ЖЭТФ, 2014, том 146, вып. 1 (7), стр. 194–204

ФОРМИРОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ ПРИ РАЗВИТИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ КЕЛЬВИНА – ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Н. М. Зубарев [a,b], ***Е. А. Кузнецов*** [b,c,d*]

[a] *Институт электрофизики Уральского отделения Российской академии наук 620016, Екатеринбург, Россия*

[b] *Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук 119991, Москва, Россия*

[c] *Новосибирский государственный университет 630090, Новосибирск, Россия*

[d] *Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук 142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 14 января 2014 г.

В рамках гамильтоновского формализма исследована динамика формирования особенностей на поверхности раздела идеальных жидкостей в результате развития неустойчивости Кельвина – Гельмгольца. Показано, что уравнения движения, получаемые в малоугловом приближении без учета капиллярных и гравитационных сил, допускают точные решения в неявном виде. Анализ этих решений показывает, что в ситуации общего положения на границе за конечное время формируются слабые корневые особенности, для которых кривизна обращается в бесконечность, а характерные углы наклона остаются малыми. Для чисел Атвуда, близких по абсолютному значению к единице, кривизна поверхности вблизи особенности имеет определенный знак с деформацией границы в сторону легкой жидкости. Для жидкостей со сравнимыми плотностями кривизна меняет знак в особой точке. В частном случае жидкостей с одинаковой плотностью полученные результаты согласуются с результатами Мура, полученными на основе анализа уравнения Биркгофа – Ротта.

DOI: 10.7868/S0044451014070207

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, граница двух жидкостей при наличии тангенциального разрыва скоростей неустойчива. Эта неустойчивость, называемая неустойчивостью Кельвина – Гельмгольца, является одной из главных в гидродинамике. В отсутствие капиллярных и гравитационных сил инкремент этой неустойчивости растет линейно с увеличением волнового числа k. В присутствии капиллярных и гравитационных сил, которые стремятся вернуть поверхность в плоское состояние, ее инкремент сильно перестраивается [1–3], что, в частности, приводит к появлению порога. При возбуждении волн ветром пороговое значение скорости при неустойчивости Кельвина – Гельмгольца определяется из условия минимальности фазовой скорости гравитационно-капиллярных волн (в отсутствие ветра). Пороговое значение скорости ветра порядка 6 м/с. При этой скорости ветра наблюдается массовое образование барашков за счет обрушения волн. Объяснение этого эффекта связано с явлением волнового коллапса. При малых превышениях над порогом неустойчивости происходит возбуждение узкого в k-пространстве волнового пакета. Огибающая этого пакета, как показано в работе [4], подчиняется релятивистскому уравнению Клейна – Гордона с отрицательным квадратом массы и «неправильной» нелинейностью, которая не стабилизирует неустойчивость, а приводит к взрывному процессу нарастания амплитуды — волновому коллапсу.

*E-mail: kuznetso@itp.ac.ru

Весьма нетривиальным также оказывается нелинейное поведение границы раздела при развитии этой неустойчивости в пренебрежении поверхностными силами и силой тяжести, т. е. когда движение жидкостей определяется только гидродинамическим давлением. Первые важные результаты в этом направлении были представлены в 1979 г. в работе Мура [5]. В этой работе, в случае одной жидкости установлено, что нелинейная стадия неустойчивости Кельвина – Гельмгольца сопровождается появлением особенностей на поверхности тангенциального разрыва, или, как говорят, при наличии вихревой пелены (тангенциальный разрыв скоростей соответствует плоскому бесконечно тонкому слою с постоянной завихренностью). В этом случае движение вихревой пелены может быть описано в рамках интегрального уравнения Биркгофа – Ротта (см., например, [6]). Анализ этого уравнения [5] показал, что возникновение особенностей на поверхности разрыва происходит за конечное время. На поверхности разрыва образуются слабые особенности, для которых поверхность остается гладкой, а сингулярной оказывается ее кривизна. Впоследствии многочисленные численные расчеты [7–9] подтвердили этот аналитический результат Мура. Было выяснено, что эти сингулярности становятся зародышем центров вихревых спиралей (см., например, работы [10, 11]).

В случае интерфейса — границы раздела двух различных жидкостей (т. е. при произвольных числах Атвуда), в работах [12, 13] было показано, что движение границы также может быть описано с помощью уравнения Биркгофа – Ротта, к которому добавляется уравнение, задающее эволюцию завихренности. Подобный подход с различными вариациями использовался для численного моделирования неустойчивостей Рэлея – Тейлора и Рихтмайера – Мешкова (см. работы [14, 15] и ссылки там). Что касается аналитических исследований, отметим работу [16], в которой была предпринята попытка обобщить результаты Мура на случай жидкостей с различными плотностями. При этом рассматривалась ситуация, когда тангенциальный разрыв скоростей возникал в результате развития неустойчивости Рэлея – Тейлора, т. е. когда неустойчивость Кельвина – Гельмгольца была вторичной. В этом случае также была продемонстрирована тенденция к формированию особенностей типа Мура, однако при анализе уравнений движения был сделан ряд приближений, требующих дополнительного анализа. Наиболее существенным стало так называемое локальное приближение (localized approximation), которое позволило авторам работ [16, 17]) найти точное решение упрощенных уравнений движения. Идея этих упрощений заключалась в том, что в уравнениях, записанных в терминах аналитических продолжений в верхнюю и нижнюю полуплоскости соответствующей комплексной переменной, пренебрегалось нелинейными перекрестными членами. Такого рода процедура позволила привести уравнения к локальному виду, не содержащему нелокальных интегродифференциальных операторов. Однако отброшенное нелинейное взаимодействие, вообще говоря, не мало по сравнению с локальным. В данной работе мы изучим этот вопрос более детально и покажем, что при надлежащем выборе переменных перекрестные члены исчезают естественным образом.

В отличие от работ [16, 17], в основе нашего описания лежит гамильтоновский формализм, который был успешно применен для похожих задач о возникновении особенностей на свободной границе [18] и на интерфейсе двух идеальных жидкостей [19]. Как будет продемонстрировано, особенности, возникающие при неустойчивости Кельвина – Гельмгольца, имеют корневое поведение: профиль поверхности и его первая производная оказываются непрерывными функциями, а вторая производная становится бесконечной при приближении к моменту коллапса. Такие особенности в работах [18, 19] были названы слабыми. Их формирование может быть описано аналитически с помощью малоуглового приближения и соответствующего аналитического продолжения. В настоящей работе показано, что для чисел Атвуда, близких по абсолютному значению к единице, кривизна поверхности вблизи особенности имеет определенный знак (возникает тенденция к деформации границы в сторону легкой жидкости). Для жидкостей со сравнимыми плотностями кривизна меняет знак в особой точке. В частном случае жидкостей с одинаковой плотностью полученные результаты согласуются с результатами Мура, полученными на основе анализа уравнения Биркгофа – Ротта.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим две идеальные, несжимаемые жидкости. Их течения будем считать потенциальными. Ограничимся рассмотрением двумерных течений, когда все величины зависят от двух пространственных переменных, x и y. При этом ось y направим перпендикулярно невозмущенной (плоской) поверхности раздела жидкостей. Пусть поверхность раздела задается функцией $y = \eta(x,t)$ (в невозмущенном состоянии $\eta = 0$).

В силу несжимаемости потенциалы скорости $\Phi_{1,2}$ жидкостей удовлетворяют уравнениям Лапласа (здесь и ниже индексы «1» и «2» относятся соответственно к нижней и верхней жидкостям):

$$\nabla^2\Phi_1 = 0, \quad y < \eta(x,t),$$

$$\nabla^2\Phi_2 = 0, \quad y > \eta(x,t).$$

На бесконечном удалении от границы, $y \to \mp\infty$, поля скоростей жидкостей считаем однородными: $\Phi_{1,2} \to V_{1,2}x$, где $V_{1,2}$ — соответствующие постоянные скорости на бесконечности.

Движение жидкостей в дальнейшем удобно рассматривать в системе центра масс, т. е. когда выполнено условие

$$\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 = 0, \tag{1}$$

где ρ_1 и ρ_2 — плотности жидкостей. Для определенности будем считать величину V_1 положительной. Тогда, согласно (1), $V_2 = -(\rho_1/\rho_2)V_1 < 0$.

Движение границы раздела определяется исходя из динамического и кинематического граничных условий:

$$\rho_1\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} + \frac{(\nabla\Phi_1)^2}{2}\right) - \rho_1\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial t} + \frac{(\nabla\Phi_2)^2}{2}\right) = \\ = \frac{\rho_1 V_1^2 - \rho_2 V_2^2}{2}, \quad y = \eta(x,t), \tag{2}$$

$$\eta_t = \partial_n\Phi_1\sqrt{1+\eta_x^2} = \partial_n\Phi_2\sqrt{1+\eta_x^2}, \quad y = \eta(x,t), \tag{3}$$

где ∂_n обозначает производную в направлении нормали к поверхности раздела:

$$\partial_n = \frac{\partial_y - \eta_x\partial_x}{\sqrt{1+\eta_x^2}}.$$

Уравнение (2) является следствием равенства давлений на поверхности раздела и нестационарных уравнений Бернулли. В него не включены слагаемые, ответственные за капиллярные и гравитационные силы. Уравнение (3) показывает, что нормальные компоненты скоростей обеих жидкостей при $y = \eta(x,t)$ совпадают между собой, представляя при этом скорость самой поверхности.

Удобно ввести вспомогательные потенциалы скорости

$$\tilde{\Phi}_{1,2} = \Phi_{1,2} - V_{1,2}x,$$

которые тождественно равны нулю в невозмущенном состоянии. Пусть функции $\psi_{1,2}$ есть предельные значения соответствующих потенциалов скорости $\tilde{\Phi}_{1,2}|_S$ на границе раздела. Введем также новую переменную $\psi(x,t) \equiv \rho_1\psi_1 - \rho_2\psi_2$. Уравнения движения поверхности допускают, как показано в работах [20], гамильтоновскую формулировку:

$$\psi_t = -\frac{\delta H}{\delta\eta}, \quad \eta_t = \frac{\delta H}{\delta\psi},$$

где гамильтониан совпадает с полной энергией системы:

$$H = \rho_1\iint\limits_{y\le\eta}\frac{(\nabla\Phi_1)^2 - V_1^2}{2}\,dx\,dy + \\ + \rho_2\iint\limits_{y\ge\eta}\frac{(\nabla\Phi_2)^2 - V_2^2}{2}\,dx\,dy. \tag{4}$$

Данные переменные $\psi(x,t)$ и $\eta(x,t)$ обобщают канонические переменные, введенные для поверхностных волн Захаровым [21] (см. также работу [22]).

3. СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим поведение системы в приближении малости углов наклона границы, когда $|\eta_x| \ll 1$. Для этого удобно гамильтониан (4) представить в виде интеграла по поверхности раздела:

$$H = \int\limits_S\left[\frac{1}{2}\psi\partial_n\Phi_1 - \frac{\rho_1 V_1(\psi_1 + \psi_2)\eta_x}{2\sqrt{1+\eta_x^2}}\right]dS, \tag{5}$$

где dS — дифференциал поверхности, и затем разложить H в ряд по степеням канонических переменных ψ и η:

$$H = H_0 + H_{int}. \tag{6}$$

Здесь H_0 — квадратичный по ψ и η гамильтониан, H_{int} — гамильтониан взаимодействия, разложение которого начинается с кубического члена H_3. Чтобы найти первых два члена H, нужно разложить входящие в гамильтониан (5) величины $\partial_n\Phi_1$, ψ_1 и ψ_2 вплоть до квадратичных членов по ψ и η. С учетом того, что $\tilde{\Phi}_{1,2}$ — гармонические функции, затухающие при $y \to \mp\infty$ и, согласно (3), удовлетворяющие условию

$$\partial_n\tilde{\Phi}_1 - \partial_n\tilde{\Phi}_2 = \frac{V_1(\rho_1+\rho_2)\eta_x}{\rho_2\sqrt{1+\eta_x^2}}, \quad y = \eta(x,t),$$

достаточно просто находятся соответствующие разложения:

$$\partial_n \Phi_1 \approx \hat{k}\psi_1 - V_1\eta_x - (\eta\psi_{1x})_x - \hat{k}(\eta\hat{k}\psi_1),$$

$$\begin{aligned}
\psi_1 &\approx \frac{\psi}{\rho_1+\rho_2} + V_1\hat{H}\eta + \frac{2\rho_2}{(\rho_1+\rho_2)^2}\times \\
&\times\left[\eta\hat{k}\psi + \hat{H}(\eta\psi_x)\right] - V_1 A\left[\eta\eta_x - \hat{H}(\eta\hat{k}\eta)\right], \\
\psi_2 &\approx -\frac{\psi}{\rho_1+\rho_2} + \frac{\rho_1}{\rho_2}V_1\hat{H}\eta + \frac{2\rho_1}{(\rho_1+\rho_2)^2}\times \\
&\times\left[\eta\hat{k}\psi + \hat{H}(\eta\psi_x)\right] - \frac{\rho_1}{\rho_2}V_1 A\left[\eta\eta_x - \hat{H}(\eta\hat{k}\eta)\right].
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $\hat{k} \equiv -\partial_x\hat{H}$ — интегральный оператор, фурье-образ которого есть $|k|$, $\hat{H}$ — оператор Гильберта, определяемый как

$$\hat{H}F(x) = \frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x')}{x-x'}\,dx',$$

и $A = (\rho_1-\rho_2)/(\rho_1+\rho_2)$ — число Атвуда. Ограничиваясь в соотношениях (7) линейными членами, после подстановки в гамильтониан получаем

$$H_0 = \frac{1}{2(\rho_1+\rho_2)}\int\psi\hat{k}\psi\,dx - \frac{V^2\rho_1(\rho_1+\rho_2)}{2\rho_2}\int\eta\hat{k}\eta\,dx,$$

откуда немедленно следует дисперсионное соотношение для неустойчивости Кельвина–Гельмгольца: $\omega^2 = -c^2k^2 < 0$, где ω — частота, k — волновое число, а $c = V_1\sqrt{\rho_1/\rho_2} = -V_2\sqrt{\rho_2/\rho_1}$. Эта неустойчивость является апериодической. Напомним, что мы работаем в системе центра масс: если бы величины $V_{1,2}$ не удовлетворяли условию (1), то у частоты появлялась бы действительная часть [2]. Отметим также, что в пределе $\rho_1 \to 0$ (либо $\rho_2 \to 0$) параметр c будет конечен при условии, что $V_1 \to \infty$ как $\rho_1^{-1/2}$ (либо, соответственно, $V_2 \to -\infty$ как $-\rho_2^{-1/2}$). Ниже мы рассмотрим предельные случаи, когда число Атвуда A принимает значения ± 1, а величина c остается конечной.

В уравнениях (5) и (6) перейдем к безразмерным переменным:

$$\psi \to \psi c\lambda(\rho_1+\rho_2), \quad \eta \to \eta\lambda, \quad t \to t\lambda/c, \quad x \to x\lambda,$$

где λ — характерный пространственный масштаб. В результате гамильтониан $H = H_0 + H_3$ запишется как

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\int\left[\psi\hat{k}\psi - \eta\hat{k}\eta\right]dx + \\
&+ \frac{A}{2}\int\eta\left[(\psi_x)^2 - (\hat{k}\psi)^2 + (\eta_x)^2 - (\hat{k}\eta)^2\right]dx - \\
&- \sqrt{1-A^2}\int\eta\left[\eta_x\hat{k}\psi + \psi_x\hat{k}\eta\right]dx,
\end{aligned}$$

а соответствующие ему уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned}
\psi_t - \hat{k}\eta &= -\sqrt{1-A^2}\left[\eta\hat{k}\psi_x - \psi_x\hat{k}\eta - \hat{k}(\eta\psi_x)\right] + \\
&+ \frac{A}{2}\left[(\hat{k}\psi)^2 - (\psi_x)^2 + (\hat{k}\eta)^2 - (\eta_x)^2 + \right. \\
&\left. + 2(\eta\eta_x)_x + 2\hat{k}(\eta\hat{k}\eta)\right],
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\eta_t - \hat{k}\psi &= -\sqrt{1-A^2}\left[\hat{k}(\eta\eta_x) - (\eta\hat{k}\eta)_x\right] - \\
&- A\left[(\eta\psi_x)_x + \hat{k}(\eta\hat{k}\psi)\right].
\end{aligned} \tag{9}$$

4. РЕДУЦИРОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Совершим каноническое преобразование от переменных ψ и η к новым переменным

$$f = (\psi+\eta)/2, \quad g = (\psi-\eta)/2.$$

Уравнения движения в переменных f и g сохраняют гамильтонову форму,

$$f_t = \frac{\delta H}{\delta g}, \quad g_t = -\frac{\delta H}{\delta f},$$

а гамильтониан преобразуется: $H \to 2H$. В новых переменных преобразованный гамильтониан H имеет вид

$$\begin{aligned}
H &= \int f\hat{k}g\,dx + \frac{A}{2}\times \\
&\times\int(f-g)\left[(f_x)^2 - (\hat{k}f)^2 + (g_x)^2 - (\hat{k}g)^2\right]dx - \\
&- \sqrt{1-A^2}\int(f-g)\left[f_x\hat{k}f - g_x\hat{k}g\right]dx.
\end{aligned} \tag{10}$$

При этом линеаризованные уравнения движения превращаются в два отдельных уравнения:

$$f_t - \hat{k}f = 0, \quad g_t + \hat{k}g = 0.$$

Уравнение для f описывает экспоненциальный рост возмущений, в то время как уравнение для g — их затухание. Таким образом, на временах порядка обратного инкремента функцию g можно считать малой по сравнению с f и пренебречь в гамильтониане (10) квадратичными и кубическими по g слагаемыми. В результате

$$H = \int f\hat{k}g\,dx + \frac{A}{2}\int (f-g)\left[(f_x)^2 - (\hat{k}f)^2\right]dx - \\ - \sqrt{1-A^2}\int (f-g)\left[f_x\hat{k}f\right]dx,$$

а соответствующие уравнения движения имеют вид

$$f_t - \hat{k}f = \frac{A}{2}\left[(\hat{k}f)^2 - (f_x)^2\right] + \sqrt{1-A^2}\left[f_x\hat{k}f\right], \quad (11)$$

$$g_t + \hat{k}g = \frac{A}{2}\left[(\hat{k}f)^2 - (f_x)^2 + 2(ff_x)_x + 2\hat{k}(f\hat{k}f)\right] + \\ + \sqrt{1-A^2}\left[\hat{k}(ff_x) - f\hat{k}f_x\right] - A\left[(gf_x)_x + \hat{k}(g\hat{k}f)\right] - \\ - \sqrt{1-A^2}\left[\hat{k}(gf_x) - (g\hat{k}f)_x\right]. \quad (12)$$

Полученная система имеет одну важную особенность: уравнение (11) для f оказывается автономным, а уравнение (12) — линейным относительно g. Как будет показано в разд. 5, уравнение (11) может быть проинтегрировано: его решение находится в неявном виде. Что касается уравнения (12), то оно допускает дальнейшее упрощение. Поскольку величина g считается малой по сравнению с f, всеми членами в правой части уравнения (12), содержащими g, следует пренебречь:

$$g_t + \hat{k}g = \frac{A}{2}\left[(\hat{k}f)^2 - (f_x)^2 + 2(ff_x)_x + 2\hat{k}(f\hat{k}f)\right] + \\ + \sqrt{1-A^2}\left[\hat{k}(ff_x) - f\hat{k}f_x\right]. \quad (13)$$

Решение этого уравнения (линейного относительно g) представимо в виде суммы общего решения g_0 однородного линейного уравнения и частного решения неоднородного. Решение g_0, очевидно, затухает, а частное решение представляет собой вклад, индуцированный f благодаря квадратичной нелинейности. При этом рост f приводит к росту g. По порядку величины индуцированная часть $g = O(f^2)$ (подробнее см. разд. 5).

Таким образом, исходная система уравнений (8) и (9), имеющая две ветви решений (нарастающие и затухающие со временем), может быть сведена к существенно более простым уравнениям (11) и (13), одно из которых является автономным, а другое описывает динамику g, полностью определяемую поведением растущей моды.

5. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим теперь ключевое уравнение (11), соответствующее нарастающим во времени решениям. Решение уравнения будем искать в виде разложения

$$f = f_+ + f_-,$$

где $f_\pm$ — аналитические продолжения функции f соответственно в верхнюю и нижнюю полуплоскости комплексной переменной x. Функции $f_\pm$ могут быть записаны как действия проекторов $\hat{P}_\pm = (1 \mp i\hat{H})/2$ на функцию f: $f_\pm = \hat{P}_\pm f$. Благодаря свойствам проекторов $\hat{P}_\pm^2 = \hat{P}_\pm$ и $\hat{P}_\pm\hat{P}_\mp = 0$, что эквивалентно условию $\hat{H}^2 = -1$, нелинейные члены в правой части уравнения (11) распадаются на сумму функций, аналитически продолжимых в верхнюю и нижнюю полуплоскости:

$$(\hat{k}f)^2 - (f_x)^2 \equiv (\hat{H}f_x)^2 - (f_x)^2 = -2\left(f_{+x}^2 + f_{-x}^2\right),$$

$$f_x\hat{k}f \equiv -f_x\hat{H}f_x = -i\left(f_{+x}^2 - f_{-x}^2\right).$$

Очевидно, что и линейные члены в уравнении (11) также представимы в виде суммы функций, аналитически продолжимых в верхнюю и нижнюю полуплоскости. Поэтому уравнения для $f_\pm$ расщепляются. В частности, для $f_+ \equiv F$ имеем автономное уравнение, не содержащее f_-:

$$F_t + iF_x = -e^{i\gamma}F_x^2, \quad (14)$$

где мы ввели обозначение $\gamma = \arccos A$. Вещественный параметр γ, определяемый числом Атвуда, лежит в диапазоне $0 \le \gamma \le \pi$. Так, значениям $\gamma = 0$, $\pi/2$, π соответствуют значения $A = 1, 0, -1$. Аналогичное уравнение получается для f_- (оно по форме совпадает с комплексно-сопряженным уравнением (14)).

Важно, что уравнение (14), в отличие от исходных, является локальным, т. е. не содержит интегральных операторов. Дифференцирование этого уравнения по x приводит к уравнению типа Хопфа:

$$V_t + iV_x = -2e^{i\gamma}VV_x, \quad (15)$$

где $V = F_x$ имеет смысл скорости. Решение этого уравнения находится с помощью метода характеристик:

$$V = V_0(\tilde{x}), \quad x = \tilde{x} + it + 2e^{i\gamma}V_0(\tilde{x})t, \quad (16)$$

где функция V_0 определяется из начального условия $V_0(x) = V|_{t=0}$, а $\tilde{x}$ имеет смысл лагранжевой координаты. Функция V, будучи аналитической функцией в верхней полуплоскости, все свои особенности имеет в нижней полуплоскости. Как это было показано в работах [18, 19], при $t > 0$ любая точечная особенность превращается в разрез, точки ветвления которого оказываются движущимися. Их положения определяются из условия $\partial x/\partial \tilde{x} = 0$, т. е.

$$1 + 2e^{i\gamma} V_0'(\tilde{x}) t = 0 \tag{17}$$

(здесь штрих означает производную по аргументу). В момент времени $t = t_c$, когда самая быстрая точка ветвления достигнет действительной оси, аналитичность функции V, очевидно, будет нарушена, соответственно у решения появится особенность. Рассмотрим этот процесс более подробно.

Уравнение (17) задает траектории, по которым точки ветвления движутся в комплексной плоскости $\tilde{x}$. Пусть $\tilde{x} = \tilde{X}(t)$ — одна из таких траекторий. Согласно (16), движение соответствующей точки ветвления x в комплексной плоскости определяется уравнением

$$x = X(t) = \tilde{X}(t) + it + 2e^{i\gamma} V_0\left(\tilde{X}(t)\right) t.$$

Пусть эта точка ветвления первой достигает вещественной оси, тогда момент возникновения особенности будет определяться из равенства $\operatorname{Im} X(t_c) = 0$. Разложение выражений (16) в окрестности точки $t = t_c$, $x = x_c \equiv X(t_c)$, $\tilde{x} = \tilde{x}_c \equiv \tilde{X}(t_c)$ в основном порядке дает

$$V = V_0(\tilde{x}_c) + V_0'(\tilde{x}_c)\delta\tilde{x} + \ldots,$$

$$\delta x = i\delta t + 2e^{i\gamma} V_0(\tilde{x}_c)\delta t + t_c e^{i\gamma} V_0''(\tilde{x}_c)(\delta\tilde{x})^2 + \ldots,$$

где $\delta t = t - t_c$, $\delta x = x - x_c$ и $\delta\tilde{x} = \tilde{x} - \tilde{x}_c$. Исключая отсюда параметр $\delta\tilde{x}$, получим

$$V(x,t) = V_0(\tilde{x}_c) + \\ + V_0'(\tilde{x}_c)\left[\frac{\delta x - \left(i + 2e^{i\gamma} V_0(\tilde{x}_c)\right)\delta t}{t_c e^{i\gamma} V_0''(\tilde{x}_c)}\right]^{1/2} + \ldots \tag{18}$$

Отсюда видно, что сингулярными становятся производные V_x и V_t. Как результат форма границы приобретает корневые особенности. В частности, из выражения (18) следует

$$V_x(x,t) \approx \frac{V_0'(\tilde{x}_c)}{2\sqrt{t_c e^{i\gamma} V_0''(\tilde{x}_c)}} \times \\ \times \left[\delta x - \left(i + 2e^{i\gamma} V_0(\tilde{x}_c)\right)\delta t\right]^{-1/2}, \tag{19}$$

т. е. в ситуации общего положения $V_x(x_c,t) \sim$ $\sim |\delta t|^{-1/2}$.

Итак, нам удалось свести нелокальное уравнение (11) для функции f к локальному уравнению в частных производных первого порядка (14) для функции F, аналитической в верхней полуплоскости комплексной переменной x. Оказалось, что это уравнение допускает точное аналитическое решение. Для того чтобы найти форму границы, определяемую функцией $\eta = f - g$, помимо f необходимо знать функцию g, которая находится из решения уравнения (13). В линейном приближении это уравнение описывает релаксацию g к нулю, однако наличие в правой части уравнения (13) членов, квадратичных по f, приводит к индуцированному росту функции g. При малых углах наклона поверхности величина g будет иметь порядок $O(f^2)$ и, следовательно, ее роль в слабонелинейной эволюции системы будет незначительной. Однако это утверждение требует проверки в окрестности особой точки, где сингулярной становится вторая производная функции f.

Перепишем уравнение (13), вводя $G = \hat{P}_+ g$ — аналитическое продолжение функции g в верхнюю полуплоскость:

$$G_t - iG_x = -e^{i\gamma} F_x^2 + 2e^{-i\gamma}\hat{P}_+(F\bar{F}_x)_x, \tag{20}$$

где $\bar{F}$ — комплексное сопряжение F. Функция $\bar{F}$ является аналитической в нижней полуплоскости, а ее особенности лежат в верхней полуплоскости x. Если бы уравнение (20) не содержало проекционного оператора $\hat{P}_+$, то второе слагаемое в правой части было бы сингулярным за счет второй производной от $\bar{F}$, но действие проектора $\hat{P}_+$ подавляет появление особенности при $\operatorname{Im} x > 0$. Отсюда легко понять, что слагаемое со второй производной от $\bar{F}$ в силу действия проектора будет иметь такой же порядок, как и первое слагаемое в правой части уравнения (20), в том числе и в окрестности точки касания $x = x_c$. В окрестности этой точки функция G должна следовать асимптотике (18), т. е. G следует искать в виде

$$G = G\left[\delta x - \left(i + 2e^{i\gamma} V_0(\tilde{x}_c)\right)\delta t\right].$$

В этом случае из уравнения (20) получаем

$$-2\left[i + e^{i\gamma} V_0(\tilde{x}_c)\right] G_x = -e^{i\gamma} F_x^2 + 2e^{-i\gamma}\hat{P}_+(F\bar{F}_x)_x.$$

Действительная часть G_x дает оценку для вклада в характерный угол наклона. Очевидно, что он оказывается малым по сравнению с действительной частью F_x, т. е. вблизи особенности форма поверхности в малоугловом приближении определяется функцией F: $\eta \approx 2\operatorname{Re} F$. Эта функция задает при приближении $t \to t_c$ соответствующие особенности поверхности $y = \eta(x,t)$.

Обсудим теперь динамику поверхности раздела. Кривизна поверхности, определяемая как $\eta_{xx}(1+\eta_x^2)^{-3/2}$, в рамках квадратично-нелинейного приближения есть

$$\eta_{xx} \approx 2\,\mathrm{Re}\,F_{xx} = 2\,\mathrm{Re}\,V_x. \tag{21}$$

Будем считать, что выполняется условие $|V_0(\tilde{x}_c)| \ll \ll 1$. Оно реализуется в случае, когда справедливо малоугловое приближение (функция $V_0(\tilde{x}_c)$ определяет наклон поверхности раздела в особой точке). Тогда разложение (18) для функции V вблизи особой точки $x = x_c$ и $t = t_c$ можно приближенно записать как

$$V(x,t) \approx V_0(\tilde{x}_c) + V_0'(\tilde{x}_c)\left[\frac{\delta x - i\delta t}{t_c e^{i\gamma} V_0''(\tilde{x}_c)}\right]^{1/2}. \tag{22}$$

Отсюда видно, что поведение системы вблизи особенности носит универсальный характер: функция V при произвольных начальных условиях зависит только от комбинации переменных $(\delta x - i\delta t)$. Начальные условия определяют только аддитивную постоянную и постоянный множитель в выражении (22). Подобная зависимость характерна для решений линеаризованного уравнения (15):

$$V_t + iV_x = 0. \tag{23}$$

При подстановке сюда (22) мы получим тождество. Это, конечно, не означает, что формирование особенности можно описывать в рамках линейного уравнения (23). Нелинейный член уравнения (15) определяет тип формирующейся особенности, задавая конкретную зависимость функции V от комбинации $(\delta x - i\delta t)$. В частности, именно нелинейность определяет влияние числа Атвуда на поведение системы: линеаризованное уравнение (23) не содержит числа A (или, что то же самое, параметра γ) в явном виде.

Вернемся к обсуждению поведения границы вблизи особой точки. Используя (22), находим следующее универсальное соотношение для кривизны вблизи особой точки:

$$\eta_{xx} \approx \mathrm{Re}\left\{\frac{V_0'(\tilde{x}_c)}{\sqrt{t_c e^{i\gamma} V_0''(\tilde{x}_c)\,(\delta x - i\delta t)}}\right\}.$$

Отметим, что часть наших выводов основана на малоугловом приближении, справедливость которого к моменту формирования особенности $t = t_c$ требует дополнительной проверки.

6. ЭВОЛЮЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА

Пусть в начальный момент времени $t = 0$

$$F(x,0) = -ia_0 e^{ix}, \quad G(x,0) = 0,$$

что соответствует периодическому возмущению границы (с периодом 2π)

$$\eta(x,0) = 2a_0 \sin x.$$

Здесь $2a_0$ — начальная амплитуда деформации границы, которую мы считаем малой: $0 < a_0 \ll 1$. Подобные начальные условия соответствуют тому, что

$$V(x,0) = a_0 e^{ix}. \tag{24}$$

Эволюция функции V, согласно решению (16), задается выражениями

$$V = V_0(\tilde{x}) = a_0 e^{i\tilde{x}}, \quad x = \tilde{x} + it + 2a_0 t e^{i\gamma + i\tilde{x}}. \tag{25}$$

Уравнение (17), определяющее положение особенностей отображения $\tilde{x}(x)$, принимает следующий вид:

$$1 + 2ia_0 e^{i\gamma + i\tilde{x}} t = 0. \tag{26}$$

В соответствии с ним особенности двигаются в плоскости $\tilde{x}$ по траекториям

$$\tilde{x} = \tilde{X}_n(t) = \pi/2 + 2\pi n - \gamma + i\ln(2a_0 t),$$

где n — целое число. Подставляя это выражение в (25), находим, что точки ветвления функции V двигаются по нижней полуплоскости комплексной переменной x по направлению к вещественной оси по прямым, параллельным мнимой оси:

$$x = X_n(t) = \pi/2 + 2\pi n - \gamma + i\ln(2a_0 t) + it + i.$$

Особенности на поверхности раздела формируются (одновременно) в момент времени $t = t_c$, когда точки ветвления достигают мнимой оси: $\mathrm{Im}\,X_n(t_c) = 0$. Ограничиваясь одним пространственным периодом $-\pi \le x \le \pi$ $(n = 0)$, находим

$$x_c = \pi/2 - \gamma, \quad \ln(2a_0 t_c) + t_c + 1 = 0. \tag{27}$$

Видно, что координаты особых точек зависят от параметра γ и, следовательно, от числа Атвуда. Так, при $\gamma = 0$ $(A = 1)$ имеем $x_c = \pi/2$, т.е. особенности возникают в максимумах функции η; при $\gamma = \pi$ $(A = -1)$ получаем $x_c = -\pi/2$, т.е. особенности возникают в минимумах η. Для промежуточных значений A особенности лежат в интервале $-\pi/2 < x_c < \pi/2$. В частности, при $\gamma = \pi/2$

($A = 0$) имеем $x_c = 0$, что соответствует точке перегиба функции η. Время t_c не зависит от параметра A, а зависит только от начальной амплитуды a_0. Поскольку $a_0 \ll 1$, решение трансцендентного уравнения (27) для t_c можно найти с помощью итераций:

$$t_c = -\ln a_0 - \ln(-\ln a_0) - \ln 2 - 1 + \ldots. \qquad (28)$$

Таким образом, $t_c \gg 1$ при достаточно малой начальной амплитуде a_0. Это означает, что в этом случае основное время до $t = t_c$ система находится в стадии линейной неустойчивости. Нелинейные эффекты сказываются при приближении t к t_c. Следует отметить, что уравнения (27) совпадают при $A = 0$ с результатами по неустойчивости вихревой пелены [5, 6].

В предыдущем разделе при демонстрации универсальности поведения вблизи особой точки мы использовали условие $|V_0(\tilde{x}_c)| \ll 1$. Из уравнений (24) и (26) видно, что $V_0(\tilde{x}_c) = ie^{-i\gamma}/2t_c$, т. е. параметр $V_0(\tilde{x}_c)$ мал по абсолютному значению при достаточно больших значениях t_c, что, согласно (28), соответствует $a_0 \to 0$. В частности, это означает малость угла наклона поверхности в особой точке, примерно равного $2\,\mathrm{Re}\,V_0(\tilde{x}_c) = t_c^{-1}\sin\gamma$.

Покажем, что углы наклона поверхности будут малы в момент формирования особенности не только в особой точке, но и на периферии. Выражения (25) для функции V в момент $t = t_c$ с учетом (27) можно представить как

$$V = a_0 e^{t_c + i\xi}, \quad x = \xi + e^{i\gamma + i\xi - 1}, \qquad (29)$$

где введена вспомогательная переменная $\xi \equiv \tilde{x} + it_c$. Видно, что второе уравнение, задающее отображение $\xi(x)$, не содержит малого параметра a_0, а также связанного с ним параметра t_c. Отсюда сразу следует (при этом нет необходимости решать это трансцендентное уравнение), что $\xi = O(1)$ при $-\pi \le x \le \pi$. Из первого уравнения (29) видно, что характерные углы наклона границы $\eta_x \approx 2\,\mathrm{Re}\,V$ определяются множителем $a_0 e^{t_c}$. С учетом (27) имеем $a_0 e^{t_c} = (2et_c)^{-1}$. Тогда, как следует из (28), углы наклона поверхности малы при $a_0 \to 0$.

Таким образом, представленный в этом разделе анализ эволюции периодического возмущения границы с малой начальной амплитудой показал, что малоугловое приближение не нарушается к моменту формирования особенностей, что доказывает применимость нашего подхода, основанного на разложениях по каноническим функциям ψ и η либо по вспомогательным функциям f и $g = O(f^2)$.

Обсудим теперь тип особенностей, появляющихся на поверхности раздела. Из (22) следует, что вблизи особой точки

$$V_x(x,t) \approx -\frac{e^{-i\gamma}}{2t_c}\left(-2\delta t - 2i\delta x\right)^{-1/2}. \qquad (30)$$

Здесь мы воспользовались соотношениями

$$V_0(\tilde{x}_c) = (i/2t_c)e^{-i\gamma}, \quad V_0''(\tilde{x}_c) = -(i/2t_c)e^{-i\gamma}.$$

Отсюда видно, что производная V_x обращается в бесконечность по закону $V_x(x_c,t) \sim (-\delta t)^{-1/2}$. Как уже обсуждалось выше, именно функция V определяет поведение поверхности раздела, поэтому кривизна в главном порядке $\eta_{xx} \approx 2\,\mathrm{Re}\,V_x$. Выделяя вещественную часть в (30), имеем

$$\eta_{xx} \approx -\left[A\left(\sqrt{\delta t^2 + \delta x^2} - \delta t\right)^{1/2} + \right.$$
$$\left. + \operatorname{sign}(\delta x)\sqrt{1-A^2}\left(\sqrt{\delta t^2 + \delta x^2} + \delta t\right)^{1/2}\right] \times$$
$$\times \left(2t_c\sqrt{\delta t^2 + \delta x^2}\right)^{-1}, \qquad (31)$$

где мы вернулись к использованию параметра A. Наиболее простой вид это выражение принимает при $A = \pm 1$ и при $A = 0$, когда одно из двух слагаемых в числителе обращается в нуль. Так, при $A = \pm 1$ кривизна η_{xx} становится четной функцией переменной δx. При этом в особой точке $x_c = \pm\pi/2$ кривизна обращается в бесконечность за конечное время:

$$\eta_{xx}(x_c,t) \approx \mp t_c^{-1}(-2\delta t)^{-1/2}.$$

Она отрицательна при $A = 1$ и положительна при $A = -1$.

При $A = 0$ кривизна η_{xx} становится нечетной функцией переменной δx. Кривизна в особой точке $x_c = 0$ равна нулю, т. е. мы имеем дело с точкой перегиба. В момент формирования особенности $\eta_{xx}(\pm 0, t_c) \to \mp\infty$, т. е. кривизна испытывает разрыв второго рода. Следует отметить, что именно такое поведение границы было предсказано Муром на основе анализа эволюции периодических возмущений вихревой пелены [5, 6].

При произвольном значении A в окрестности особой точки в момент $t = t_c$

$$\eta_{xx}(x,t_c) \approx -\frac{A + \operatorname{sign}(\delta x)\sqrt{1-A^2}}{2t_c\sqrt{|\delta x|}}.$$

Отсюда видно, что знак кривизны справа от особой точки определяется выражением $\left(-A - \sqrt{1-A^2}\right)$, а слева — выражением $\left(-A+\sqrt{1-A^2}\right)$. Соответственно, при изменении числа Атвуда от минимального возможного значения (-1) до максимального $(+1)$, кривизна справа от особой точки меняет знак с положительного на отрицательный при $A=-1/\sqrt{2}$, а слева — при $A=1/\sqrt{2}$. Отсюда следует вывод, что при $1/\sqrt{2}<A\leq 1$ (т. е. при $\rho_1/\rho_2 > (\sqrt{2}+1)/(\sqrt{2}-1)\approx 5.83$) кривизна вблизи особой точки всегда отрицательна, а при $-1\leq A<-1/\sqrt{2}$ (т. е. при $\rho_2/\rho_1 > 5.83$) — всегда положительна. В промежуточном случае $-1/\sqrt{2}<A<1/\sqrt{2}$ кривизна меняет знак в особой точке.

7. ЭВОЛЮЦИЯ ЛОКАЛИЗОВАННОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА

Рассмотрим теперь динамику поверхности раздела для пространственно-локализованных возмущений, т. е. $\eta\to 0$ и $\psi\to 0$ при $|x|\to\infty$.

Пусть при $t=0$

$$V(x,0)=-\frac{ise^{i(\alpha-\gamma)}}{(x+i)^2}, \tag{32}$$

т. е. в начальный момент времени у функции V имеется полюс второго порядка в точке $x=-i$. Здесь для постоянной $s>0$ предполагается выполненным условие малоуглового приближения $s\ll 1$, α — вещественный параметр, лежащий в диапазоне $-\pi\leq\alpha\leq\pi$. Предположим также, что $G(x,0)=0$; тогда форма поверхности при $t=0$ имеет вид

$$\eta(x,0)=\frac{2s\cos(\alpha-\gamma)}{x^2+1}-\frac{2sx\sin(\alpha-\gamma)}{x^2+1}.$$

В соответствии с (16) динамика функции V определяется выражением

$$V=V_0(\tilde{x})=-\frac{ise^{i(\alpha-\gamma)}}{(\tilde{x}+i)^2}, \tag{33}$$

где $\tilde{x}$ находится из уравнения

$$x=\tilde{x}+it-\frac{2iste^{i\alpha}}{(\tilde{x}+i)^2}. \tag{34}$$

Уравнение (17), описывающее движение точек ветвления в плоскости $\tilde{x}$ по траекториям $\tilde{x}=\tilde{X}(t)$, принимает вид

$$1+\frac{4iste^{i\alpha}}{[\tilde{X}(t)+i]^3}=0.$$

Это уравнение имеет три корня:

$$\tilde{X}_n(t)=-i+ie^{i(\alpha+2\pi n)/3}(4st)^{1/3}, \quad n=1,2,3. \tag{35}$$

Отсюда траектории точек ветвления в плоскости x, следующие из (34), задаются выражениями

$$x=X_n(t)=it-i+3ie^{i(\alpha+2\pi n)/3}(st/2)^{1/3}, \quad n=1,2,3. \tag{36}$$

Первой вещественной оси достигнет точка X_3, для которой нелинейность ускоряет движение (линейные решения соответствуют пределу $s\to 0$). Отметим, что в частном случае $\alpha=\pi$ точка X_3 выходит на вещественную ось одновременно с точкой X_2, а в случае $\alpha=-\pi$ — одновременно с X_1.

Момент формирования особенности определяется из условия $\operatorname{Im}X_3(t_c)=0$:

$$t_c-1+3\cos(\alpha/3)(st_c/2)^{1/3}=0.$$

Поскольку величина s мала, для t_c приближенно имеем

$$t_c\approx 1-3\cos(\alpha/3)(s/2)^{1/3}. \tag{37}$$

Согласно (36), точка ветвления $x=X_3(t)$ достигает вещественной оси в точке

$$x=\operatorname{Re}X_3(t_c)\approx -3\sin(\alpha/3)(st_c/2)^{1/3}.$$

В частном случае, когда $\alpha=0$, точка ветвления движется по мнимой оси и сингулярность появляется в точке $x=0$.

Рассмотрим тип формирующейся особенности. В разд. 5 мы показали, что поведение системы вблизи особенности в случае общего положения определяется параметрами $V_0(\tilde{x}_c)$, $V_0'(\tilde{x}_c)$ и $V_0''(\tilde{x}_c)$, которые, в свою очередь, определяются начальными условиями. Подставляя выражение для времени (37) в (35), для $\tilde{x}_c$ находим

$$\tilde{x}_c\equiv\tilde{X}_3(t_c)=-i+ie^{i\alpha/3}(4st_c)^{1/3}\approx -i+ie^{i\alpha/3}(4s)^{1/3}.$$

Далее, из (33) получим выражения для искомых параметров:

$$V_0(\tilde{x}_c)=ie^{i(\alpha/3-\gamma)}s^{1/3}/2^{4/3}, \quad V_0'(\tilde{x}_c)=-e^{-i\gamma}/2,$$

$$V_0''(\tilde{x}_c)=-3ie^{-i(\alpha/3+\gamma)}s^{-1/3}/2^{5/3}.$$

Отметим, что $|V_0(\tilde{x}_c)|\sim s^{1/3}$ и, как следствие, $|V_0(\tilde{x}_c)|\ll 1$. Это условие использовалось нами ранее при получении разложения (22). В итоге из (19) имеем выражение

$$V_x(x,t)\approx -\frac{s^{1/6}e^{+i(\alpha/6-\gamma)}}{3^{1/2}2^{5/6}}\left(-\delta t-i\delta x\right)^{-1/2},$$

которое лишь постоянным множителем отличается от (30). Для кривизны поверхности раздела отсюда получим

$$\eta_{xx} \approx -\left[\cos(\gamma - \alpha/6)\left(\sqrt{\delta t^2 + \delta x^2} - \delta t\right)^{1/2} + \right.$$
$$\left. + \operatorname{sign}(\delta x)\sin(\gamma - \alpha/6)\left(\sqrt{\delta t^2 + \delta x^2} + \delta t\right)^{1/2}\right] \times$$
$$\times \left(3^{1/2} 2^{5/6} s^{-1/6} \sqrt{\delta t^2 + \delta x^2}\right)^{-1}. \quad (38)$$

Это означает, что развитие неустойчивости приводит к формированию особой точки, в которой кривизна за конечное время обращается в бесконечность. В момент t_c в окрестности точки x_c имеем

$$\eta_{xx}(x, t_c) \approx -\frac{\cos(\gamma - \alpha/6) + \operatorname{sign}(\delta x)\sin(\gamma - \alpha/6)}{3^{1/2} 2^{5/6} s^{-1/6} \sqrt{|\delta x|}}.$$

Из этого выражения, в частности, следует, что кривизна вблизи особой точки будет отрицательной при любых α для $0 \le \gamma < \pi/12$ (это соответствует числу Атвуда в интервале $\cos(\pi/12) < A \le 1$, или, что то же самое, $\rho_1/\rho_2 > (4+\sqrt{6}+\sqrt{2})/(4-\sqrt{6}-\sqrt{2}) \approx 57.7$) и положительной при любых α для $11\pi/12 \le \gamma < \pi$ (это соответствует $-1 \le A < -\cos(\pi/12)$ и $\rho_2/\rho_1 > 57.7$). В остальных случаях кривизна может менять знак в особой точке. При этом кривизна меняет знак при любых α для $5\pi/12 < \gamma < 7\pi/12$ (это соответствует числу Атвуда в интервале $\cos(7\pi/12) < A < \cos(5\pi/12)$, или, что то же самое, $0.59 \approx (4-\sqrt{6}+\sqrt{2})/(4+\sqrt{6}-\sqrt{2}) < \rho_1/\rho_2 < (4+\sqrt{6}-\sqrt{2})/(4-\sqrt{6}+\sqrt{2}) \approx 1.70$). Эти результаты согласуются с результатами разд. 6, где рассматривались периодические возмущения границы.

Поскольку $\operatorname{Re} V_0(\tilde{x}_c) \sim s^{1/3}$, угол наклона границы в особой точке мал. Покажем, что характерные углы наклона к моменту $t = t_c$ будут малыми и на периферии, т. е. за пределами окрестности особой точки $x = x_c$. Напомним, что условие малости углов наклона было использовано при выводе ключевого уравнения (15).

Динамика системы, за исключением некоторой пространственно-временной окрестности особенности, где все определяется влиянием нелинейности, может приближенно описываться линеаризованным уравнением (23). Его решением с начальным условием (32) является

$$V(x, t) = -\frac{ise^{i(\alpha-\gamma)}}{[x + i(1-t)]^2}, \quad (39)$$

т. е. полюс двигается по мнимой оси к началу координат с постоянной скоростью. В момент $t = 1$ в точке $x = 0$ возникает сильная особенность, нарушающая малоугловое приближение. Однако, как видно из (37), влияние нелинейных слагаемых ускоряет формирование особенности, и, следовательно, к моменту ее формирования углы будут оставаться конечными. Действительно, подставляя формулу (37) для времени t_c в (39), получим

$$V(x, t_c) \approx -\frac{ise^{i(\alpha-\gamma)}}{[x + 3i\cos(\alpha/3)\,(s/2)^{1/3}]^2}.$$

Отсюда следует, что характерное значение для производной η_x будет иметь порядок $s^{1/3}$, т. е. углы остаются малыми, и применимость наших разложений не нарушается на всем временном интервале $0 \le t \le t_c$.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе продемонстрировано, что эволюция поверхности раздела двух движущихся друг относительно друга жидкостей при неустойчивости Кельвина – Гельмгольца приводит за конечное время к формированию слабых (корневых) особенностей в кривизне границы вида (31) и (38). При этом для периодических возмущений границы с изначально малыми углами наклона порядка a_0 к моменту формирования особенности углы достигают значений порядка $|1/\ln a_0|$, т. е. остаются малыми. Для локализованных возмущений углы наклона поверхности $y = \eta(x, t)$ увеличиваются от начальных значений порядка s до значений порядка $s^{1/3}$ при $t = t_c$, оставаясь при этом все еще малыми. Таким образом, условие малости углов наклона поверхности, использованное при выводе ключевых уравнений, не нарушается.

В момент формирования особенности t_c кривизна границы вблизи особой точки x_c задается выражением вида

$$\eta_{xx}(x, t_c) \approx \frac{c_1 + c_2 \operatorname{sign}(x - x_c)}{|x - x_c|^{1/2}},$$

где постоянные $c_{1,2}$ определяются формой начального возмущения поверхности раздела, а также числом Атвуда A. Если $|c_1| < |c_2|$, то кривизна меняет знак в особой точке. В противном случае, она имеет определенный знак. Как показал наш анализ, в случае общего положения при сравнимых значениях плотностей жидкостей (малых по абсолютному значению числах Атвуда, $|A| \ll 1$) кривизна всегда меняет свой знак в особой точке. К этому случаю относится и классическая ситуация, когда жидкости идентичны ($A = 0$). Если плотность одной из жидкостей значительно превышает плотность другой жидкости (т. е. при близких к единице значениях числа Атвуда, $|A| \approx 1$), кривизна поверхности вблизи особенности имеет определенный знак — отрицательный при $A \approx 1$ и положительный при $A \approx -1$.

Примечательно, что в пределах $A \to \pm 1$ развитие неустойчивости Кельвина–Гельмгольца аналогично поведению свободной поверхности проводящих жидкостей в сильном вертикальном электрическом поле. Как было продемонстрировано в работах [23, 24], на границе проводящей жидкости на нелинейной стадии развития неустойчивости Тонкса–Френкеля также имеется тенденция к формированию знакоопределенных особенностей вида $\eta_{xx} \sim |x - x_c|^{-1/2}$. Отметим также, что похожие свойства проявляет поверхность раздела идеальных диэлектрических жидкостей в сильном вертикальном электрическом поле [25].

Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках». Работа одного из авторов (Н. М. З.) выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Свердловской обл. (грант № 13-08-96010). Работа другого автора (Е. А. К.) выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования (договор 11.G34.31.0035 от 25 ноября 2010 г. между Министерством образования и науки РФ, НГУ и ведущим ученым), а также РФФИ (грант № 12-01-00943) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (НШ 3753.2014.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Ламб, *Гидродинамика*, ОГИЗ-Гостехиздат, Москва–Ленинград (1947).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1988).
3. Ю. А. Степанянц, А. Л. Фабрикант, УФН **159**, 83 (1989).
4. Е. А. Кузнецов, П. М. Лушников, ЖЭТФ **108**, 614 (1995).
5. D. W. Moore, Proc. Roy Soc. Lond. A **365**, 105 (1979).
6. P. G. Saffman, *Vortex Dynamics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1992).
7. D. I. Meiron, G. R. Baker, and S. A. Orszag, J. Fluid Mech. **114**, 283 (1982).
8. R. Krasny, J. Fluid Mech. **167**, 65 (1986).
9. M. Shelley, J. Fluid Mech. **244**, 493 (1992).
10. R. Krasny, J. Comput. Phys. **65**, 292 (1986).
11. A. Verga, in *Nonlinear Phenomena and Complex Systems* (*Instabilities and Nonequilibrium Structures*), Vol. 9, ed. by O. Descalzi et al., Kluwer Acad. Publ., Netherlands (2004), p. 361.
12. G. R. Baker, D. I. Meiron, and S. A. Orszag, Phys. Fluids **23**, 1485 (1980).
13. G. R. Baker, D. I. Meiron, and S. A. Orszag, J. Fluid Mech. **123**, 477 (1982).
14. R. M. Kerr, J. Comput. Phys. **76**, 48 (1988).
15. C. Matsuoka and K. Nishihara, Phys. Rev. **73**, 026304 (2006).
16. G. Baker, R. E. Caflisch, and M. Siegel, J. Fluid Mech. **252**, 51 (1993).
17. R. E. Caflisch, O. F. Orellana, and M. Siegel, SIAM J. Appl. Math. **50**, 1517 (1990).
18. E. A. Kuznetsov, M. D. Spector, and V. E. Zakharov, Phys. Rev. E **49**, 1283 (1994).
19. E. A. Kuznetsov, M. D. Spector, and V. E. Zakharov, Phys. Lett. A **182**, 387 (1993).
20. В. М. Конторович, Изв. Вузов, Радиофизика **19**, 872 (1976); Е. А. Кузнецов, М. Д. Спектор, ЖЭТФ **71**, 262 (1976).
21. В. Е. Захаров, ПМТФ **2**, 86 (1968).
22. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, УФН **167**, 1137 (1997).
23. N. M. Zubarev, Phys. Lett. A **243**, 128 (1998).
24. Н. М. Зубарев, ЖЭТФ **114**, 2043 (1998).
25. E. A. Kochurin, N. M. Zubarev, and O. V. Zubareva, Phys. Rev. E **88**, 023014 (2013).