	1.95	1.88	2.05
R_z , мкм	160	8	8	40–80	8	8	40–80
λ , мкм	520	30	30	300	30	30	300
p , ГПа	7	16	16	16	23	23	23

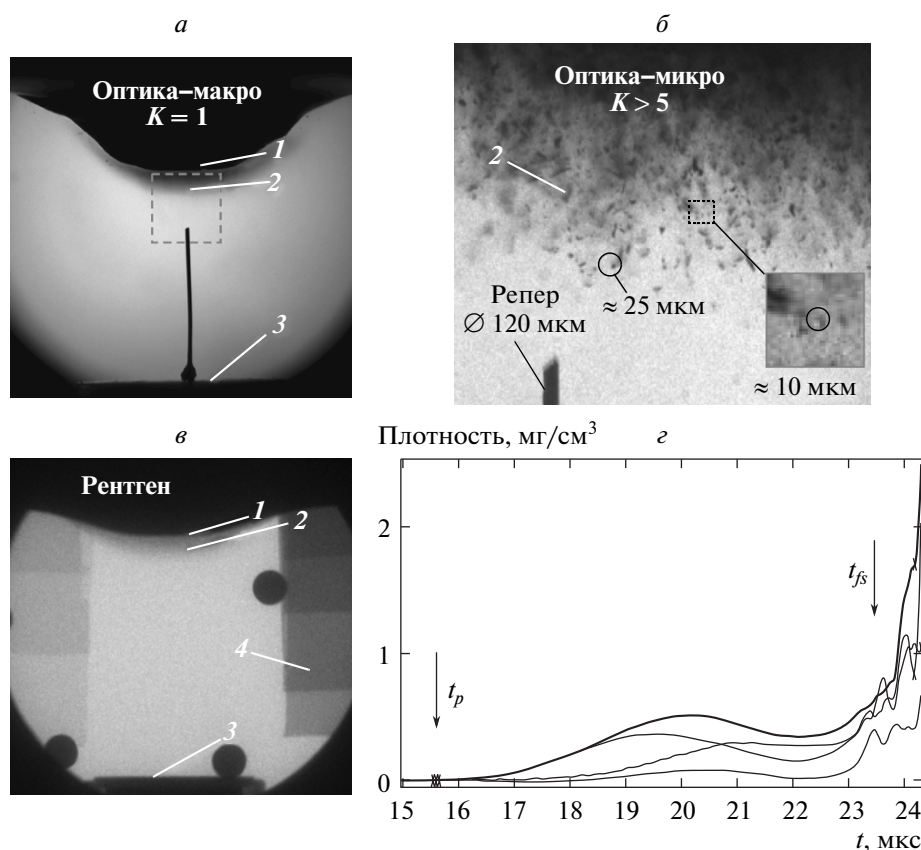


Рис. 4. Результаты опыта. 1 — СП, 2 — поток частиц, 3 — пьезодатчик, 4 — эталоны из свинца, t_p , t_{fs} — моменты нагружения пьезодатчиков потоком частиц и свободной поверхностью образца, K — коэффициент оптического увеличения

пульсной рентгенографии с длительностью импульса 10 нс и пьезоэлектрических датчиков давления.

Результаты обработки всех опытов приведены в табл. 2 и на рис. 5 в виде $x-t$ -диаграмм движения СП и переднего фронта потока частиц, движущихся впереди ее, а на рис. 6 — в виде распределения частиц по размерам и скоростям. В табл. 2 приняты следующие обозначения: d — диаметр частицы; m_{x-ray} , m_{piezo} — значения удельной массы потока частиц с единицы поверхности, оцененные соответственно с помощью методик импульсной рентгенографии и пьезоэлектрических датчиков. Погрешности измерения представленных в табл. 2 величин составляют: ± 4 мкм для диаметра частиц (оптическая микросъемка); $\pm 2\%$ и 20% для скорости частиц (пьезодатчик и оптическая съемка); $\pm 30\%$ и $\pm 50\%$ для удельной массы (пьезодатчики и рентгеновская съемка).

Из данных, приведенных в табл. 2 и на рис. 4, 6, следует, что результаты, полученные с использова-

нием независимых методик регистрации, не противоречат друг другу. Совместное использование независимых методик позволяет одновременно регистрировать форму и положение фронта потока частиц и СП образца, что дает информацию об их средних скоростях. Наряду с этим пьезоэлектрическая и рентгенографическая методики позволяют измерять распределение плотности налетающего на датчики потока частиц в зависимости от времени и оценивать удельную массу частиц в потоке.

Из табл. 2 видно, что с ростом шероховатости СП (или при увеличении амплитуды и длины волны возмущений) увеличивается интенсивность процесса выброса потока частиц и наблюдается увеличение его массы. При фиксированном значении параметров шероховатости СП, с ростом амплитуды давления на фронте УВ не происходит заметного увеличения массы выброшенного потока частиц, при этом увеличение давления, по-видимому, приводит к

Таблица 2. Результаты опытов

Характеристика	Опыт 1	Опыт 2	Опыт 3	Опыт 4	Опыт 5	Опыт 6	Опыт 7
d^{max} , мкм	≤ 100	≤ 5	≤ 5	≤ 15	≤ 5	≤ 5	≤ 15
U_{fs} , км/с	0.50	0.90	0.90	0.90	1.20	1.20	1.30
U_n , км/с	0.95	1.44	1.2	1.80	1.90	1.40	2.1
m_{x-ray} , мг/см ²	23	—	—	23	—	—	—
m_{piezo} , мг/см ²	35	0.2	0.4	30	0.3	0.7–3.3	30

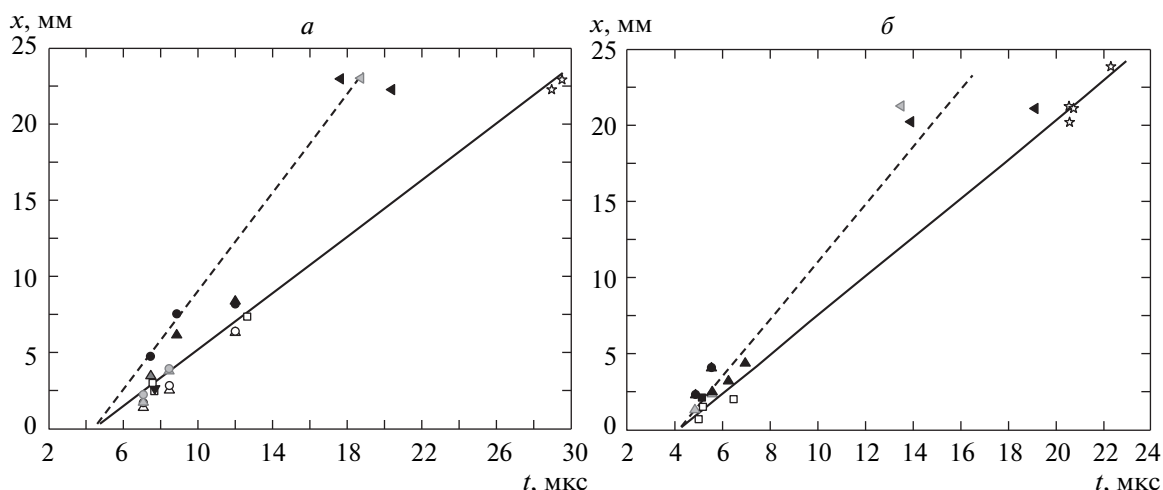


Рис. 5. $x-t$ -диаграммы движения свободной поверхности и потока частиц, построенные по результатам экспериментов с образцами из свинца при давлении в УВ 16 ГПа (а) и 23 ГПа (б). Положение СП (сплошные линии): □ — рентгенография, светлая звездочка — пьезоэлектрическая методика; положение фронта потока пыли (штриховые линии): ■ — рентгенография, ▲ — макросъемка, ● — микросъемка, ◀ — пьезодатчик

уменьшению размеров частиц, что не позволяет визуализировать их лазерно-оптическим методом регистрации при существующей разрешающей способности.

Что касается размеров частиц и их спектра, то наблюдаемые в экспериментах частицы имеют размеры приблизительно до 100 мкм только в опытах с параметрами шероховатости поверхности $R_z/\lambda = (40-80)/300-160/520$ (опыты 1, 4, 7). Для образцов с параметрами шероховатости $R_z/\lambda = 8/30$ (опыты 2, 3, 5, 6) размеры частиц меньше 5 мкм, что находится ниже разрешающей способности используемых регистраторов лазерно-оптической методики, а масса частиц недостаточна для ее надежной регистрации рентгенографической методикой.

Расчетно-теоретическое моделирование экспериментов состояло из двух этапов. На первом этапе

проводили двумерное численное моделирование возникающих в экспериментах течений по методике ЭГАК [29]. В двумерных расчетах определяли амплитуду давления p на фронте УВ, уменьшение давления dp/dx за фронтом УВ (скорости деформации $\dot{\epsilon}$, характеризующей уменьшение скорости за фронтом УВ), скорость свободной поверхности U_{fs} , фазовое состояние материала после УВ-воздействия.

В расчетах для свинца и стали использовали уравнение состояния Ми-Грюнайзена [30], параметры которого приведены в табл. 3.

Расчет детонации и продуктов взрыва проводился с использованием уравнения состояния в форме, подробно изложенной в работе [31]. Иницирование детонации задавали в пятне диаметром 1 мм, расположенном в центре поверхности заряда взрывчатого вещества.

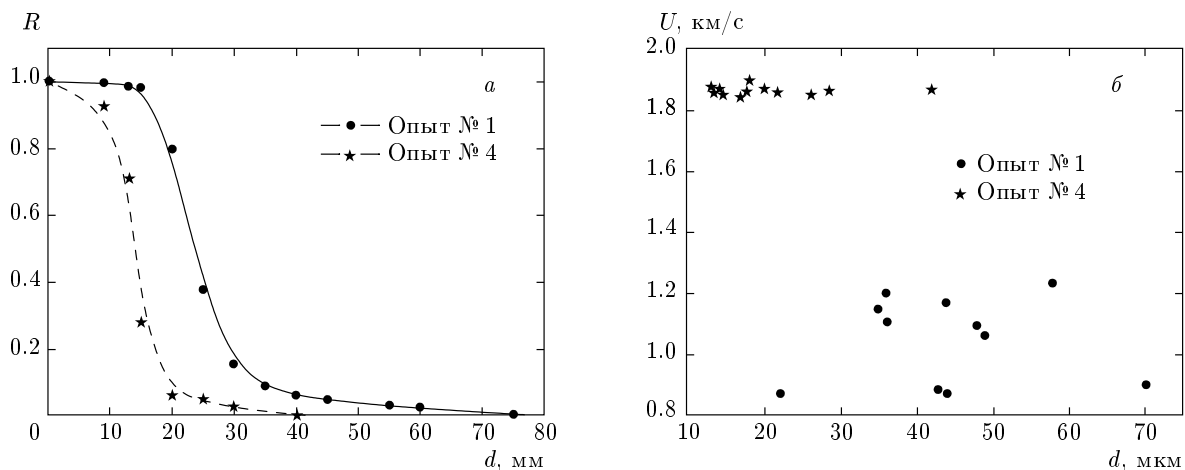


Рис. 6. Распределения частиц, полученные микроскопической видеосъемкой в опытах №1 и №4: а — по размерам, б — по скоростям частиц различных размеров

Таблица 3. Параметры уравнения состояния Ми – Грюнайзена с переменной и постоянной Γ

Материал	ρ_0 , г/см ³	ρ_{00} , г/см ³	c_0 , км/с	Γ	$n - 1$	P_0 , ГПа	M	Γ_{00}	Γ_{∞}	C_v , Дж/(г·К)
Сталь 12X18H10T	7.89	7.89	4.57	1.000	3.500	-7.0	1.2	1.8 5	0.7	0.60
Свинец С1	11.40	11.34	2.14	2.469	2.000	-0.1	-	-	-	0.12

Результаты численных расчетов опытов №№1–7 приведены в табл. 4.

Полученные результаты использовали в дальнейшем для оценки характеристик ударно-волнового «пыления»: скорости фронта потока частиц U_n^c , массы частиц, выброшенной с поверхности, m_p и размера частиц \bar{d}_m по соотношениям, приведенным ниже.

Детальный расчет исследуемых процессов представляется весьма сложной задачей. Молекулярно-динамические расчеты могут дать некоторые представления о развитии этого процесса. Тем не менее, масштабы и времена в таких расчетных схемах на несколько порядков меньше, чем в реальных конструкциях [17, 32–35]. В работах [36, 37] предложено для оценки характерного размера частиц при фрагментации среды использовать энергетический критерий, развитый в работах [38, 39]. Характерный размер \bar{d} определяли из равенства кинетической энергии фрагмента и работы, затрачиваемой на его деформирование, по формуле

$$\rho_0 \frac{\dot{\epsilon}_i^2 \bar{d}^2}{8} = \alpha_1 (\dot{\epsilon}_i \mu + Y) \epsilon_p + \alpha_2 \frac{4\gamma}{\bar{d}}, \quad (1)$$

где μ — коэффициент вязкости, $\dot{\epsilon}_i$ — скорость деформации, реализуемая во фрагменте при дроблении среды, α_1, α_2 — безразмерные параметры.

При $Y = 0$ и $\epsilon_p = 0$ получаем уравнение для жидкости с поверхностным натяжением [36].

Уравнение (1) применимо к среде, в которой скорость деформации постоянна. В случае развития неустойчивости на поверхности вдоль образующихся струй скорость деформации не постоянна, а распределена по глубине. В работе [37] рассмотрен случай выхода стационарной УВ (скорость вещества за фронтом УВ постоянна) на СП металла, граничащего с вакуумом (число Атвуда $A = -1$). С использованием решения Рихтмайера [1] для малых периодических возмущений синусоидальной формы было получено распределение скорости деформации и, соответственно, характерных размеров частиц в облаке. С учетом этого решения и с применением перколяционной модели [40] было выведено соотношение для расчета спектра размеров частиц [37]:

$$W(d) = \frac{1 - \exp\left(-\left(d/\bar{d}_m\right)^3\right)}{\left(d/\bar{d}_m\right)^3}, \quad (2)$$

Таблица 4. Результаты численных расчетов

Характеристика	Опыт 1	Опыты 2–4	Опыты 5–7
p , ГПа	7	16	23
dp/dx , ГПа/см	22.4	65.6	112.5
$\dot{\epsilon} \cdot 10^5$, 1/с	1.0	3.4	5.3
U_{fs} , км/с	0.51	1.05	1.37

где $W(d)$ — вероятность найти частицу с размером больше данного, \bar{d}_m — средний размер на фронте потока частиц, рассчитанный по уравнению (1), при этом скорость деформации в вершине струи $\dot{\epsilon}_{im} = (2/\sqrt{3}) kV_m$ [10, 36], $k = 2\pi/\lambda$, $V_m = U_n - U_{fs}$.

В случае малых периодических возмущений ($a_0k \ll 1$) скорость вершины струи относительно СП можно принять равной $V_m \approx a_0kU_{fs}$ [1]. В работе [22] приводится более точное соотношение с учетом нелинейности и сжимаемости начальных возмущений:

$$U_n = \left(1 - \frac{U_{fs}}{2D}\right) \frac{1}{1 + (a_0k/2)^2} a_0kU_{fs} + U_{fs}, \quad (3)$$

где D — скорость УВ, выходящей на СП материала.

Уравнение (3) можно использовать для расчета скорости фронта потока частиц в случае, когда металл после УВ-воздействия переходит в жидкое состояние или прочностные свойства оказывают слабое влияние на рост струи. В случае, когда после УВ-воздействия материал сохраняет прочностные характеристики, использовали соотношение для U_n , полученное для вещества с линейным термическим разупрочнением из равенства кинетической энергии возмущения и работы, затраченной на деформирование и отрыв вещества от струи [10]:

$$U_n = U_{fs} + \left(\left[\left(1 - \frac{U_{fs}}{2D}\right) \frac{1}{1 + (a_0k/2)^2} a_0kU_{fs} \right]^2 - 4\Delta Q \left(\left(1 - \exp\left(-\frac{Y\varepsilon_p}{\rho_0\Delta Q}\right)\right) + k\frac{\gamma}{\rho_0} \right) \right)^{1/2}, \quad (4)$$

где ΔQ — энергия, необходимая для плавления материала.

Важной характеристикой процесса «пыления» является общее количество выброшенной массы вещества с СП. В случае, когда на СП выходит стационарная УВ, общее количество выброшенной массы

в зависимости от времени определяется соотношением из работы [37]:

$$m_p \approx \frac{\rho_0}{2k} \frac{\tau \ln(1 + \tau)}{\tau + \ln(1 + \tau)}, \quad (5)$$

где $\tau = k(U_n - U_{fs})t = kV_mt$ — безразмерное время, t — время.

Уравнение (5) было получено из закона сохранения массы при рассмотрении динамики движения углубления (пузыря) и вещества, вовлекаемого в развитие струи, [37]. Уравнение (5) применимо только в случае выхода стационарной УВ на СП вещества. Однако при нагружении образцов взрывчатого вещества в рассматриваемых опытах на СП выходит нестационарная УВ. Падение такой волны на СП приводит не только к образованию неустойчивости на поверхности вещества, но и к диспергированию материала, связанному с образованием растягивающих напряжений внутри образца [27]. Для веществ с малой величиной откольной прочности разрушение материала приводит к уменьшению средней плотности образца ρ_s [41]:

$$\rho_s(t) \approx \frac{\rho_0}{1 + \dot{\epsilon}t}. \quad (6)$$

Выход нестационарной УВ на СП вещества окажет влияние на динамику роста углубления и, соответственно, на скорость вещества, вовлекаемого в развитие струи. Уменьшение скорости за фронтом УВ, выходящей на СП вещества, следует учитывать в решении Рихтмайера [1] следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{u}_x &= -V_m \cos(ky)e^{kx} + \dot{\epsilon}x, \\ \dot{u}_y &= V_m \sin(ky)e^{kx}, \end{aligned} \quad (7)$$

где u_x , u_y — смещение вещества вдоль осей x и y после выхода УВ на СП, $\dot{\epsilon} = 2\partial u/\partial x$ — скорость деформации за фронтом УВ, u — массовая скорость вещества за фронтом УВ.

В соответствии с начальным распределением скоростей (7) скорость роста углубления (пузыря) в зависимости от времени будет подчиняться закону

$$k\frac{dx}{d\tau} = e^{kx} + \beta kx, \quad (8)$$

где $\beta = \dot{\epsilon}/kV_m$ — безразмерный параметр, определяющий уменьшение давления за фронтом УВ.

Подобно тому, как в работе [37] получено уравнение (5) для случая выхода стационарной УВ, учет влияния спадающего профиля УВ на плотность образца (6) и распределение скоростей (7) позволяет

рассчитать поток вещества в основании струи \dot{m}_p и, соответственно, массу выброшенного вещества m_p :

$$\begin{cases} \dot{m}_p(\tau) = \rho(\tau)V(\tau)\xi(\tau), \\ m_p(\tau) = \frac{1}{kV_m} \int_0^\tau \dot{m}(\tau) d\tau, \end{cases} \quad (9)$$

где $V(\tau)$ — скорость вещества в основании струи (приблизительно равна скорости углубления), $\xi(\tau)$ — параметр, отвечающий за изменение формы струи [37].

Таким образом, поведение «источника частиц», образующегося под действием УВ произвольного профиля, можно полностью описать системой уравнений:

$$\begin{cases} k \frac{dx}{d\tau} = e^{kx} + \beta kx, \\ V(\tau) = kV_m \frac{dx}{d\tau}, \\ m_p(\tau) = \frac{1}{kV_m} \int_0^\tau \frac{\rho_0}{1 + \beta\tau} \times \\ \times V(\tau) \frac{\tau^2 + (\tau + 1) [\ln(1 + \tau)]^2}{2 [\tau + \ln(1 + \tau)]^2} d\tau. \end{cases} \quad (10)$$

Влияние профиля УВ на массу выброшенных частиц было обнаружено в экспериментах с оловом в работах [25, 42]. Было показано, что при выходе стационарной УВ на СП выбрасывается значительно бóльшая масса частиц, чем в случае с нестационарной УВ. Значительного влияния амплитуды УВ на массу выброшенных частиц не обнаружено [25]. Экспериментальные и расчетные результаты, представленные в статье, также не противоречат этим выводам.

По-видимому, профиль УВ окажет влияние на распределение характерных размеров частиц по глубине облака. Закон распределения частиц по размеру будет иметь более сложный вид, чем соотношение (2). Этот вопрос требует отдельных расчетно-теоретических исследований. В экспериментах, представленных в статье, размеры частиц определялись в основном на фронте потока — в самой низкоплотной части облака. Поэтому для приблизительных оценок использовали закон распределения частиц по размеру (2).

Уравнения (10) для оценки массы частиц получены для случая, когда прочность не оказывает существенного влияния на выброс материала с поверхности металла. Следует отметить, что соотношения

(1)–(10) являются приближенными и используются для понимания основных закономерностей, наблюдаемых в эксперименте, а также для предварительных оценок результатов опытов. Для более корректного их использования требуется весьма точная информация о реологическом поведении материала после ударно-волнового воздействия. В частности, необходимы данные о величинах μ , γ , ε_p при динамическом воздействии. Уравнение (1) содержит свободные параметры α_1 , α_2 , подбор которых требует большого количества надежных экспериментальных данных (в статье полагаем $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$).

Для примера приведем подробно результаты расчета, выполненные для опыта № 1. Согласно результатам численного моделирования, в опыте № 1 на СП свинца выходит волна интенсивностью, равной 7 ГПа, с уменьшением давления за фронтом УВ $dp/dx = 22.4$ ГПа/см и скоростью деформации $\dot{\varepsilon} = 1 \cdot 10^5$ 1/с. Скорость свободной поверхности после выхода УВ на СП составляет 0.51 км/с. Металл после УВ-воздействия находится в пластическом состоянии [43]. Для оценки прочности свинца использовали модель РИНГ [44], согласно которой величина предела текучести составила $Y = 30$ МПа.

В опыте № 1 средняя амплитуда возмущений $a_0 \approx 80$ мкм и длина волны $\lambda \approx 520$ мкм. По соотношению (3) средняя скорость фронта частиц составляет $U_n \approx 0.91$ км/с, с учетом прочности материала по формуле (4) $U_n = 0.90$ км/с. Масса частиц, выброшенных с поверхности, рассчитанная по уравнению (10), составила 100 мг/см².

На рис. 7 приведена x - t -диаграмма движения СП, полученная из численных расчетов. Там же приведена x - t -диаграмма движения фронта потока частиц, а также экспериментальные точки.

Таким образом, при выходе УВ амплитудой 7 ГПа с учетом прочности свинца $Y = 0.03$ ГПа [44], $\varepsilon_p = 0.7$ [45], поверхностной энергии $\gamma = 0.4$ Н/м [45] характерный размер частиц по соотношению (1) составит величину $\bar{d}_m = 22$ мкм. Без учета прочностных характеристик материала ($Y = 0$, $\varepsilon_p = 0$) характерный размер частиц составит величину $\bar{d}_m = 3$ мкм. На рис. 8 приведено сравнение с экспериментальными данными расчетного распределения частиц «пыли», выброшенной с СП свинца, по размерам относительно \bar{d}_m .

Несмотря на слабое влияние прочностных характеристик материала на скорость фронта потока частиц (табл. 5), размеры образующихся частиц сильно зависят от реологических свойств вещества (табл. 5, рис. 8). При этом результат расчета с учетом прочности отклоняется от экспериментального

Таблица 5. Результаты расчетов по соотношениям (1)–(10)

Характеристика	U_n^c , км/с (гидр.)	U_n^c , км/с (с прочн.)	d_{min}^c , мкм (гидр.)	d_{min}^c , мкм (с прочн.)	Y , ГПа	m_p , мг/см ²
Опыт 1	0.91	0.90	3.30	22.5	0.030	100.0
Опыт 2	1.80	1.79	0.32	0.85	0.047	11.1
Опыт 3	1.80	1.79	0.32	0.85	0.047	11.1
Опыт 4	1.47–1.80	1.46–1.79	2.20–1.50	8.5–15.5	0.047	45.0–56.7
Опыт 5	2.35	2.34	0.27	0.58	0.037	10.7
Опыт 6	2.35	2.34	0.27	0.58	0.037	10.7
Опыт 7	1.93–2.35	1.92–2.35	1.85–1.25	5.7–10.3	0.037	41.8–53.1

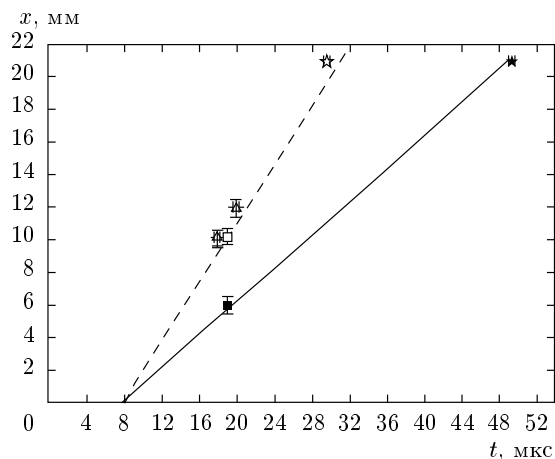


Рис. 7. $x-t$ -диаграммы движения свободной поверхности и фронта потока частиц (параметры шероховатости $R_z = 160$ мкм, $\lambda \approx 520$ мкм) после воздействия ударной волны амплитудой $P_{sw} \approx 7$ ГПа. Положение СП: ■ — рентгенография, ★ — пьезодатчик, сплошная линия — численный расчет; положение фронта частиц: Δ — оптическая методика, \square — рентгенография, светлая звездочка — пьезодатчик, штриховая линия — расчет по формуле (4)

в области мелких фракций, что связано с разрешающей способностью эксперимента (от 5 мкм), а также с неопределенностью в физико-механических свойствах свинца после динамического воздействия. Так, при расчете размеров частиц величины ϵ_p и γ могут отличаться от принятых значений в статических измерениях.

Результаты расчетов для всех опытов по соотношениям (1)–(10) приведены в табл. 5, где U_n^c — средняя скорость фронта потока частиц, d_{min}^c — харак-

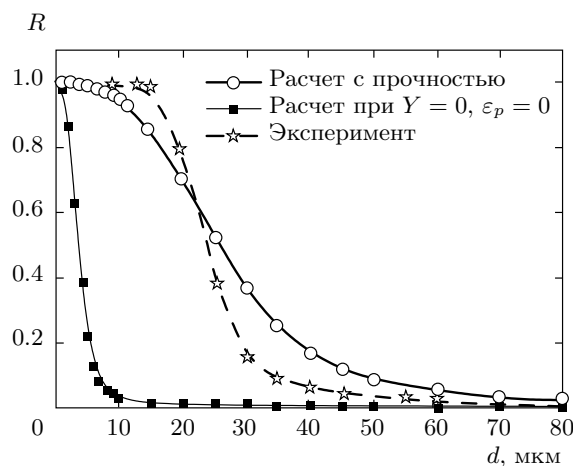


Рис. 8. Сравнение расчетного спектра частиц с экспериментальными данными ($P_{sw} \approx 7$ ГПа)

терный размер частиц, реализующийся на фронте потока частиц, m_p — общая выброшенная масса частиц с поверхности свинца. Расчеты с учетом Y , ϵ_p обозначены «с прочн.», в приближении жидкости с поверхностным натяжением — «гидр.».

Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными представлено в табл. 6. Расчетные и экспериментальные значения в табл. 5, 6 обозначены индексами соответственно «с» и «е».

Из сравнения результатов расчетов и экспериментов видно, что расчеты удовлетворительно описывают экспериментальную $x-t$ -диаграмму движения СП свинца. Результаты расчетов скоростей фронта потока частиц согласуются с экспериментальными данными. Расчетные значения характерных размеров частиц не противоречат результатам

Таблица 6. Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными

Характеристика	d_{max}^e , мкм	d_{min}^e , мкм (гидр.)	d_{min}^e , мкм (с прочн.)	U_{fs}^e , км/с	U_{fs}^c , км/с	U_n^e , км/с	U_n^c , км/с	m_e , мг/см ²	m_c , мг/см ²
Опыт 1	≤ 100	3.30	22.5	0.5 ± 0.1	0.51	1.0 ± 0.1	0.90	35 ± 10.5	100.0
Опыт 2	≤ 5	0.32	0.85	0.9 ± 0.1	1.05	1.5 ± 0.1	1.79	0.2 ± 0.06	11.1
Опыт 3	≤ 5	0.32	0.85	0.9 ± 0.1	1.05	1.3 ± 0.1	1.79	0.4 ± 0.1	11.1
Опыт 4	≤ 15	2.20–1.50	8.5–15.5	0.9 ± 0.1	1.05	1.8 ± 0.1	1.46–1.79	30 ± 9	45.0–56.7
Опыт 5	≤ 5	0.27	0.58	1.2 ± 0.1	1.37	1.9 ± 0.1	2.34	0.3 ± 0.1	10.7
Опыт 6	≤ 5	0.27	0.58	1.2 ± 0.1	1.37	1.4 ± 0.1	2.34	0.7–3.3	10.7
Опыт 7	≤ 15	1.85–1.25	5.7–10.3	1.3 ± 0.1	1.37	2.1 ± 0.1	1.92–2.35	30 ± 9	41.8–53.1

экспериментов. Для экспериментов 2, 3, 5, 6 расчетные оценки указывают на то, что размер частиц меньше 1 мкм, что ниже используемых диагностических возможностей оптической методики — 5 мкм.

Что касается массы выброшенных частиц, результаты расчетов лишь качественно описывают экспериментальные данные. Увеличение давления не приводит к увеличению массы выброшенных частиц. Уменьшение параметров шероховатости (или уменьшение начальной амплитуды и длины волны возмущений) приводит к существенному уменьшению массы выброшенных частиц. Следует заметить, что расчетные значения массы частиц не учитывают влияния прочности материала. По-видимому, учет прочности приведет к меньшему значению выброшенной массы частиц с поверхности материала.

Таким образом, полученные результаты могут быть использованы в качестве рекомендации о допустимой шероховатости, например, лайнеров, используемых в различных нагружающих устройствах для исследования сжимаемости веществ, а также о возможности применения различных методик в экспериментах по исследованию тонкой структуры УВ в них. Кроме того, полученные результаты можно использовать для тестирования феноменологических моделей процесса выброса частиц с СП при выходе на нее УВ.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. D. Richtmyer, *Comm. Pure Appl. Math.* **13**, 297 (1960).
2. Е. Е. Meshkov, *Fluid Dyn.* **4**(5), 101 (1969).
3. Е. Е. Мешков, *Исследования гидродинамических неустойчивостей в лабораторных экспериментах*, РФЯЦ-ВНИИЭФ, Саров (2006).
4. M. Stanic, R. F. Stellingwerf, J. T. Cassibry, and S. I. Abarzhi, *Phys. Plasmas* **19**, 082706 (2012).
5. J. R. Asay and L. M. Barker, *J. Appl. Phys.* **45**, 2540 (1974).
6. В. А. Огородников, А. Г. Иванов, А. Л. Михайлов и др., *Физика горения и взрыва* **34**(6), 103 (1998).
7. J. M. Walsh, R. G. Shreffler, and F. J. Willing, *J. Appl. Phys.* **24**, 349 (1953).
8. C. S. Speight, L. Harper, and V. S. Smeeton, *Rev. Sci. Instr.* **60**, 3802 (1989).
9. M. Dunning and B. Jacoby, *Тезисы докладов междунар. конф. IV Забабакхинские научные чтения*, РФЯЦ-ВНИИТФ, Снежинск (1995), с. 16. [*Abstracts of the Fourth Zababakhin Scientific Talks*, All-Russian Res. Inst. Techn. Phys., Snezhinsk, Russia (1995), p. 16.]
10. П. Н. Низовцев, В. А. Раевский, В. П. Соловьев, *ВАНТ, сер. теор. и прикл. физика*, № 2, 81 (1998).
11. В. А. Огородников, А. Г. Иванов, Н. И. Крюков, *Физика горения и взрыва* **35**(5), 122 (1999).
12. А. И. Лебедев, В. В. Игонин, П. Н. Низовцев, В. А. Раевский, *Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ*, вып. 1, 590 (2001).
13. D. S. Sorenson, R. W. Minich, J. L. Romero et al., *J. Appl. Phys.* **92**, 5830 (2002).

14. Н. Д. Семкин, К. Е. Воронов, Л. С. Новиков, Н. Г. Богоявленский, Приборы и техника эксперимента № 2, 123 (2005).
15. W. S. Vogan, W. W. Anderson, M. Grover et al., J. Appl. Phys. **98**, 113508 (2005).
16. T. Resseguier, L. Signor, A. Dragon et al., J. Appl. Phys. **101**, 013506 (2007).
17. C. Timothy, A. Germann, G. Dimonte et al., in *7th Int. Conf. on New Models and Hydrocodes for Shock Wave Processes in Condensed Matter*, Estoril, Portugal (2008), p. 48.
18. В. А. Огородников, А. Л. Михайлов, В. В. Бурцев и др., ЖЭТФ **136**, 6 (2009).
19. С. Ф. Гаранин, *Физические процессы в системах МАГО-МТФ*, РФЯЦ-ВНИИЭФ (2012).
20. А. С. Козырев, *Газодинамический термоядерный синтез*, РФЯЦ-ВНИИЭФ, Саров (2005).
21. А. Л. Михайлов, В. А. Огородников, Н. П. Хохлов и др., Хим. физика **20**(8), 73 (2001).
22. Guy Dimonte, G. Terrones, F. J. Cherne et al., Phys. Rev. Lett. **107**, 264502 (2011).
23. Yongtao Chen, Haibo Hu, Tiegang Tang et al., J. Appl. Phys. **111**, 053509 (2012).
24. Н. В. Невмержицкий, А. Л. Михайлов, В. А. Раевский и др., ВАНТ, сер. теор. и прикл. физика № 3, 3 (2010).
25. M. V. Zellner, M. Grover, J. E. Hammerberg et al., J. Appl. Phys. **102**, 013522 (2007).
26. Б. Л. Глушак, В. Ф. Куропатенко, С. А. Новиков, *Исследование прочности при динамических нагрузках*, Наука, Новосибирск (1992).
27. M. Furlanetto, N. King, S. Sterbenz et al., Stockpile Stewardship Quarterly **1**(2), 4 (2011).
28. В. А. Огородников, А. Л. Михайлов, В. В. Пешков и др., ЖЭТФ **141**, 182 (2012).
29. Т. А. Торопова, Ю. В. Янилкин, ВАНТ, сер. матем. моделир. физ. процессов, вып. 4, 58 (1994).
30. Б. Л. Глушак, *Начала физики взрыва*, РФЯЦ-ВНИИЭФ, Саров (2011).
31. В. Н. Зубарев, ПМТФ № 2, 54 (1965).
32. Guy Dimonte, Guillermo Terrones, F. J. Cherne, and P. Ramaprabhu, J. Appl. Phys. **113**, 024905 (2013).
33. O. Durand and L. Souldard, J. Appl. Phys. **111**, 044901 (2012).
34. T. C. Germann, J. E. Hammerberg, and B. L. Holian, *Proc. of Shock Compression of Condensed Matter-2011*, AIP Conf. Proc. **706**, 285 (2004).
35. O. Durand and L. Souldard, J. Appl. Phys. **114**, 194902 (2013).
36. А. Б. Георгиевская, В. А. Раевский, *Сб. трудов межд. конф. «XIII Харитоновские тематические научные чтения*, Саров, РФЯЦ-ВНИИЭФ (2011), с. 597.
37. A. B. Georgievskaya and V. A. Raevsky, *Proc. of Shock Compression of Condensed Matter-2011*, AIP Conf. Proc. **1426**, 1007 (2012).
38. D. E. Grady and M. E. Kipp, J. Mech. Phys. Sol. **33**(4), 399 (1985).
39. *Разрушение разномасштабных объектов при взрыве*, под ред. А. Г. Иванова, РФЯЦ-ВНИИЭФ, Саров (2001).
40. Ф. М. Султанов, А. Л. Ярин, ПТМФ № 5, 48 (1999).
41. В. К. Кедринский, *Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели*, Изд-во СО РАН, Новосибирск (2000).
42. M. V. Zellner, G. Dimonte, T. C. Germann et al., *Proc. of Shock Compression of Condensed Matter-2009*, AIP Conf. Proc. **1195**, 1047 (2009).
43. В. П. Копышев, А. Б. Медведев, *Термодинамическая модель сжимаемого коволюма*, РФЯЦ-ВНИИЭФ, Саров (1995).
44. Б. Л. Глушак, О. Н. Игнатова, С. С. Надежин, В. А. Раевский, ВАНТ, сер. матем. моделир. физ. процессов, вып. 2, 25 (2012).
45. *Физические величины. Справочник*, А. П. Бабичев, Н. А. Бабушкина, А. М. Братковский и др., под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова, Энергоатомиздат, Москва (1991).