

УСТРАНЕНИЕ ПАРАДОКСА ЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ХАГЕНА – ПУАЗЕЙЛЯ И ВЯЗКИЙ ДИССИПАТИВНЫЙ МЕХАНИЗМ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

С. Г. Чефранов^{a*}, А. Г. Чефранов^{b**}

^a *Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова Российской академии наук
119017, Москва, Россия*

^b *Eastern Mediterranean University, Famagusta, North Cyprus*

Поступила в редакцию 13 декабря 2013 г.

Показано, что для получения вывода о линейной неустойчивости течения Хагена – Пуазейля при конечных числах Рейнольдса необходимо отказаться от использования традиционной «нормальной» формы представления возмущений, которая предполагает возможность разделения переменных, описывающих изменчивость возмущений в зависимости от радиальной и продольной (вдоль оси трубы) координат. При отсутствии такого разделения переменных в развиваемой линейной теории предложено использовать такую модификацию метода Бубнова – Галеркина, которая дает возможность учета различия периодов продольной изменчивости для разных радиальных мод, определяемых предварительно в результате стандартного применения метода Галеркина – Канторовича к уравнению эволюции предельно малых аксиально-симметричных возмущений тангенциальной компоненты поля скорости. Установлено, что при рассмотрении даже двух линейно взаимодействующих радиальных мод для течения Хагена – Пуазейля линейная неустойчивость возможна лишь при наличии указанной условно периодической продольной изменчивости возмущений вдоль оси трубы, когда пороговое значение числа Рейнольдса $Re_{th}(p)$ очень чувствительно зависит от отношения p двух продольных периодов, каждый из которых описывает продольную изменчивость только для своей радиальной моды возмущений. При этом $Re_{th}(p) \rightarrow \infty$ лишь для случаев, когда величина p принимает любое из следующих значений: $p = p_k = k$, $p = p_{1/k} = 1/k$, $p = p_{\sqrt{k}} = \left[k + 1 \pm \sqrt{(k+1)^2 - 4} \right] / 2$, где $k = 1, 2, 3, \dots$. Полученное для реализации линейной неустойчивости течения Хагена – Пуазейля минимальное число $Re_{th}(p) \approx 448$ (когда $p \approx 1.527$) количественно соответствует условию возбуждения волн Толмина – Шлихтинга в пограничном слое, где также $Re_{th} = 420$. Рассматривается сходство механизмов линейной вязкой диссипативной неустойчивости для течения Хагена – Пуазейля и волн Толмина – Шлихтинга. Получено хорошее количественное соответствие величин фазовых скоростей рассматриваемых вихревых возмущений с данными экспериментов о скоростях переднего и заднего фронтов турбулентных «пробок», распространяющихся вдоль оси трубы.

DOI: 10.7868/S0044451014080148

1. ВВЕДЕНИЕ

Фундаментальная и прикладная проблема определения механизма возникновения турбулентности для течения Хагена – Пуазейля (ХП)¹⁾ более века остается загадочной из-за парадокса линейной

устойчивости этого течения относительно предельно малых по амплитуде возмущений при любых числах Рейнольдса $Re = V_{max}R/\nu$ (где V_{max} , ν , R – соответственно максимальная приосевая скорость течения ХП, коэффициент кинематической вязкости и радиус трубы) [1–4]. Явное противоречие с экспериментом, соответствующее этому парадоксу, пока пытаются обойти исходя из представления о допустимости лишь жесткого нелинейного механизма неустойчивости течения ХП относительно возмущений, обладающих достаточно большой конечной амплитудой [5–10]. Основу для такого представления

*E-mail: schefranov@mail.ru

**E-mail: Alexander.chefranov@emu.edu.tr

¹⁾ Течение ХП — это ламинарное, стационарное течение однородной вязкой несжимаемой жидкости вдоль неподвижной, прямолинейной и неограниченной по длине трубе с круглым поперечным сечением.

(см. [3, 4]) дает односторонняя интерпретация экспериментов [11], в которых многократное увеличение порогового числа Рейнольдса Re_{th} до 100000 достигается за счет повышения гладкости обтекаемой поверхности трубы. В этой интерпретации учитывается лишь корреляция между увеличением гладкости поверхности и результирующим уменьшением средней амплитуды исходных возмущений. В то же время отмеченная еще Рейнольдсом [1] чрезвычайно высокая чувствительность величины Re_{th} к начальным возмущениям не исключает возможности влияния на Re_{th} не только амплитудных, но и частотных пространственно-временных характеристик этих возмущений, также обусловленных неидеальностью гладкости обтекаемой поверхности. Действительно, например, в эксперименте [12] установлено, что при фиксированной амплитуде искусственно возбуждаемых возмущений неустойчивость течения ХП возникает только в определенном узком диапазоне частот возмущений.

В настоящей работе показано, что возможность линейной абсолютной (т.е. не конвективной [4]) неустойчивости течения ХП определяется величиной дополнительного к числу Рейнольдса управляющего параметра p , который характеризует частотно-волновые свойства возмущений и влияет на значение порогового числа $Re_{th}(p)$ вне зависимости от амплитуды начальных возмущений. Роль такого дополнительного параметра для модификации течения ХП, в которой течение по трубе осуществляется при наличии на ее оси твердого цилиндра меньшего радиуса (см. [2, 13]), может играть отношение радиусов внешнего и внутреннего цилиндров. Аналогично, дополнительные параметры легко вводятся и в других модификациях течения ХП — в случаях течения по трубе с эллиптическим сечением [14], течения во вращающейся трубе [15, 16] и даже при переносе течением по трубе частиц конечного размера [17]. Во всех этих примерах уже исходно существует дополнительный к числу Рейнольдса свой специфический управляющий параметр p и отсутствует парадокс линейной устойчивости для соответствующего течения. Эти примеры явно указывают на то, что «обход» (см. [5]) парадокса линейной устойчивости течения ХП (как и для плоского течения Куэтта) за счет рассмотрения лишь жесткого конечно-амплитудного механизма неустойчивости этого течения «вряд ли сможет кого-нибудь удовлетворить» [18].

Введение такого дополнительного параметра p для течения ХП уже не является заранее очевидным, как для модификаций течения ХП в работах

[13–17]. Оно, однако, осуществляется ниже на основе указанного Рейнольдсом [1] (а потом и Гейзенбергом для плоского течения Пуазейля, см. [4, 6]) представления о диссипативном механизме неустойчивости²⁾ течения ХП, связанного с действием молекулярной вязкости ν именно вблизи твердой границы. Согласно [1], этот механизм проявляется в виде спонтанного одноэтапного возникновения при $Re > Re_{th}$ вихрей, имеющих характерный макроскопический размер L_ν , который уже не увеличивается, как ожидалось, по мере роста амплитуды скорости [1]. Поэтому величина L_ν должна существенно отличаться и от масштаба длины $l_\nu = \nu/V_{max}$, приводящего к определению числа Рейнольдса $Re = R/l_\nu$ и явно зависящего от величины максимальной амплитуды скорости потока. Такой масштаб L_ν , видимо связанный и со степенью гладкости обтекаемой поверхности трубы, вместе с величиной радиуса R может определять не только амплитудные, но и частотно-волновые параметры начальных возмущений, например, их продольные вдоль оси трубы (оси z) пространственные периоды. Отношение этих периодов $p = L_\nu/R$, как показано ниже, является новым дополнительным параметром, определяющим порог линейной неустойчивости течения ХП по отношению к предельно малым по амплитуде вихревым возмущениям. При этом для любых чисел Рейнольдса величина p может варьироваться в широких пределах от $p \ll 1$ до $p \gg 1$.

Предложено использовать представление для структуры возмущений в виде суперпозиции из $N \geq 2$ радиальных мод, каждая из которых обладает своим периодом продольной изменчивости, не совпадающим с периодом другой радиальной моды. Такое представление соответствует наблюдаемым условно-периодическим волнам Толмина–Шлихтинга (ТШ), возникновение которых (обусловленное также приграничным действием молекулярной вязкости) предшествует взрывному возникновению турбулентности в пограничном слое [23–25]. Кроме того, еще в [2, 26] отмечалось, что обычно рассматриваемые в теории линейной устойчивости «нормальные» периодические по z поля возмущений явно не соответствуют наблюдаемым в эксперименте структурам, для которых разные продольные периоды характерны для разных радиальных мод.

²⁾ Такой механизм естественно реализуется в системах, имеющих возмущения с отрицательной энергией [19–22], например, при пороговом рождении вихрей (ротонгов) в потоке сверхтекучего гелия по капилляру [19].

В настоящей работе показано, что отказ от предположения о разделении продольной и радиальной переменных, определяющих пространственную изменчивость возмущений, приводит уже к конечной величине минимального порогового числа Рейнольдса $Re_{th} \approx 448$ (при величине $p \approx 1.53 \dots$). Близкая к этой величина порогового числа Рейнольдса характерна и для наблюдаемого порога перехода от ламинарного закона сопротивления к иному режиму сопротивления [2, 27], и для условий возбуждения волн ТШ в пограничном слое [25]. Проведено сопоставление выводов рассматриваемой теории с данными экспериментов для течения в трубе [28–30], а также с выводами теории устойчивости (ТШ и Линя) и данными экспериментов по устойчивости ламинарного пограничного слоя [31]. Получены не только соответствие количественных величин критического числа Рейнольдса для линейной экспоненциальной неустойчивости течения ХП и для возбуждения волн ТШ (где также $Re_{th} = 420$), но и аналогичный вид структур областей неустойчивости (ограниченных кривыми нейтральной устойчивости). При этом делается вывод о сходстве вязких диссипативных механизмов в реализации линейной неустойчивости для течения ХП и для возбуждения волн ТШ в пограничном слое.

2. ЛИНЕЙНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ХП

1. Рассмотрим известное [4] представление течения ХП в цилиндрической системе координат (z, r, φ) :

$$V_{0r} = V_{0\varphi} = 0, \quad V_{0z} = V_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right),$$

где $V_{max} = (R^2/4\rho\nu)\partial p_0/\partial z$, плотность жидкости $\rho = \text{const}$, $\partial p_0/\partial z$ — постоянная величина градиента давления p_0 вдоль оси трубы радиуса R , а ν — коэффициент кинематической вязкости жидкости.

В аксиально-симметричном случае (т. е. для предельно малых возмущений, не зависящих от φ) линейная неустойчивость течения ХП может определяться только величиной тангенциальной компоненты V_φ скорости возмущения, которая до выхода на нелинейную стадию эволюции не взаимосвязана с остальными компонентами поля скорости и поля давления возмущения и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + V_{0r}(r) \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} = \nu \left(\Delta V_\varphi - \frac{V_\varphi}{r^2} \right), \quad (1)$$

где Δ — трехмерный оператор Лапласа.

Только при $\nu \neq 0$ в уравнении (1) допустимо ожидать реализации вязкой диссипативной неустойчивости течения ХП при некоторых надпороговых числах Рейнольдса $Re > Re_{th}$, где $Re = V_{max}R/\nu$. Действительно, при $\nu = 0$ правая часть уравнения (1) тоже обращается в нуль. В этом случае имеет место только конвективный перенос возмущений без изменения их формы и амплитуды во времени и применение любых процедур усреднения по продольной переменной не может качественно изменить этот вывод. Отметим, что благодаря рассмотрению в (1) только возмущений тангенциальной компоненты поля скорости автоматически обеспечивается тождественное сохранение потока массы через поперечное сечение трубы для суперпозиции основного течения и поля возмущений. Естественное возникновение таких возмущений в аксиально-симметричном потоке реально может быть затруднено, хотя его и нельзя вовсе исключить из-за возможности наличия соответствующих случайно-неоднородных неровностей обтекаемой поверхности трубы. При лабораторном моделировании течения ХП такие возмущения всегда могут быть искусственно осуществлены [12]. Отметим также, что комбинация основного потока и рассматриваемого поля возмущений обладает отличной от нуля величиной интегральной спиральности.

Будем искать решение уравнения (1), используя метод Галеркина – Канторовича и описывая V_φ в следующем представлении:

$$V_\varphi = V_{max} \sum_{n=1}^N A_n(z, t) J_1 \left(j_{1,n} \frac{r}{R} \right), \quad (2)$$

где V_φ при любых A_n удовлетворяет необходимым граничным условиям по r ($V_\varphi < \infty$ при $r = 0$ и $V_\varphi = 0$ при $r = R$), так как J_1 — функция Бесселя первого порядка, а $\gamma_{1,n}$ — ее нули, т. е. $J_1(\gamma_{1,n}) = 0$ для любого целого n . В выражении (2) поле скорости на оси трубы не только удовлетворяет граничному условию ограниченности, $V_\varphi < \infty$, но и обращается в нуль. Соответственно, в (2) вместо функций Бесселя первого порядка можно было бы использовать и функции Бесселя других порядков, для которых обеспечивается только нулевое граничное условие на границе трубы, а на оси трубы при этом поле скорости возмущений имели бы отличные от нуля значения. Для представления возмущения в виде (2) только радиальная компонента поля вихря $\omega_r = -\partial V_\varphi/\partial z$ обращается в нуль на границе трубы, а величина продольной компоненты поля вихря $\omega_z = r^{-1}\partial r V_\varphi/\partial r$ на границе трубы имеет уже ненулевую величину, что соответствует характеру обра-

зования вихревых возмущений за счет взаимодействия потока с твердой стенкой трубы из-за наличия сил вязкости.

Для коэффициентов A_n , характеризующих амплитуды линейно взаимодействующих радиальных мод поля возмущения, из уравнений (1), (2) получаем следующую систему уравнений, записанную в безразмерном виде:

$$\frac{\partial A_m}{\partial \tau} + j_{1,m}^2 A_m - \frac{\partial^2 A_m}{\partial x^2} + \left(\sum_{n=1}^N P_{nm} \frac{\partial A_n}{\partial x} \right) \text{Re} = 0, \quad (3)$$

где $m = 1, 2, \dots, N$, $\tau = tv/R^2$, $x = z/R$, а постоянные коэффициенты P_{nm} имеют вид

$$P_{nm} = \frac{2}{J_2^2(j_{1,m})} \times \int_0^1 dy y(1-y^2) J_1(j_{1,n}y) J_1(j_{1,m}y), \quad (4)$$

J_2 — функция Бесселя второго порядка и линейный по y член под знаком интеграла дает в P_{nm} вклад в виде единичной матрицы

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

При $N = 1$ в выражении (3) последний член можно исключить преобразованием Галилея, и поэтому при $N = 1$ отсутствует возможность глобальной абсолютной неустойчивости течения ХП. В этой связи будем далее рассматривать систему (3) в простейшем нетривиальном случае $N = 2$, который уже позволяет устранить парадокс линейной устойчивости течения ХП и приводит к выводам, количественно согласующимся с данными экспериментов [29, 31].

2. Как уже отмечалось, наблюдаемые в эксперименте структуры полей не соответствуют строго периодическим вдоль оси трубы изменениям возмущений (см. выше и [2, 26]). Более того, в работе [26] отмечается, что различным радиальным модам (определяющим зависимость возмущений от радиальной координаты) соответствуют отличающиеся друг от друга периоды изменчивости вдоль оси трубы. Это поведение наблюдаемого изменения возмущений может быть промоделировано с помощью использования в представлении решения системы (3) предположения о различии продольных периодов вдоль оси трубы для радиальных мод с разными величинами индекса m . Такое требование соответствует введению для каждой из этих мод своего, независимого от других мод, периодического граничного условия.

В результате возникает необходимость в использовании адекватного указанным граничным условиям галеркинско приближенного решения системы (3) по продольной переменной x . Пусть в (3) для $N = 2$ амплитуды A_1 и A_2 имеют вид бегущих волн с различными периодами вдоль оси трубы:

$$A_1 = A_{10} e^{\lambda\tau + 2\pi i x \alpha}, \quad A_2 = A_{20} e^{\lambda\tau + 2\pi i x \beta}, \quad (5)$$

где A_{10} и A_{20} — постоянные величины. При этом дополнительный к числу Рейнольдса управляющий параметр можно определить в виде $p = \alpha/\beta$ при любых α и β .

При $N = 2$ система (3) после подстановки в нее представления решения (5) имеет вид системы из двух невязок³⁾:

$$(\lambda + \gamma_{1,1}^2 + 4\pi^2 \alpha^2 + 2\pi i \alpha P_{11} \text{Re}) A_{10} e^{2\pi i x \alpha} + i A_{20} e^{2\pi i x \beta} 2\pi \beta P_{21} \text{Re} = 0, \quad (3')$$

$$i A_{10} e^{2\pi i x \alpha} 2\pi \alpha P_{12} \text{Re} + (\lambda + \gamma_{1,2}^2 + 4\pi^2 \beta^2 + 2\pi i \beta P_{22} \text{Re}) A_{20} e^{2\pi i x \beta} = 0. \quad (3'')$$

При рассмотрении системы (3'), (3'') используем метод Бубнова–Галеркина в модификации, применяемой здесь именно к системе из двух невязок, что позволяет учесть предполагаемое отсутствие разделения пространственных переменных при наличии соответствующего наблюдением различия периодов продольной изменчивости для разных радиальных мод. В результате система (3'), (3'') преобразуется в однородную систему с постоянными коэффициентами для неизвестных величин A_{10} и A_{20} . Из условия разрешимости этой системы для ненулевых величин A_{10} и A_{20} определяем показатель $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ в зависимости от безразмерных параметров Re , p и β (см. выражения (A.1) и (A.2) в Приложении).

Использованная в настоящей работе модификация взвешенных невязок по методу Бубнова–Галеркина при рассмотрении невязок (3'), (3'') состоит в следующем. Умножим невязку (3') на $\exp(-2\pi i x \alpha)$ и возьмем интеграл $\alpha \int_0^{1/\alpha} dx$ от каждого ее члена. Аналогично, невязки (3'') умножим на $\exp(-2\pi i x \beta)$ и проведем усреднение, взяв интеграл $\beta \int_0^{1/\beta} dx$. Такое применение галеркинско приближения по продольной переменной учитывает отсутствие какого-либо доминирования одного

³⁾ При неравных периодах в (5) подстановка (5) в (3) не приводит уже к точному решению и необходимо использование приближенного метода взвешенных невязок по отношению к соотношениям (3'), (3''), правые части которых не обращаются точно в нуль и поэтому (3') и (3'') называются невязками.

из продольных периодов, характеризующих представление решения в виде (5). Если же (3') и (3'') усреднять по одному и тому же периоду продольной изменчивости (при умножении (3') и (3'') на один и тот же множитель), то в этом случае линейная неустойчивость течения ХП будет отсутствовать. При этом не будет отличия от случая, когда имеет место разделение пространственных переменных и обе радиальные моды имеют один и тот же период продольной изменчивости. Это означает, что при таком усреднении будет нивелироваться различие периодов продольной изменчивости радиальных мод, предлагаемое в представлении решения (5).

Указанная выше процедура использования галеркинских приближений с усреднением первой и второй невязок системы (3'), (3'') по различным периодам представляется наиболее естественной, но не исключает возможности применения и других процедур усреднения. Например, можно усреднять и (3'), и (3'') по одному и тому же периоду $\gamma = 1/\sqrt{\alpha\beta}$, но при этом надо умножить (3') на $\exp(2\pi i x \gamma)$, а (3'') на $\exp(-2\pi i x \gamma)$ (или наоборот). Получаемое при этом значение порогового (для линейной неустойчивости течения ХП) числа Рейнольдса оказывается нечувствительным к указанной вариации в процедуре усреднения (когда соответствующее значение Re_{th} не зависит от того, какая из невязок, (3') или (3''), умножается на $\exp(-2\pi i x \gamma)$, а какая на $\exp(2\pi i x \gamma)$).

Более подробное рассмотрение возможной зависимости количественных выводов о линейной неустойчивости течения ХП от деталей применяемого метода усреднения может быть проведено отдельно. При этом представляет интерес как рассмотрение более общих случаев с $N > 2$, так и использование вместо (5) представлений для продольной изменчивости радиальных мод через условно периодические функции уже для каждой из радиальных мод (не совпадающие между собой для различных радиальных мод). Здесь же отметим лишь допустимость самого факта наличия линейной экспоненциальной (а не алгебраической — со степенным ростом возмущений во времени) неустойчивости течения ХП, устанавливаемого в настоящей работе. Отметим также, что даже если в системе (3) устремить величину коэффициента кинематической вязкости к нулю, то это не устраняет, как для (1), возможность реализации линейной неустойчивости течения ХП. Это связано с тем, что уже сам вывод системы (3) из уравнения (1) при $N > 1$ исходит из конечности величины коэффициента кинематической вязкости в (1).

3. Условие существования линейной экспонен-

циальной неустойчивости с $\lambda_1 > 0$ в (5) имеет вид (А.3), см. Приложение. Для $\text{Re} \gg 1$ выражение (А.3) может сводиться к (А.4). При этом величина β , определяемая в (А.5), минимизирует выражение для Re_{th} в (А.4) и определяет следующее условие линейной экспоненциальной неустойчивости течения ХП (дающее оценку снизу для точной величины Re_{th} , определяемой из (А.3)):

$$\text{Re} > \text{Re}_{th} = \frac{\pi^2(1-p)^2\sqrt{F}}{P_{12}P_{21}p^2|S|}, \quad (6)$$

где

$$S = \sin(\pi p) \sin \frac{\pi}{p} \sin \left[\pi \left(\frac{1}{p} + p \right) \right],$$

$$B = \frac{S}{|S|} (pP_{11} - P_{22}),$$

$$F = (\gamma_{1,2}^2 + \gamma_{1,1}^2)(1+p^2)A^2 + (\gamma_{1,2}^2 - \gamma_{1,1}^2)(1-p^2)B^2 + 2AB(\gamma_{1,2}^2 - p^2\gamma_{1,1}^2),$$

$$A^2 = B^2 - \frac{4SP_{12}P_{21}p^2 \text{ctg}[\pi(p+1/p)]}{\pi^2(1-p)^2} > 0$$

при $P_{11}, P_{22}, P_{12}, P_{21}$ из (4).

В условии (6), обеспечивающем реализацию линейной неустойчивости течения ХП, величина порогового числа Рейнольдса может стремиться к бесконечности, $\text{Re}_{th} \rightarrow \infty$, только при таких p , для которых обращается в нуль величина знаменателя в (6). Это имеет место при $S = 0$, когда отношение продольных периодов равно одному из следующих рациональных значений: $p = p_k = k$, $p = p_{1/k} = 1/k$, или равно одному из иррациональных чисел, определяемых равенством

$$p = p_{\sqrt{k}} = \frac{k+1 \pm \sqrt{(k+1)^2 - 4}}{2}$$

при любых целых k ($k = 1, 2, \dots$). Для значений p , относящихся к интервалам изменения p между любыми соседними величинами $p_k, p_{1/k}, p_{\sqrt{k}}$, значение Re_{th} в (6) является функцией от p , имеющей один локальный минимум на каждом из отмеченных интервалов (см. рис. 1а). При этом величина абсолютного минимума $\tilde{\text{Re}}_{th}^{min} \approx 442$ в (6) достигается при значении $p \approx 1.53\dots$, близком к величине «золотого» отношения $p_g = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618\dots$ (т. е. предела бесконечной последовательности отношений двух соседних чисел Фибоначчи, каждое из которых равно сумме двух предыдущих чисел: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 и т. д.). Для такого p из точного условия (А.3) получается близкое значение абсолютного минимума

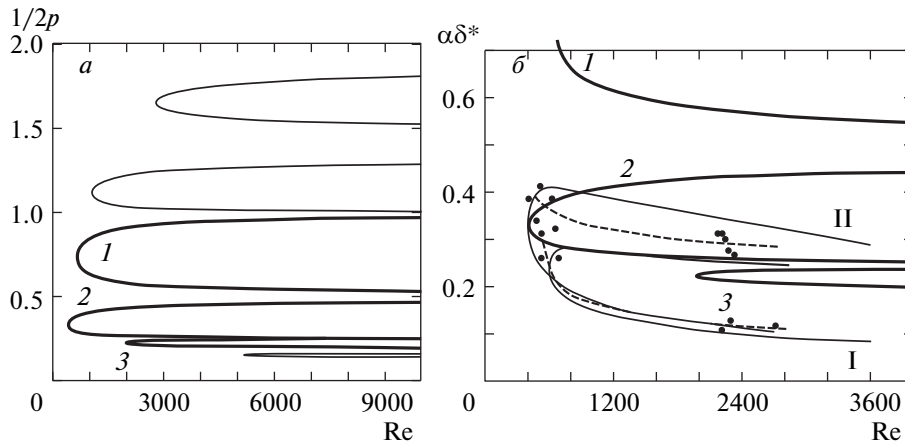


Рис. 1. *а*) Семейство из шести кривых нейтральной устойчивости ($\lambda_1 = 0$) согласно выражениям (6) и (A.5); область неустойчивости, ограниченная кривой 2, соответствует величине $\beta_0 = 0.463$ (при $p = 1.527$), а кривой 3 — $\beta_0 = 1.099$ (при $p = 2.239$). *б*) Кривые 1–3 с рис. 1*а* в увеличенном масштабе; также осуществлено совмещение с рис. 12 из [31] при условии, что имеет место совпадение безразмерных параметров $1/2p = \alpha\delta^*$, где α — волновое число возмущения, δ^* — толщина смещения пограничного слоя при обтекании тонкой пластины [31]. Точки и штриховые линии соответствуют эксперименту [31], а тонкие сплошные линии — теории Шлихтинга (кривая I) и Линя (кривая II)

$\tilde{Re}_{th}^{min} \approx 448$ (см. также таблицу в Приложении, где сравниваются выводы на основе выражений (A.3) и (6)).

3. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ И РЕЗУЛЬТАТАМИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ «БЕГУЩИХ» ВОЛН (TRAVELLING WAVES, TW)

1. Установленная величина $\tilde{Re}_{th}^{min} \approx 448$ соответствует интервалу величин $Re \in 300\text{--}500$, отмечаемому при экспериментальном наблюдении пороговой смены ламинарного закона сопротивления (для течения в трубе) на иной, уже не ламинарный (но и еще не явно турбулентный), режим сопротивления [2, 27] и для возбуждения волн ТШ в пристеночной области пограничного слоя [25]. Наблюдаемая в работе [1] и в других экспериментах (см. ссылки в [29, 30]) необычайная чувствительность величины Re_{th} к исходным возмущениям действительно соответствует полученной в (6) зависимости $Re_{th}(p)$, когда, например, Re_{th} в (6) изменяется почти в 600 раз лишь при изменении p от 0.1186 до 0.1118. Соседние локальные минимумы Re_{th} в (6) также могут заметно отличаться друг от друга. Например, для величины $p \approx 2.23$ имеем в (6) $Re_{th} \approx 1982$, а при значении $p \approx 3.86$ уже получаем $Re_{th} \approx 84634$. В увеличенном виде фрагменты нейтральной кривой,

соответствующей условию (6) (см. рис. 1*а*), представлены на рис. 1*б* в виде зависимости величины $1/2p$ от Re . Они нанесены на взятый из статьи [31] рисунок (см. рис. 12 в [31]), на котором изображены теоретические (Линя и Шлихтинга) нейтральные кривые и соответствующие экспериментальные данные, относящиеся к определению порога возникновения неустойчивости в пограничном слое. Очевидное соответствие результатов, следующее из рис. 1*б*, позволяет сделать вывод и о сходстве механизмов линейной диссипативной неустойчивости, реализуемых как для течения XII (при выполнении условия (6) или (A.3)), так и при возбуждении волн ТШ в пограничном слое.

2. Условно-периодическая по z структура начального поля возмущений V_φ в представлении решения уравнения (1) в виде (2)–(5) находится в соответствии с наблюдаемыми [29] волновыми изменениями тангенциальной компоненты поля скорости возмущений вдоль оси трубы. Это особенно наглядно именно вблизи порога затухания турбулентности при $Re \approx 1750$, когда на рис. 5*д* в [29] можно выявить пары характерных периодов продольной изменчивости, соотношения которых близки к величинам $p \approx 8/5 = 1.6$ и $p \approx 13/8 = 1.625$, мало отличающимся от величины «золотого» отношения периодов $p_g = 1.618\dots$

3. На рис. 2*а* (за основу взят рис. 4 из [30]) приведена зависимость от Re постоянной скорости

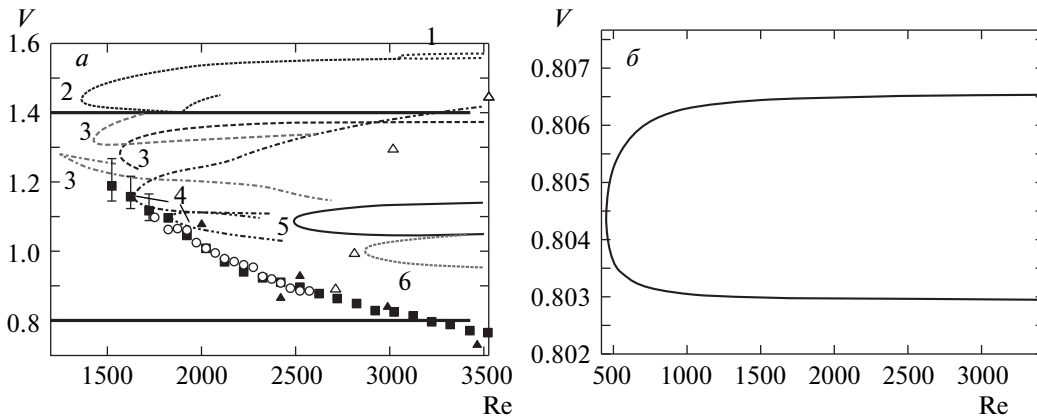


Рис. 2. *а*) Результаты экспериментов [28] (скорости задней (\blacktriangle) и передней (\triangle) кромок турбулентного пятна) и [30] (\blacksquare и \circ — скорость задней кромки), нормированные фазовые скорости волновых решений, рассчитанных в [8] (числа 1–6 обозначают степень азимутальной симметрии соответствующей бегущей волны), а также результат вычисления фазовой скорости на основе формулы (A.6). Верхняя «прямая» соответствует знаку «плюс» в (A.6), а нижняя — знаку «минус» для $p \approx 1.53$, $\beta = 0.471$, что соответствует абсолютному минимуму $Re_{th} = 448.5$ согласно (A.3). *б*) Увеличенное представление нижней «прямой» с рис. 2*а*: согласно (A.6), верхняя ветвь соответствует знаку плюс в (A.7), а нижняя — знаку минус

заднего фронта турбулентного пятна, наблюдаемого для течения в трубе, а также соответствующие экспериментальные данные [28], нормированные на среднюю скорость потока. При этом приведены данные из работы [28], относящиеся к описанию как скорости заднего фронта турбулентного пятна (черные треугольники), так и скорости переднего фронта (белые треугольники). Там же приведены результаты, следующие из нелинейной теории для ТВ в трубе [8], а также выводы настоящей работы для фазовой скорости $V_\beta = -\lambda_2 V_{max} / 2\pi\beta Re$, нормированной на среднюю скорость течения ХП: $V_{mean} = V_{max} / 2$. Величина фазовой скорости при этом определена в (A.6) из вида λ_2 в (A.2) для нейтральной кривой (т. е. при условии $\lambda_1 = 0$). В настоящей теории получены оценки $V = V_\beta / V_{mean} = 1.4$ и $V = 0.8$ для скоростей переднего (обгоняющего средний поток) и заднего (отстающего от среднего потока) фронтов вихревого возмущения в единицах средней скорости течения ХП. Экспериментальные данные [28, 30] дают соответствующие величины $V = 1.2$ и $V = 0.75$, а численные расчеты на основе нелинейной теории [8] приводят к возможности изменения V от 1.55 до 0.95. В результате выводы настоящей линейной теории приводят к лучшему соответствию с экспериментальными данными по сравнению с выводами нелинейной теории [8], особенно в оценке величины скорости отставания в распространении вихревых возмущений потока от средней скорости основ-

ного потока, которая составляет $0.2V_{mean}$ в настоящей работе, $0.25V_{mean}$ в эксперименте и $0.05V_{mean}$ для нелинейной теории.

Таким образом, проведенное сопоставление предлагаемой теории с данными наблюдений и результатами нелинейной теории указывает на то, что эти данные и выводы настоящей теории линейной неустойчивости течения ХП находятся в удовлетворительном качественном и количественном соответствии друг с другом.

4. ОБСУЖДЕНИЕ УСТАНОВЛЕННОГО МЕХАНИЗМА ДИССИПАТИВНОЙ ЛИНЕЙНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ХП И ВЫВОДЫ

Полученный в настоящей работе новый вывод о возможности доказательства существования линейной неустойчивости для течения ХП основан на анализе системы (3), получаемой из исходного уравнения (1) для эволюции тангенциальных возмущений поля скорости именно при условии, что правая часть уравнения (1) отлична от нуля за счет конечности величины коэффициента кинематической вязкости. В противном случае, когда этот коэффициент равен нулю, из (1) уже в принципе нельзя получить ни эволюционные уравнения для линейно взаимодействующих друг с другом радиальных мод, ни вывод о линейной неустойчивости течения ХП. Это дает осно-

вание для того, чтобы считать механизм выявленной линейной неустойчивости течения ХП диссипативным, а саму неустойчивость рассматривать как диссипативную неустойчивость.

Ранее такой диссипативный механизм гидродинамической неустойчивости рассматривался в работах Прандтля (1921–22) при исследовании устойчивости ламинарного пограничного слоя, а также Гейзенберга (1924) и Линя Цзя-цзяо (1944–45) при установлении линейной неустойчивости плоского течения Пуазейля (см. [23] и приведенные там ссылки). Качественное объяснение физического смысла и возможности появления диссипативной неустойчивости в задачах гидродинамической устойчивости анализируется в работе [18] на основе элементарного учета эффектов запаздывания для примера осциллятора с линейным по скорости трением. Существенное понимание явления диссипативной неустойчивости для течения ХП и других течений вблизи твердой граничной поверхности может также быть получено при рассмотрении метода, аналогичного предложенному Ландау [19] для оценки критической скорости движения сверхтекучей жидкости по капилляру. В работе [19] из условия отрицательности энергии элементарного вихревого возбуждения получена оценка критической скорости сверхтекучего движения, когда при скоростях, превышающих это критическое значение, за счет вязкого взаимодействия потока со стенкой капилляра рождается вихревое возмущение (ротон), разрушающее ламинарное сверхтекучее состояние движения жидкости. Для течения ХП, например, также представляет интерес проведение сходного с проведенным в работах [19–22] рассмотрения для определения условия реализации диссипативной неустойчивости, связанной с пороговым характером возникновения отрицательности энергии рождающегося вихревого возмущения (в подходящей подвижной инерциальной системе координат) при превышении некоторого определяемого при этом критического числа Рейнольдса.

Отметим, однако, что для получения в настоящей работе вывода о линейной неустойчивости течения ХП учет конечной величины вязкости важен только на этапе получения из уравнения (1) системы (3), описывающей эволюцию во времени и вдоль оси трубы для $N > 1$ линейно взаимодействующих радиальных мод возмущений. Уже в системе (3) или в (3'), (3'') вполне может быть рассмотрен предел бесконечно больших величин Re , соответствующий идеальной жидкости с нулевой вязкостью. При этом важно лишь сохранить предлагаемое выше рассмотрение задачи о линейной гидродинами-

ческой устойчивости именно для случая периодических граничных условий, индивидуально определяемых для каждой из двух рассматриваемых (при $N = 2$) радиальных мод возмущений. Соответствующая процедура усреднения в (3'), (3''), как уже отмечалось выше, при этом не должна нивелировать отмеченное различие периодов продольной изменчивости для рассматриваемых радиальных мод. Только в этом случае остается в силе полученный вывод о возможности существования линейной экспоненциальной неустойчивости течения ХП, но при этом вместо двух управляющих параметров (Re и p), определяющих область неустойчивости (в зависимости от волнового числа β), в пределе нулевой вязкости останется только параметр p .

В настоящей работе такой предел нулевой вязкости для системы (3) (и соответственно (3'), (3'')) не рассматривался. Такое исследование на основе линейной системы (3) взаимодействующих радиальных мод при $N = 2$ может представлять интерес в связи с имеющимися работами по моделированию процессов формирования неустойчивости при течении в трубе с использованием представления об идеальных (не вязких) возмущениях, описываемых нелинейно взаимодействующими парами TW с малой, но конечной амплитудой [32–34]. В то же время в настоящей работе показано, что при конечной величине коэффициента кинематической вязкости рассмотрение предела $Re \gg 1$, приводящего к формуле (6) для оценки минимального порогового числа Рейнольдса, дает не очень большое отличие в величине этой оценки (так как при этом получена величина $Re_{th} = 442$) от точной формулы (А.3), где $Re_{th} = 448$.

Отметим, что рассматриваемая двухвихревая волновая структура пространственной изменчивости поля возмущения находится в качественном соответствии с данными лабораторных [35] и численных [36, 37] экспериментов для течения в трубе. Об этом свидетельствует и проведенное в предыдущем разделе сравнение выводов настоящей теории с экспериментальными данными и результатами численного моделирования развития неустойчивости для течения в трубе. При этом в работе [36], например, получены также оценки величины фазовой скорости турбулентного пятна $V = 0.9$ и $V = 1.1$ (в единицах средней скорости потока в трубе), сходные с представленными выше.

Для получения вывода о возможности линейной неустойчивости течения ХП, как уже отмечалось выше, важную роль играет применение к системе невязок (3'), (3'') такой процедуры усреднения, которая

соответствует предполагаемому различию в периодических граничных условиях для разных радиальных мод. Радиальные моды при этом имеют отличающиеся друг от друга величины периодов продольной изменчивости, что соответствует использованию для них представления (5). При этом, согласно (6), линейная экспоненциальная неустойчивость оказывается возможной не только для почти любых иррациональных величин отношения таких продольных периодов p , но и для рациональных значений p , не совпадающих с $p = p_k = k$ или $p_{1/k} = 1/k$ при целых k ($k = 1, 2, 3, \dots$). Исключение среди всех возможных иррациональных величин p составляют только определенные из (6) иррациональные числа

$$p = p_{\sqrt{k}} = \frac{k + 1 \pm \sqrt{(k + 1)^2 - 4}}{3}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

для которых, наоборот, $\text{Re} t_{th} \rightarrow \infty$ в (6) и линейная неустойчивость течения ХП не может быть реализована.

Приведем пример того, что не при любой процедуре усреднения невязок (3'), (3'') можно получить условие линейной неустойчивости для течения ХП. Так, например, для рациональной величины $p = 3/2$ из выражений (А.3) и (6) следует возможность реализации линейной неустойчивости течения ХП. Этот вывод, однако, не может быть получен, если для (3') и (3'') использовать не описанную выше процедуру усреднения, а провести усреднение обеих невязок по периоду $2/\beta$, который является общим периодом продольной изменчивости для обеих рассматриваемых радиальных мод при $p = 3/2$. Для этого надо провести интегрирование $(\beta/2) \int_0^{2/\beta} dx$ каждого члена в левых частях уравнений (3') и (3'') без их умножения на какой-либо множитель. При таком усреднении левые части уравнений (3') и (3'') уже тождественно обращаются в нуль для любых величин показателя λ временной эволюции. Если указанное усреднение провести в (3) (при $N = 2$) до подстановки в (3) представления решения (5) (при $p = 3/2$), то обращаются в нуль оба члена, содержащие производные по x . При этом обе величины амплитуд возмущения, усредненные по периоду $2/\beta$, могут лишь экспоненциально убывать во времени.

Действительно, при указанной процедуре усреднения явно нивелируется предполагаемое различие величин продольных периодов для рассматриваемых двух радиальных мод и не может быть определен порог линейной неустойчивости для течения ХП. С другой стороны, приведенный пример (как и при любой другой рациональной величине p) означает, что, несмотря на полученное в (6) и (А.3) усло-

вие линейной неустойчивости, само пространственное распределение возмущений завихренности может иметь такой характер, что в разных участках вдоль оси трубы имеются области с разными знаками поля вихря, когда интеграл по обеим областям приводит к интегральной нулевой величине поля вихря возмущения. Это нулевое значение интегральной завихренности сохраняется и в ходе экспоненциального возрастания завихренности в каждой из подобластей с одинаковым знаком поля вихря (при реализации линейной неустойчивости течения ХП для надкритических чисел Рейнольдса, определенных в (6) и (А.3)). В то же время для любой иррациональной величины p интегральная завихренность по любому отрезку вдоль оси трубы уже всегда не равна тождественно нулю, что может обеспечивать и ненулевую величину интегральной спиральности для комбинации основного потока и поля возмущения. При p , не равных отмеченным выше величинам $p_{\sqrt{k}}$, такая интегральная завихренность может экспоненциально возрастать во времени при реализации линейной неустойчивости течения ХП для $\text{Re} > \text{Re}_{th}$, где величина порогового числа Re_{th} определена в (6) и (А.3).

Полученные выводы настоящей работы позволяют заполнить известный пробел в нелинейной теории [7, 8], когда вместо линейной экспоненциальной неустойчивости до сих пор приходилось вынужденно рассматривать стадию затравочной алгебраической неустойчивости (где малые начальные возмущения могут только локально во времени возрастать, стремясь к нулю при $t \rightarrow \infty$).

Отметим также, что имеет смысл провести переосмотр и упомянутых проблем в задачах о линейной устойчивости для плоского течения Куэтта и плоского течения Пуазейля на основе учета полученного в настоящей работе вывода о возможности линейной экспоненциальной неустойчивости для течения ХП за счет рассмотрения отличных от «нормальных» продольно-квазипериодических возмущений. При этом важна не сама по себе продольная квазипериодичность возмущений, а формирование ее именно за счет различия продольных периодов у разных базисных (в данном случае — радиальных) мод, формируемых только при ненулевой вязкости жидкости.

Благодарим С. И. Анисимова, Г. С. Голицына, Е. А. Новикова и Н. А. Иногамова за полезные замечания и интерес к работе.

Таблица. Значения Re_{th} и β_0 , полученные по формулам (А.3) и (6) для величин p , соответствующих локальным минимумам Re_{th} в приближенной формуле (6)

p	β_0 из (А.3)	Re_{th} из (А.3)	β_0 из (А.5)	Re_{th} из (6)
1.527	0.471	448.455	0.463	442.278
0.674	1.124	680.307	1.101	678.482
0.447	1.368	1095.455	1.358	1093.824
2.239	1.100	1983.171	1.099	1981.838
2.791	0.220	13095.398	0.219	13095.285
0.359	1.114	23816.499	1.114	23816.488

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Из (3') и (3'') в галеркинском приближении (при представлении (5) для зависимости возмущения от продольной координаты, когда в общем случае $\alpha \neq \beta$ в (5)) для $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ получаем

$$\lambda_1 = -\gamma_{1,1}^2 - 4\pi^2\beta^2 p^2 - \frac{1}{2} \left(a_1 \pm \sqrt{\frac{D_1}{2}} \right), \quad (A.1)$$

$$\lambda_2 = -2\pi p\beta P_{11} Re - \frac{1}{2} \left(a_2 \pm \sqrt{\frac{D_2}{2}} \right), \quad (A.2)$$

где

$$D_1 = \sqrt{d_0} + l, \quad D_2 = \sqrt{d_0} - l, \quad l = a_1^2 - a_2^2 + 4c_1 Re_1^2,$$

$$a_1 = \gamma_{1,2}^2 - \gamma_{1,1}^2 + 4\pi^2\beta^2(1 - p^2),$$

$$a_2 = 2\pi\beta Re(P_{22} - pP_{11}),$$

$$Re_1^2 = \frac{Re^2 P_{21}P_{12}p^2\beta^2}{(1 - p)^2}, \quad d_0 = l^2 + 4(a_1a_2 - 2Re_1^2 d_1)^2,$$

$$d_1 = -4S,$$

$$c_1 = -4S \operatorname{ctg} \left[\pi \left(p + \frac{1}{2} \right) \right],$$

а величина S определена в (6).

Условие $\lambda_1 > 0$ приводит к неравенству

$$(a Re + b)^2 > c + \frac{d}{Re^2}, \quad (A.3)$$

где

$$a = \frac{4P_{21}P_{12}p^2\beta^2 S}{(1 - p)^2}, \quad b = \pi\beta(P_{22} - pP_{11})a_1,$$

$$d = a_3^2(\gamma_{1,1}^2 + 4\pi^2\beta^2 p^2)(\gamma_{1,2}^2 + 4\pi^2\beta^2),$$

$$a_3 = \gamma_{1,2}^2 + \gamma_{1,1}^2 + 4\pi^2\beta^2(1 + p^2),$$

$$c = a_3^2\beta^2 \times$$

$$\times \left\{ \pi^2(P_{22} - pP_{11})^2 - 4 \frac{P_{12}P_{21}p^2 S \operatorname{ctg}[\pi(p + 1/p)]}{(1 - p)^2} \right\}.$$

2. В пределе $Re \gg 1$ неравенство (А.3) при $c > 0$ сводится к неравенству

$$Re > Re_{th}(\beta, p) = \frac{\sqrt{c} - bS/|S|}{a}. \quad (A.4)$$

В (А.4) функция $Re_{th}(\beta)$ имеет минимальное значение (приведенное в (6)) при

$$\beta = \beta_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{A(\gamma_{1,2}^2 + \gamma_{1,1}^2) + B(\gamma_{1,2}^2 - \gamma_{1,1}^2)}{A(1 + p^2) + B(1 - p^2)}}, \quad (A.5)$$

где A и B определены в основном тексте (см. (6)) при $A^2 \geq 0$. Вычисленные значения Re_{th} и β приведены в таблице.

3. На нейтральной кривой с $\lambda_1 = 0$ (т. е. при выполнении равенства $Re = Re_{th}(\beta, p)$ в (А.4)) нормированная фазовая скорость V_β/V_{mean} имеет вид

$$V = pP_{11} + P_{22} \pm \left(\frac{\sqrt{D_2}}{2\sqrt{2}\pi\beta Re} \right)_{\beta=\beta_{1,2}}, \quad (A.6)$$

где $\beta = \beta_{1,2}(Re, p)$ соответствует замене (А.4) на равенство. При замене (А.4) на равенство получается квадратное уравнение относительно β . Его решение

$$\beta = \beta_{1,2} = \frac{Re \pm \sqrt{Re^2 - Re_{th}^2}}{2\pi^2\delta_1} \quad (A.7)$$

при $Re \geq Re_{th}$, где Re_{th} из (6). При $Re = Re_{th}$ имеем $\beta_{1,2} = \beta_0$. В (А.7)

$$\delta_1 = \pi \left[(p^2 + 1)\sqrt{1 - 4S\delta} - (1 - p^2) \frac{Sb_1}{|Sb_1|} \right] \times \frac{|b_1|(1 - p)^2}{|S|p^2 P_{12}P_{21}},$$

$$b_1 = P_{22} - pP_{11},$$

$$\delta = \frac{p^2 P_{21} P_{12}}{(1-p)^2 \pi^2 b_1^2} \operatorname{ctg} \left[\pi \left(p + \frac{1}{p} \right) \right].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. O. Reynolds, Proc. Roy. Soc. London **35**, 84 (1883).
2. Д. Джозеф, *Устойчивость движений жидкости*, Мир, Москва (1981).
3. P. G. Drazin and N. H. Reid, *Hydrodynamic Stability*, Cambridge Univ. Press, Cambridge UK (1981).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (2006).
5. S. Grossman, Rev. Mod. Phys. **72**, 603 (2000).
6. R. Fitzegerald, Phys. Today **57**, 21 (2004).
7. H. Faisst and B. Eckhardt, Phys. Rev. Lett. **91**, 224502 (2003).
8. H. Wedin and R. Kerswell, J. Fluid Mech. **508**, 333 (2004).
9. T. M. Schneider, B. Eckhardt, and J. A. Yorke, Phys. Rev. Lett. **99**, 034502 (2007).
10. J. D. Skufca, J. A. Yorke, and B. Eckhardt, Phys. Rev. Lett. **96**, 174101 (2006).
11. W. Pfenniger, Boundary Layer and Flow Control **2**, 970 (1961).
12. J. A. Fox, M. Lessen, and W. V. Bhat, Phys. Fluids **11**, 1 (1968).
13. А. С. Монин, УФН **150**, 61 (1986).
14. R. R. Kerswell and A. Davey, J. Fluid Mech. **316**, 307 (1996).
15. D. R. Barnes and R. R. Kerswell, J. Fluid Mech. **417**, 103 (2000).
16. P. A. Mackrodt, J. Fluid Mech. **73**, 153 (1976).
17. J. P. Matas, J. F. Morris, and E. Guazzli, Phys. Rev. Lett. **90**, 014501 (2003).
18. Г. З. Гершуни, Соросовский образовательный ж. Физика № 2, 99 (1997).
19. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **11**, 592 (1941).
20. С. Г. Чефранов, Письма в ЖЭТФ **73**, 312 (2001).
21. С. Г. Чефранов, ЖЭТФ **126**, 333 (2004).
22. S. G. Chefranov, Phys. Rev. Lett. **93**, 254801 (2004).
23. А. С. Монин, А. М. Яглом, *Статистическая гидромеханика*, т. 1, *Теория турбулентности*, Гидрометеоиздат, Санкт-Петербург (1992).
24. B. J. Cantwell, Ann. Rev. Fluid Mech. **13**, 457 (1981).
25. Ю. С. Качанов, В. В. Козлов, В. Я. Левченко, *Возникновение турбулентности в пограничном слое*, Новосибирск (1982).
26. R. J. Leite, J. Fluid Mech. **5**, 81 (1959).
27. S. J. Davies and C. M. White, Proc. Roy. Soc. London A **69**, 92 (1928).
28. I. J. Wygnanski and F. H. Champagne, J. Fluid Mech. **59**, 281 (1973).
29. J. Peixinho and T. Mullin, Phys. Rev. Lett. **96**, 094501 (2006).
30. B. Hof, C. W. H. van Doorne, J. Westerweel, and F. T. M. Neiwstadt, Phys. Rev. Lett. **95**, 214502 (2005).
31. G. B. Schubauer and H. K. Skramstad, *Laminar Boundary Layer Oscillation and Stability of Laminar Flow*, NACA Rep. No. 909 (1948).
32. F. T. Smith and R. J. Bodonyi, Proc. Roy. Soc. London A **384**, 463 (1982).
33. F. T. Smith, D. J. Doorly, and A. P. Rothmayer, Proc. Roy. Soc. London A **428**, 255 (1990).
34. A. G. Walton, Proc. Roy. Soc. London A **461**, 813 (2005).
35. I. J. Wygnanski and F. H. Champagne, J. Fluid Mech. **59**, 281 (1973).
36. A. P. Willis and R. R. Kerswell, Phys. Rev. Lett. **100**, 124501 (2008).
37. A. P. Willis and R. R. Kerswell, J. Fluid Mech. **619**, 213 (2009).