ЖЭТФ, 2014, том 146, вып. 6 (12), стр. 1252–1257

ИМПУЛЬС СОЛИТОНОВ И ВИХРЕВЫХ КОЛЕЦ В СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ

*Л. П. Питаевский**

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
119334, Москва, Россия

Dipartimento di Fisica, Universitá di Trento and INO-CNR BEC Center
I-38123, Trento, Povo, Italy

Поступила в редакцию 28 мая 2014 г.

Работа посвящена вычислению импульса локализованных возбуждений, таких как солитоны и вихревые кольца, стационарно движущихся в сверхтекучем газе или жидкости. Прямое вычисление импульса интегрированием потока массы приводит к плохо сходящемуся интегралу. Предложен способ ренормализации этого интеграла с явным выделением вклада вихревой нити, который оказывается главным в случае вихревых колец большого, по сравнению с корреляционной длиной, размера. Проведено сравнение с ренормализацией Джонса и Робертса. Рассмотрены случаи неограниченной среды и газа в цилиндрической ловушке. Обсуждается вычисление скачка фазы параметра порядка для вихревого кольца в такой ловушке и получена простая оценка этого скачка для вихря большого радиуса.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 75-летию А. Ф. Андреева

DOI: 10.7868/S0044451014120104

1. ВВЕДЕНИЕ

Характерной особенностью сверхтекучей жидкости является возможность существования в ней локализованных стационарных возбуждений различного рода: солитонов, вихревых колец, солитонных вихрей и других, более сложных, объектов. Изучение вихревых колец привело к значительному прогрессу в понимании свойств сверхтекучего гелия. Очень интересные возможности возникают в связи с созданием новых сверхтекучих систем — ультрахолодных бозе- и ферми-газов, удерживаемых в ловушках. Неоднородность плотности таких систем и наличие внешнего поля делают динамику возбуждений важной экспериментальной и теоретической проблемой. В то же время разреженность газов позволяет развить достаточно детальную микроскопическую теорию. При этом, если поле ловушки меняется в пространстве достаточно медленно, оказывается целесообразным решать задачу в два этапа. Сначала найти решение для однородного газа (в случае удлиненной ловушки — однородного в одном направлении), а потом определить движение, используя классические уравнения движения. Для этого необходимо определить энергию возбуждения как функцию от его импульса или скорости. Тот или иной подход может быть удобен в зависимости от характера задачи. При этом, однако, возникает трудность, давно известная в классической гидродинамике (см., например, [1, § 11]; [2, гл. 6]).

Если вычислять импульс, интегрируя поток массы $\mathbf{j}$ по объему жидкости, т. е. по формуле

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{j}\, d^3x, \tag{1}$$

то при стационарном движении подынтегральное выражение убывает недостаточно быстро и интеграл зависит от формы области интегрирования. Были предложены различные способы преодоления этой трудности.

Если известна зависимость энергии ε от скорости V, то импульс может быть вычислен интегрированием соотношения

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} = V. \tag{2}$$

Такой способ применен в [1]. Однако при таком подходе остается неопределенной постоянная интегри-

*E-mail: lev@science.unith.it

рования, которая существенна для вычисления критической скорости Ландау. В книге [2] автор предположил, что тело, первоначально находившееся в покое, приведено в движение внешней силой и вычислил импульс, который был передан телу и окружающей жидкости. Он применил тот же метод к вихревому кольцу (см. [2, гл. 7]).

Робертс и Грант [3] и Джонс и Робертс [4] применили аналогичный подход для вычисления импульса вихревого кольца в конденсате Бозе – Эйнштейна, описываемого уравнением Гросса – Питаевского (ГП). В работе [3] на основе уравнения ГП рассматривалось кольцо большого (по сравнению с корреляционной длиной ξ) радиуса, в работе [4] — произвольного радиуса. При этом в [4] было получено общее перенормированное выражение для импульса в виде абсолютно сходящегося интеграла. Оно будет обсуждаться ниже.

Возможность получения такого выражения связана с тем фактом, что возмущения распространяются в жидкости с конечной скоростью, не превышающей скорости звука. Поэтому, поскольку возбуждение было рождено в некоторый начальный момент времени, на достаточно больших расстояниях скорость равна нулю. Трудность состоит в том, что на таких расстояниях задача не является стационарной.

Здесь я предлагаю другое, отличное от полученного в работе [4], перенормированное выражение для импульса. Оно удобно для вычисления импульса возбуждений, содержащих вихри большого размера, поскольку в этом выражении явно выделен член, дающий главный вклад. Я буду предполагать, что сверхтекучий газ описывается параметром порядка Ψ, фаза которого ϕ определяет сверхтекучую скорость согласно уравнению

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{M}\nabla\phi,$$

где $M = m$ для газа, состоящего из бозонов и $M = 2m$ для фермионной сверхтекучести, m — масса атома. Буду также предполагать для упрощения рассуждений, что плотность потока массы равна

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}, \tag{3}$$

где ρ — плотность массы газа. Это соотношение имеет место для уравнения ГП и различных его обобщений. (В общем случае поток может зависеть и от производных $\mathbf{v}$.) Такое предположение, однако, не обязательно. Важно лишь, что соотношение (3) всегда выполняется на больших расстояниях от возбуждения, где справедлива гидродинамика.

Плотность можно представить как $\rho = \rho_\infty + \delta\rho$, где ρ_∞ — невозмущенная плотность на больших расстояниях от возбуждения. Тогда импульс

$$\mathbf{p} = \frac{\hbar}{M}\int \rho_\infty \nabla\phi\, d^3x + \frac{\hbar}{M}\int \delta\rho\nabla\phi\, d^3x. \tag{4}$$

Второй интеграл сходится абсолютно, поскольку возмущение плотности $\delta\rho$ квадратично по скорости и быстро убывает, а первый можно вычислить в общем виде с учетом того, что возмущение равно нулю на бесконечности. Такой способ вычисления импульса волнового пакета звука был применен в [1, § 65]. Ниже я рассмотрю несколько примеров применения этого уравнения, в частности, чтобы продемонстрировать его эффективность.

2. ПОУЧИТЕЛЬНЫЙ ПРИМЕР. ПРИСОЕДИНЕННЫЙ ИМПУЛЬС ШАРА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В ЖИДКОСТИ

В качестве первого примера рассмотрим классическую задачу о вычислении импульса при движении шара радиуса R со скоростью $\mathbf{V}$ в несжимаемой жидкости. Предложенным методом эта задача решается очень просто. Второй член в выражении (4) можно считать равным нулю в силу несжимаемости жидкости, а первый можно преобразовать в интеграл по бесконечно удаленной поверхности, который равен нулю, и в интеграл по поверхности шара. В результате для импульса увлекаемой жидкости получаем

$$\mathbf{p}_{fl} = -\rho\frac{\hbar}{M}\oint \mathbf{n}\phi\, d\sigma, \tag{5}$$

где $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности шара, $d\sigma$ — элемент поверхности. Замечу, что обращение в нуль интеграла по удаленной поверхности подразумевает, что жидкость все-таки сжимаема и «бесконечно удаленная» поверхность находится на расстояниях $r > ct$, где c — скорость звука, t — время с момента начала движения. Если, однако, скорость движения много меньше скорости звука, $V \ll c$, то сжимаемость можно не учитывать на расстояниях порядка R. Тогда решение гидродинамической задачи дает для потенциала скорости на поверхности

$$\frac{\hbar}{M}\phi = -\frac{R}{2}\mathbf{n}\cdot\mathbf{V}, \tag{6}$$

а импульс равен

$$\mathbf{p}_{fl} = \frac{2\pi}{3}R^3\rho\mathbf{V} \tag{7}$$

в согласии с формулой (11.6) в [1] (см. также формулу (6.4.29) в [2]).

3. ВИХРЕВОЕ КОЛЬЦО В НЕОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим теперь возбуждение, движущееся с постоянной скоростью в неограниченном однородном сверхтекучем газе или жидкости. Рассмотрим сначала возбуждение, которое не содержит вихревых нитей. Речь может идти об удивительном солитоне Джонса и Робертса, в который вырождается вихревое кольцо при достижении скорости $V = 0.88c$ [4]. (В двумерном случае существует аналитическое солитонное решение уравнения Кадомцева – Петвиашвили, найденное Манаковым и др. [5].) Тогда первый интеграл в (4) можно преобразовать в интеграл по бесконечно удаленной поверхности, равный нулю, так что импульс возбуждения равен

$$\mathbf{p} = \frac{\hbar}{M} \int \delta\rho \nabla\phi \, d^3x. \tag{8}$$

Другая ситуация имеет место, если в структуре возбуждения имеется петля квантового вихря. В этом случае фаза ϕ является неоднозначной функцией координат. Она получает приращение, равное 2π, при обходе вокруг вихревой нити. Теперь, чтобы применить теорему Гаусса, нужно сделать разрез. На двух сторонах разреза фаза ϕ принимает значения, отличающиеся на 2π, что восстанавливает ее однозначность. В качестве разреза можно выбрать любую поверхность, закрывающую апертуру петли. Теперь кроме бесконечно удаленной поверхности, вклад от которой равен нулю, мы должны интегрировать по обеим сторонам разреза. В результате для импульса получаем выражение

$$\mathbf{p} = \rho_\infty \frac{2\pi\hbar}{M} \oint \mathbf{n} \, d\sigma + \frac{\hbar}{M} \int \delta\rho \nabla\phi \, d^3x, \tag{9}$$

где интегрирование в первом члене проводится по поверхности разреза, $\mathbf{n}$ — нормаль к этой поверхности, $d\sigma$ — элемент поверхности разреза.

Формула (9) является главным результатом настоящей работы. В случае кругового вихря, движущегося в направлении оси x, импульс равен

$$p = \rho_\infty \frac{2\pi^2\hbar}{M} R^2 + \frac{\hbar}{M} \int \delta\rho \nabla_x \phi \, d^3x. \tag{10}$$

Важное свойство этого выражения состоит в том, что для большого вихря,

$$R \gg \xi, \tag{11}$$

где $\xi \sim \hbar/mc$ — радиус корреляции в газе, два его члена имеют разный порядок величины. Действительно, простая оценка показывает, что второй член имеет порядок $\rho_\infty \hbar \xi^2/M$, т. е. гораздо меньше первого[1)]. Таким образом, импульс большого вихря дается первым членом (10). Это выражение общеизвестно. Оно использовалось в гидродинамике классической жидкости. Фейнман использовал его при обсуждении критической скорости, связанной с рождением вихревых колец [6]. Однако вывести его микроскопически, например из уравнения ГП, не так-то просто (см. обсуждение в работе [3]). Предлагаемым способом задача легко решается.

Другой метод ренормализации выражения для импульса был использован Джонсом и Робертсом при вычислении импульса вихревого кольца произвольного радиуса на основе уравнения ГП. Метод состоит в вычитании интеграла

$$\frac{\hbar}{2iM} \sqrt{\rho_\infty} \int \left[\nabla\Psi - \nabla\Psi^*\right] d^3x = \\ = -\frac{\hbar}{M} \sqrt{\rho_\infty} \int \nabla \left(\sqrt{\rho} \sin\phi\right) \, d^3x \tag{12}$$

из общего выражения (1) для импульса. (Напоминаю, что в уравнении ГП $\Psi = \sqrt{\rho} e^{i\phi}$.) Этот интеграл равен нулю, поскольку, в отличие от ϕ, параметр порядка Ψ является однозначной функцией координат и интеграл преобразуется к одному лишь интегралу по бесконечно удаленной поверхности, где $\phi = 0$. В результате получается выражение для импульса:

$$\mathbf{p} = \frac{\hbar}{2iM} \times \\ \times \int \left[\left(\Psi^* - \sqrt{\rho_\infty}\,\right) \nabla\Psi - \left(\Psi - \sqrt{\rho_\infty}\,\right) \nabla\Psi^*\right] d^3x. \tag{13}$$

Это выражение использовалось для вычисления импульса солитонов, вихревых колец и солитонных вихрей в цилиндрической ловушке в работе [7]. Интеграл (13) хорошо сходится, но в нем не легко перейти к случаю вихря большого радиуса, поскольку для этого необходимо найти соответствующее асимптотическое выражение для Ψ. Достаточно хорошее приближение дает волновая функция, построенная Берловой [8, формула (25)]. В этом случае вычисление импульса с помощью выражения (13) можно провести аналитически и, в согласии с (10), в пределе $R \to \infty$ получается $\rho_\infty 2\pi^2 \hbar R^2/M$ [9], как и должно быть.

1) Для оценки существенно, что при условии (11) вихревое кольцо движется со скоростью, много меньшей скорости звука, $V \ll c$.

4. СОЛИТОНЫ И ВИХРЕВЫЕ КОЛЬЦА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЛОВУШКЕ

Наиболее естественным способом экспериментального изучения динамики рассматриваемых возбуждений является наблюдение их движения вдоль оси удлиненной ловушки. Как было объяснено выше, первым шагом к построению теории такого движения является вычисление энергии и импульса в цилиндрической ловушке. Моей задачей является вычисление импульса. Буду использовать те же соображения, что и при исследовании неограниченной среды. Ситуация в цилиндрической ловушке, однако, имеет свои особенности. Я буду для простоты рассматривать газ в осесимметричном потенциале. Пусть x будет координатой вдоль оси и r — радиальной координатой. Прежде всего нетрудно показать, что поле скоростей убывает достаточно быстро на больших расстояниях $|x|$ от любого стационарно движущегося возбуждения, так что интеграл (1) абсолютно сходится. Обозначим его p_s. С первого взгляда, мотивация для перенормировки импульса исчезает. Это, однако, не так. Дело в том, что в стационарном решении параметр порядка имеет скачок фазы между $x = -\infty$ и $x = \infty$:

$$\Delta\phi = \phi\,(x=\infty) - \phi\,(x=-\infty)\,. \qquad (14)$$

Для возбуждения, рожденного при $t = 0$, возмущение фазы на больших расстояниях отсутствует. Это означает, что при рождении возбуждения на достаточно больших расстояниях от него возникает противоток, компенсирующий разность фаз. Если область, где существует этот противоток, достаточно длинная, то скорость газа в противотоке, $\bar{v}$, мала, и он не дает вклада в энергию, но дает вклад в импульс[2)].

Обозначим плотность среды на больших расстояниях $|x| \to \infty$ как $\rho_\infty(r)$. Тогда вклад противотока в импульс равен

$$\Delta p = -\int \rho_\infty 2\pi r\, dr \frac{\hbar}{M} \int \nabla_x \phi dx = -\frac{\hbar\rho_{1\infty}\Delta\phi}{M}, \qquad (15)$$

где интеграл по x берется по области противотока и $\rho_{1\infty} = \int \rho_\infty 2\pi r\, dr$ — линейная плотность невозмущенного газа. Замечу, что результат не зависит от распределения скорости в области противотока или от ее длины. Таким образом, импульс равен [10, 11]

$$p = p_s + \Delta p = \frac{\hbar}{M} \times \int \rho\,(x,r)\,\partial_x\phi\, d^3x - \rho_{1\infty}\frac{\hbar}{M}\Delta\phi. \qquad (16)$$

В этом уравнении величины ρ и ϕ должны быть вычислены в предположении, что они зависят от x и t в комбинации $x - Vt$ (стационарное движение). Интеграл по x берется в пределах от $-\infty$ до ∞. Как уже говорилось, в указанном предположении он сходится. Отмечу, что добавление к фазе слагаемого, кратного 2π, не меняет состояния системы. Это означает, что значения импульса, отличающиеся на величину, кратную $2\pi\hbar\rho_{1\infty}/M$, физически эквивалентны. Это общее свойство квантового газа при равной нулю температуре в одномерной геометрии. Такой газ можно рассматривать как периодическую структуру с периодом $M/\rho_{1\infty}$, размытую квантовыми флуктуациями [12]. Поэтому импульс обладает свойствами квазиимпульса.

Другое выражение для импульса можно получить, если воспользоваться общим выражением (4). Вычисляя поверхностный интеграл как в разд. 3, для кругового вихревого кольца находим

$$p = \frac{2\pi\hbar}{M}\int_0^R \rho_\infty(r) 2\pi r\, dr + \frac{\hbar}{M}\int \delta\rho \nabla_x\phi\, d^3x. \qquad (17)$$

Достоинство этого выражения, как и выражения (10), состоит в том, что в случае вихря большого размера, $R \gg \xi$, первый член этого выражения гораздо больше второго, которым можно пренебречь. (Разумеется, эта ситуация возможна только в случае, если поперечный размер облака газа удовлетворяет условию приближения Томаса–Ферми $R_\perp \gg \xi$.) Такое выражение для импульса большого вихря было получено и использовано мною ранее [13].

5. ОЦЕНКА СКАЧКА ФАЗЫ

Рассмотренный в предыдущем разделе скачок фазы $\Delta\phi$ является интересной физической величиной. Его можно измерить, наблюдая интерференционную картину при свободном расширении газа после выключения ловушки. Разумеется, если возможно теоретически вычислить параметр порядка в окрестности возбуждения, то будет известен и скачок фазы. Представляет, однако, интерес оценить скачок фазы для большого, в указанном выше смысле, вихревого кольца в цилиндрической ловушке. Прежде всего, приравняем эквивалентные выражения (16) и (17):

[2)] Можно показать [7], что $\phi(\pm\infty)$ не зависит от r. Соответственно, не зависит от r и скорость $\bar{v}$.

$$\Delta\phi = -\frac{2\pi}{\rho_1}\int\limits_0^R \rho_\infty(r) 2\pi r\, dr - \\ - \frac{1}{\rho_1}\int \delta\rho \nabla_x \phi\, d^3x + \frac{M}{\hbar} p_s. \quad (18)$$

Выражение для p_s в этом уравнении можно преобразовать, используя галилеевскую инвариантность. Действительно, рассмотрим проинтегрированный по сечению ловушки поток массы $\bar{j}$ в системе координат, движущейся со скоростью кольца. В этой системе плотность газа не зависит от времени. Из уравнения непрерывности

$$\partial_t \rho_1 + \partial_x \bar{j} = 0$$

следует, что поток $\bar{j}$ не зависит от координат и равен своему значению на больших расстояниях, где одномерная плотность равна невозмущенному значению $\rho_{1\infty}$, а скорость газа $-V$. Таким образом, $\bar{j} = -\rho_{1\infty} V$. Теперь преобразование Галилея для потока в лабораторной системе координат дает

$$j(x) = \bar{j} + \rho_1(x)\, V = \delta\rho_1 V.$$

Интегрируя по x, получаем

$$p_s = V \int \delta\rho_1 dx.$$

Замечу, что $N_s = \int \delta\rho_1 dx$ имеет смысл массы возбуждения. Подставляя в (18), для $\Delta\phi$ находим

$$\Delta\phi = -\frac{2\pi}{\rho_1}\int\limits_0^R \rho_\infty(r) 2\pi r\, dr + \\ + \frac{1}{\rho_1}\int \delta\rho \left(\frac{M}{\hbar} V - \nabla_x \phi\right) d^3x. \quad (19)$$

Теперь очевидно, что для большого кольца второй член в этом уравнении относительно мал, и им можно пренебречь. Тогда скачок фазы дается простой формулой

$$\Delta\phi \approx -2\pi \frac{\rho_{1R}}{\rho_1}, \quad (20)$$

где

$$\rho_{1R} = \int\limits_0^R \rho_\infty(r) 2\pi r\, dr$$

— линейная плотность атомов, находящихся внутри цилиндра радиуса R. Было бы интересно проверить уравнение (20) в численных вычислениях, аналогичных проведенным в работе [7], но в ситуации, когда радиус вихревого кольца много больше корреляционного радиуса ξ. Замечу, что полученные уравнения можно легко обобщить и на несимметричную относительно оси ловушки ситуацию, когда в ловушке имеется вихревая нить, оканчивающаяся на границе газа. (Я имею в виду предел Томаса–Ферми, когда границу можно считать резкой.) В этом случае разрез следует провести от нити до этой границы. Такая ситуация имеет место в солитонном вихре, см. [7, 14, 15].

Подводя итог, можно сказать, что в работе предложен удобный метод вычисления импульса локализованных возбуждений в сверхтекучем газе, сводящий задачу к вычислению абсолютно сходящегося интеграла. Метод особенно эффективен при наличии вихревых нитей большой длины.

Я благодарю П. Робертса за полезные комментарии к работе [4], Н. Берлову за обсуждение и вычисление импульса по волновой функции [8], С. Коминеаса за присылку данных вычислений работы [7] и Д. Популя, Т. Евсаха и И. Фомина за обсуждение.

Работа поддержана Европейским Исследовательским Советом (ERC) (грант QGBE), Автономной Провинцией Тренто и MIUR, Италия (грант PRIN-2009).

Я рад, что эта работа будет напечатана в номере ЖЭТФ, посвященном 75-летию А. Ф. Андреева. Я имел возможность познакомиться с работами этого выдающегося физика с самого начала его научной деятельности. Мне помнится, что А. Ф. удавалось решить едва-ли не любую задачу, за которую он брался. Его работы всегда основаны на глубоком понимании физического смысла явления и необычайной ясности мысли. Они очень элегантны и много раз стимулировали новые эксперименты. Я всегда читаю его статьи с удовольствием и с большой пользой для себя. Мы все благодарны А. Ф. за то, что он жертвует часть своего, очень дорогого, времени на научно-организационную деятельность, делая все, что в его силах, для спасения нашей науки. Я поздравляю моего друга и желаю ему постоянного желания работать и здоровья — ему и его замечательной семье. Убежден, что остальное приложится.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Физматлит, Москва (2009).

2. Дж. Бэтчелор, *Введение в динамику жидкости*, Мир, Москва (1973) [G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1970)].

3. P. H. Roberts and J. Grant, J. Phys. A **4**, 55 (1971).

4. C. A. Jones and P. H. Roberts, J. Phys. A **15**, 2599 (1982).

5. C. V. Manakov, V. E. Zakharov, L. A. Bordag et al., Phys. Lett. **63**A, 205 (1977).

6. R. P. Feynman, in *Progress in Low Temperature Physics*, Vol. 1, ed. by C. J. Gorter, North-Holland, Amsterdam (1955), p. 17.

7. S. Komineas and N. Papanicolaou, Phys. Rev. A **68**, 043617 (2003).

8. N. G. Berloff, J. Phys. A **37**, 1617 (2004).

9. Н. Г. Берлова, частное сообщение.

10. R. G. Scott, F. Dalfovo, L. P. Pitaevskii et al., Phys. Rev. Lett. **106**, 185301 (2011).

11. Yu. Kivshar and X. Yang, Phys. Rev. E **49**, 1657 (1994).

12. F. D. V. Haldane, Phys. Rev. Lett. **47**, 1840 (1981).

13. L. P. Pitaevskii, arXiv:1311.4693.

14. J. Brand and W. P. Reinhardt, Phys. Rev. A **65**, 043612 (2002).

15. M. J. H. Ku, Wenjie Ji, B. Mukherjee et al., arXiv: 1402.7052.