

ЭЛАСТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ В НЕУПОРЯДОЧЕННОЙ ОДНОРОДНОЙ НЕПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ ПРИ ЦЕНТРОСИММЕТРИЧНЫХ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

*А. Ф. Кабыченков, Ф. В. Лисовский**

*Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова Российской академии наук
141190, Фрязино, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 18 апреля 2014 г.

В рамках вариационного подхода получена система нелинейных уравнений для анализа эластоэлектрических эффектов в неупорядоченной однородной непроводящей среде. Результаты анализа применены к случаю сферической оболочки, подвергаемой центросимметричному гидростатическому давлению извне и изнутри.

DOI: 10.7868/S0044451014090223

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] методом варьирования термодинамического потенциала неупорядоченной однородной непроводящей среды с пространственной дисперсией была получена система нелинейных уравнений для определения напряженностей электрического и магнитного полей и упругих деформаций в основном состоянии, а также для анализа возможности существования различных эластомагнитоэлектрических эффектов в присутствии внешних или внутренних воздействий. В работе [1] были рассмотрены примеры индуцирования электрических полей распределенными объемными (гравитационными или центробежными) силами. В настоящей работе вариационный подход использован для анализа эластоэлектрических эффектов, возникающих в неупорядоченной однородной непроводящей среде в присутствии распределенных поверхностных сил, на примере сферической оболочки, подвергаемой центросимметричному гидростатическому давлению извне и изнутри. В таких условиях в зависимости от соотношения между внутренним и внешним давлением происходит сжатие или растяжение оболочки, сопровождаемое возникновением неоднородных деформаций, которые создают внутреннее электрическое поле.

Рассматриваемый здесь эластоэлектрический эффект при прочих равных условиях должен проявляться гораздо сильнее, чем классический флексоэлектрический эффект [3–5], поскольку при растяжении или сжатии оболочек деформации линейно зависят от упругих смещений, а при изгибе пластин — квадратично [6].

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛАСТОЭЛЕКТРОСТАТИКИ

В отсутствие внешнего магнитного поля и объемных сил состояние электрической и упругой подсистем однородной непроводящей среды в статическом случае определяется следующими уравнениями [7, 8]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \\ \operatorname{div} \hat{\sigma}^* &= 0, \quad \operatorname{Ink} \hat{u}^* = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \hat{u}^* = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ — электрическая индукция, \mathbf{E} — напряженность электрического поля, \mathbf{P} — электрическая поляризация, $\hat{\sigma}$ — тензор упругих напряжений, \hat{u} — тензор упругих деформаций с компонентами

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_i} \right),$$

\mathbf{R} — вектор упругих смещений, а $\operatorname{Ink} = \operatorname{rot} \operatorname{rot}^*$ — дифференциальный оператор, характеризующий степень несовместности тензорного поля деформаций [8, 9]. Для сред конечного размера на

*E-mail: lisf@rambler.ru

поверхности с нормалью \mathbf{n} должны выполняться стандартные граничные условия, которые для электрической подсистемы заключаются в непрерывности нормальной компоненты \mathbf{D} и тангенциальной компоненты \mathbf{E} , а для упругой подсистемы имеют вид $\hat{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{p}$, где \mathbf{p} — поверхностная плотность внешних сил. Следуя [1], представим полный термодинамический потенциал системы в виде

$$W = \int w dv = \int (w_0 + w_e + w_u + w_{ue}) dv, \quad (2)$$

где w — плотность термодинамического потенциала, $w_0 = w_0(T)$ — плотность потенциала в отсутствие электрического поля и деформаций, T — температура, w_e и w_u описывают соответственно вклады электрической и упругой подсистем, а w_{ue} — вклад, возникающий из-за взаимодействия между этими подсистемами. С точностью до членов не выше четвертой степени по напряженности электрического поля и упругим деформациям и второй степени по их производным с учетом системы уравнений (1) эти слагаемые в правой части (2) могут быть представлены в следующем виде:

$$w_e = \frac{1}{2} \left[a_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} a_1 \mathbf{E}^4 + a_2 \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_i} \right)^2 \right] + a_3 \mathbf{E}^2 \operatorname{div} \mathbf{E}, \quad (3)$$

$$w_u = \frac{1}{2} \lambda u_{ii}^2 + \eta u_{ij}^2, \quad (4)$$

$$w_{ue} = \frac{1}{2} \lambda^{(e)} u_{ii} \mathbf{E}^2 + \eta^{(e)} u_{ij} E_i E_j + \lambda^{(en)} u_{ii} \operatorname{div} \mathbf{E} + \eta^{(en)} u_{ij} \frac{\partial E_i}{\partial x_j}, \quad (5)$$

где a_i — феноменологические коэффициенты, λ и η — коэффициенты Ламе для изолированной упругой подсистемы, $\lambda^{(e)}$, $\eta^{(e)}$ и $\lambda^{(en)}$, $\eta^{(en)}$ — коэффициенты Ламе для упругой подсистемы с учетом соответственно однородного и неоднородного эластоэлектрических взаимодействий. В общем случае все коэффициенты зависят от температуры.

Согласно [1], нахождение экстремумов функционала W при постоянных граничных условиях на поверхности среды с использованием вариационных производных

$$\mathbf{D} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{E}} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{E} / \partial x_i}, \quad (6)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial u_{ij}} - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial w}{\partial u_{ij} / \partial x_k}$$

позволяет получить следующие выражения для электрической индукции и упругих напряжений:

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j - a_2 \Delta E_i - \eta^{(en)} \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_j} + D_i^{(g)}, \quad (7)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{kk} + 2\eta u_{ij} + \sigma_{ij}^{(e)} + \sigma_{ij}^{(en)}. \quad (8)$$

Здесь $\varepsilon_{ij} = \varepsilon \delta_{ij} + 2\eta^{(e)} u_{ij}$ — компоненты тензора нелинейной диэлектрической проницаемости,

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + a_1 \mathbf{E}^2 + 2a_3 \operatorname{div} \mathbf{E} + \lambda^{(e)} u_{ii}$$

— изотропное слагаемое, $\varepsilon_0 = a_0$ — линейная диэлектрическая проницаемость,

$$\mathbf{D}^{(g)} = -a_3 \operatorname{grad} \mathbf{E}^2 - \lambda^{(en)} \operatorname{grad} u_{ii}$$

— градиентная составляющая электрической индукции,

$$\sigma_{ij}^{(e)} = (1/2) \delta_{ij} \lambda^{(e)} \mathbf{E}^2 + \eta^{(e)} E_i E_j$$

— напряжения, связанные с электрическим полем,

$$\sigma_{ij}^{(en)} = \delta_{ij} \lambda^{(en)} \operatorname{div} \mathbf{E} + \eta^{(en)} \frac{\partial E_i}{\partial x_j}$$

— напряжения, связанные с неоднородностью электрического поля. При учете координатной зависимости коэффициентов при слагаемых с производными в (3), (5) в выражениях для электрической индукции и напряжений появляются дополнительные градиентные члены. Подставляя выражения (7) и (8) в (1), получаем следующую систему нелинейных уравнений для определения \mathbf{E} и \mathbf{R} :

$$\operatorname{div} \left[\varepsilon \mathbf{E} - a_2 \Delta \mathbf{E} + 2\eta^{(e)} u_{ij} E_j \mathbf{e}_i + \mathbf{D}^{(g)} - \frac{1}{2} \eta^{(en)} (\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{R} + \Delta \mathbf{R}) \right] = 0, \quad (9)$$

$$(\lambda + \eta) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{R} + \eta \Delta \mathbf{R} + \eta^{(e)} \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} + \operatorname{grad} \sigma^{(ee)} = 0,$$

где \mathbf{e}_i — базисные векторы, а

$$\sigma^{(ee)} = \frac{1}{2} \left[(\lambda^{(e)} + \eta^{(e)}) \mathbf{E}^2 + (\lambda^{(en)} + \eta^{(en)}) \operatorname{div} \mathbf{E} \right].$$

При слабой температурной зависимости коэффициентов наличие градиента температуры T в среде можно учесть, добавив в правую часть второго уравнения системы (9) слагаемое $-\alpha_v \operatorname{grad} T$, где α_v — коэффициент объемного теплового расширения [8].

3. ЭЛАСТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ В СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Рассмотрим однородную непроводящую сферическую оболочку с внутренним радиусом r_1 и внешним радиусом r_2 , подвергаемую изнутри гидростатическому давлению p_1 и извне — гидростатическому давлению p_2 . По соображениям симметрии электрическое поле вне оболочки отсутствует, а векторы \mathbf{E} , \mathbf{D} и \mathbf{R} в оболочке имеют только радиальные компоненты, т. е. $\mathbf{E} = E_r \mathbf{e}_r$, $\mathbf{D} = D_r \mathbf{e}_r$ и $\mathbf{R} = R_r \mathbf{e}_r$, поэтому $\text{rot } \mathbf{R} = 0$ и $\Delta \mathbf{R} = \text{grad div } \mathbf{R}$. С учетом последнего соотношения система уравнений (9) сводится к виду

$$\begin{aligned} \text{div}(\varepsilon \mathbf{E} - a_2 \Delta \mathbf{E} + 2\eta^{(e)} u_{ij} E_j \mathbf{e}_i - a_3 \text{grad } \mathbf{E}^2 - \\ - \gamma_0 \gamma^{(en)} \text{grad div } \mathbf{R}) = 0, \\ \text{grad div } \mathbf{R} + \text{grad} \left(\gamma^{(e)} \mathbf{E}^2 + \gamma^{(en)} \text{div } \mathbf{E} \right) + \\ + \eta_0^{(e)} \mathbf{E} \text{div } \mathbf{E} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_0 = \lambda + 2\eta, \quad \gamma^{(en)} = \frac{\lambda^{(en)} + \eta^{(en)}}{\gamma_0}, \\ \gamma^{(e)} = \frac{\lambda^{(e)} + \eta^{(e)}}{2\gamma_0}, \quad \eta_0^{(e)} = \frac{\eta^{(e)}}{\gamma_0}. \end{aligned}$$

Подставляя из второго уравнения системы (10) выражение для $\text{grad div } \mathbf{R}$ в первое уравнение и учитывая соотношение $\text{grad div } \mathbf{E} = \Delta \mathbf{E}$, находим, что

$$\begin{aligned} \text{div}(\varepsilon_\gamma \mathbf{E} + 2\eta^{(e)} u_{ij} E_j \mathbf{e}_i - \\ - a_2 \gamma \Delta \mathbf{E} - a_3 \gamma \text{grad } \mathbf{E}^2) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} a_3 \eta = (2a_3 + \gamma^{(en)} \eta^{(e)}), \quad a_2 \gamma = a_2 - (\gamma^{(en)})^2 \gamma_0, \\ a_3 \gamma = a_3 - \gamma^{(en)} \gamma^{(e)} \gamma_0, \quad \varepsilon_\gamma = \varepsilon + \gamma^{(en)} \eta^{(e)} \text{div } \mathbf{E}. \end{aligned}$$

В сферической системе координат с учетом граничных условий для электрической индукции уравнение (11) сводится к виду

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial^2 E_r}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial E_r}{\partial r} - (2 + \varepsilon_{ua} r^2) E_r + \\ + a_3 \gamma a r^2 \frac{\partial E_r^2}{\partial r} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\varepsilon_{ua} = \frac{\varepsilon_u}{a_2 \gamma},$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_u = \varepsilon_0 + a_1 E_r^2 + a_{a_3 \eta} \frac{\partial (r^2 E_r)}{r^2 \partial r} + 2\lambda^{(e)} \frac{R_r}{r} + \\ + (\lambda^{(e)} + 2\eta^{(e)}) u_{rr}, \end{aligned}$$

$$a_3 \gamma a = \frac{a_3 \gamma}{a_2 \gamma}.$$

Граничные условия для напряженности электрического поля $E_r(r)$ на внутренней и внешней поверхностях оболочки имеют вид

$$\begin{aligned} E_r(r_2) = 4\pi q_2 = \frac{Q}{r_2^2}, \\ E_r(r_1) = -4\pi q_1 = -\frac{Q}{r_1^2}, \end{aligned} \quad (13)$$

где q_1 и q_2 — плотности связанных зарядов на поверхностях, Q — полный связанный поверхностный заряд.

Из второго уравнения системы (10) следует, что для радиальных смещений в сферической системе координат

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^{-2} \frac{\partial [r^2 (R_r + \gamma^{(en)} E_r)]}{\partial r} \right\} + \\ + \frac{1}{2} \gamma^{(e)} \frac{\partial E_r^2}{\partial r} + \eta_0^{(en)} \frac{\partial (r^2 E_r)}{r^2 \partial r} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Граничные условия для нормальных упругих напряжений $\sigma_{rr}(r)$ на внутренней и внешней поверхностях оболочки имеют вид

$$\sigma_{rr}(r_2) = -p_2, \quad \sigma_{rr}(r_1) = -p_1. \quad (15)$$

В линейном приближении уравнение (12) сводится к уравнению Бесселя, которое при $a_2 \gamma > 0$ имеет решение [10, 11]

$$E_r = r^{-1/2} [C'_1 I_{3/2}(\xi) + C'_2 K_{(3/2)}(\xi)], \quad (16)$$

где C'_1 и C'_2 — константы,

$$I_{3/2} = \left(\frac{2}{\pi \xi} \right)^{1/2} (-\xi^{-1} \text{sh } \xi + \text{ch } \xi)$$

— функция Инфельда,

$$K_{3/2} = (2/\pi \xi)^{1/2} (1 + \xi^{-1}) \exp(-\xi)$$

— функция Макдональда, $\xi = (\varepsilon_{0a})^{1/2} r$ — нормированная координата, $\varepsilon_{0a} = \varepsilon_0/a_2 \gamma$. Определяя константы C'_1 и C'_2 из граничных условий (13), находим нормированную напряженность электрического поля в оболочке:

$$\frac{E_r}{E_0} = \xi^{-2} [c'_1 (\text{sh } \xi - \xi \text{ch } \xi) - c'_2 (\xi + 1) \exp(-\xi)], \quad (17)$$

где $E_0 = \varepsilon_{0a} Q$ — имеющая размерность напряженности электрического поля константа, определяемая поверхностными зарядами,

$$c'_1 = \frac{1}{d'_0} [(\xi_2 + 1) \exp(-\xi_2) + (\xi_1 + 1) \exp(-\xi_1)],$$

$$c'_2 = \frac{1}{d''_0} (\xi_2 \operatorname{ch} \xi_2 - \operatorname{sh} \xi_2 + \xi_1 \operatorname{ch} \xi_1 - \operatorname{sh} \xi_1),$$

$$d'_0 = (1 - \xi_2 \xi_1) \operatorname{sh} (\xi_2 - \xi_1) - (\xi_2 - \xi_1) \operatorname{ch} (\xi_2 - \xi_1).$$

В толстой оболочке, т. е. при $\xi_2 \gg \xi_1$ и $\xi_2 \gg 1$, напряженность поля равна

$$\frac{E_r}{E_0} = \xi^{-2} \left[\frac{\xi - 1}{\xi_2 - 1} \exp (\xi - \xi_2) + \frac{\xi + 1}{\xi_1 + 1} \exp (\xi_1 - \xi) \right].$$

При $a_{2\gamma} < 0$ решение линеаризованного уравнения (12) можно записать в виде [10, 11]

$$E_r = r^{-1/2} [C''_1 J_{3/2} (\xi) + C''_2 N_{3/2} (\xi)], \quad (18)$$

где C''_1 и C''_2 — константы,

$$J_{3/2} = (2/\pi\xi)^{1/2} (-\xi^{-1} \sin \xi - \cos \xi)$$

— функция Бесселя,

$$N_{3/2} = (2/\pi\xi)^{1/2} (-\xi^{-1} \cos \xi - \sin \xi)$$

— функция Неймана, $\xi = (-\varepsilon_{0a})^{1/2} r$ — нормированная координата. С учетом граничных условий (13)

$$\frac{E_r}{E_0} = \xi^{-2} [c''_1 (\sin \xi - \xi \cos \xi) - c''_2 (\cos \xi + \xi \sin \xi)], \quad (19)$$

где

$$c''_1 = \frac{1}{d''_0} (\cos \xi_2 + \xi_2 \sin \xi_2 + \cos \xi_1 + \xi_1 \sin \xi_1),$$

$$c''_2 = \frac{1}{d''_0} (\sin \xi_2 - \xi_2 \cos \xi_2 + \sin \xi_1 - \xi_1 \cos \xi_1),$$

$$d''_0 = (1 + \xi_2 \xi_1) \sin (\xi_2 - \xi_1) - (\xi_2 - \xi_1) \cos (\xi_2 - \xi_1),$$

$E_0 = (-\varepsilon_{0a} Q)$. В случае тонкой оболочки, т. е. при $(\xi_2 - \xi_1) \ll 1$, напряженность поля

$$\frac{E_r}{E_0} = -\xi^{-2} \frac{\xi \xi_1 (\xi - \xi_1) + \xi \xi_2 (\xi - \xi_2)}{\xi_2 \xi_1 (\xi_2 - \xi_1)}.$$

С ростом внешнего радиуса напряженность поля уменьшается и принимает нулевое значение при стремлении радиуса к бесконечности.

В линейном приближении из (14) следует, что радиальные смещения и радиальные и тангенциальные деформации описываются выражениями

$$\begin{aligned} R_r &= -\gamma^{(en)} E_r + c_0 r + \frac{c'_0}{r^2}, \\ u_{rr} &= -\gamma^{(en)} \frac{\partial E_r}{\partial r} + c_0 - 2 \frac{c'_0}{r^3}, \\ u_{\theta\theta} &= u_{\varphi\varphi} = -\gamma^{(en)} \frac{E_r}{r} + c_0 + \frac{c'_0}{r^3}, \end{aligned} \quad (20)$$

где c_0 и c'_0 — константы. Радиальные напряжения при этом составляют

$$\sigma_{rr} = \gamma_0 R_{rr} + 2\lambda \frac{R_r}{r} + \sigma_E, \quad (21)$$

где

$$\sigma_E = 2\lambda^{(ei)} \frac{E_r}{r} + \gamma^{(en)} \gamma_0 \frac{\partial E_r}{\partial r}$$

— обусловленные электрическим полем напряжения.

Граничные условия (15) для нормальных упругих напряжений $\sigma_{rr}(r)$ на внутренней и внешней поверхностях оболочки позволяют получить явные выражения для констант c_0 и c'_0 . Первую из констант можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$c_0 = c_{0p} + E_0/E_u, \quad (22)$$

где слагаемое

$$c_{0p} = \frac{p_1 - p_2 r \xi_{21}^3}{3K (\xi_{21}^3 - 1)}$$

определяет однородные деформации, вызванные давлением, $\xi_{21} = \xi_2/\xi_1$ — отношение радиусов, $K = \lambda + (2/3)\eta > 0$ — модуль всестороннего сжатия. В правой части (22) во втором слагаемом, определяющим вызванные поверхностными зарядами деформации,

$$E_u = -E_{u0} (1 + 3g_u) g_{\xi_1},$$

где $E_{u0} = \eta/2 s_{00} g_{1u}$ — характерная напряженность электрического поля,

$$s_{00} = \lambda^{(en)} \varepsilon_{0a}^{1/2}, \quad g_{1u} = \frac{1 - g_1}{1 + g_u},$$

$$g_1 = g_2 g_u, \quad g_u = \frac{\lambda}{2\eta}, \quad g_2 = \frac{\eta^{(en)}}{\lambda^{(en)}}$$

— отношения материальных констант, $g_{\xi_1} = \xi_1^3 (\xi_{21}^3 - 1)$ — функция нормированных радиусов.

Для второй константы имеем

$$c'_0 = c'_{0p} + E_0/E'_u |\varepsilon_{0a}|^{3/2}. \quad (23)$$

Здесь первое и второе слагаемые определяют неоднородные деформации, обусловленные соответственно разностью давлений и поверхностными зарядами,

$$c'_{0p} = \frac{(p_1 - p_2) \xi_2^3}{4\eta (\xi_{21}^3 - 1) |\varepsilon_{0a}|^{3/2}},$$

$$E'_u = -\frac{4E_{u0}}{g_{\xi_2}}, \quad g_{\xi_2} = \frac{\xi_{21}^3 + 1}{\xi_{21}^3 - 1}.$$

В отсутствие неоднородной эластоэлектрической связи выражения для констант c_0 и c'_0 в (22) и (23) переходят в известные выражения из классической теории упругости [6, 9].

Величину поверхностных зарядов можно определить из минимума полного термодинамического потенциала W , определяемого выражением (2). Как следует из формул (3)–(5), плотность термодинамического потенциала в линейном приближении равна

$$w = \frac{1}{2} \left[\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + a_2 \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r_j} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \lambda u_{ii}^2 + \eta u_{ij}^2 + \lambda^{(en)} u_{ii} \operatorname{div} \mathbf{E} + \eta^{(en)} u_{ij} \frac{\partial E_i}{\partial r_j}. \quad (24)$$

Проиллюстрируем процедуру минимизации для положительной константы $a_{2\gamma}$ (расчеты для случая $a_{2\gamma} < 0$ выполняются аналогичным образом). Используя (20), приводим выражение (24) к виду

$$w = \left(\frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\gamma_1^{(en)}}{\xi^2} \right) E_r^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{\partial E_r}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\gamma_2^{(en)}}{2\xi} \frac{\partial E_r^2}{\partial \xi} + \frac{2E_r}{\xi} \left(c_{0k} - \frac{c'_{0\gamma}}{\xi^3} \right) + \left(c_{0\lambda} - \frac{c'_{0\eta}}{\xi^3} \right) \frac{\partial E_r}{\partial \xi} + c_{00} + \frac{c'_{01}}{\xi^6}, \quad (25)$$

где $\gamma_1^{(en)} = 2\gamma_{\eta a} + \gamma_2^{(en)}$ и $\gamma_2^{(en)} = 4\gamma_{\eta a} (g_u - 2g_{u2})$ — коэффициенты при слагаемых, определяющих соответственно наведенную и перенормированную упругой подсистемой неоднородную составляющую энергии электрической подсистемы, $\gamma_{\eta a} = (\gamma^{(en)})^2 \eta \varepsilon_{0a}$ — отношение квадратов характерных масштабов эластоэлектрической и электрической неоднородностей,

$$g_{u2} = \frac{1 + g_u}{1 + g_2}, \quad g = \frac{1}{2} g_2 (1 + 3g_u),$$

$$g_0 = \frac{1 - g}{1 + g_u}, \quad g_{2u} = \frac{1}{g_{u2}}$$

— отношения материальных констант, $c_{0k} = c_{0k1} + c_{0k2} E_0$, $c_{0k1} = E_{00} c_{0p}$, $c_{0k2} = E_{00} / E_u$, $E_{00} = 2s_{00} g_0$, $c'_{0\gamma} = c'_{0\gamma 1} + c'_{0\gamma 2} E_0$, $c'_{0\gamma 1} = E'_{00} \varepsilon_{0a}^{3/2} c_{0p}$, $c'_{0\gamma 2} = E'_{00} / E'_u$, $E'_{00} = s_{00} g_{2u}$, $c_{0\lambda} = c_{0\lambda 1} + c_{0\lambda 2} E_0$, $c_{0\lambda 1} = E_{01} c_{0p}$, $c_{0\lambda 2} = E_{01} / E_u$, $E_{01} = 2s_{00} g_{1u}$, $c'_{0\eta} = c'_{0\eta 1} + c'_{0\eta 2} E_0$, $c'_{0\eta 1} = -E_{01} \varepsilon_{0a}^{3/2} c_{0p}$, $c'_{0\eta 2} = -E_{01} / E'_u$ — коэффициенты, определяющие энергию взаимодействия электрической и упругой подсистем,

$$c_{00} = \eta (3 + 5g_u) c_0^2, \quad c'_{01} = 4\eta \varepsilon_{0a}^3 (c'_0)^2$$

— слагаемые, определяющие перенормированную электрической подсистемой энергию упругой подсистемы.

Подставляя выражение (17) для E_r в (25) и интегрируя полученный результат по объему оболочки, находим, что полный термодинамический потенциал можно представить в виде

$$W = 4\pi \varepsilon_{0a}^{-3/2} (W_0 + W_1 E_0 + W_2 E_0^2), \quad (26)$$

где W_0 — не связанная с зарядом часть потенциала.

Коэффициент при втором слагаемом в круглых скобках выражения (26) можно записать следующим образом:

$$W_1 = -E_{02} \left(W_{11} c_{0p} + W_{12} \varepsilon_{0a}^{3/2} c'_{0p} \right),$$

где $E_{02} = 2s_{00} g_2$,

$$W_{11} = (I_1 - g_{10} \xi^2 s + g_{11} \xi^3) \Big|_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2},$$

$$W_{12} = (I_2 - g_{10} \xi^{-1} s - g_{21} \xi^{-3}) \Big|_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2},$$

$$g_{10} = g_{1u} / g_2, \quad g_{11} = 2(3 + 5g_u) g_{10} / 3(1 + 3g_u) g_{\xi 1},$$

$$I_1 = c'_{11} I_{1+} - (c'_{11} + c'_2) I_{1-},$$

$$I_{1\pm} = e^{\pm \xi} - \operatorname{Ei}(\pm \xi),$$

$$\operatorname{Ei}(ax) = \ln |x| + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{ax}{k!k}$$

— интегральная показательная функция [12],

$$s = \xi^{-2} [c'_{11} s_+ - (c'_{11} + c'_2) s_-], \quad s_{\pm} = (1 \mp \xi) e^{\pm \xi},$$

$$c'_{11} = \frac{c'_1}{2}, \quad I_2 = c'_{11} I_{2+} - (c'_{11} + c'_2) I_{2-},$$

$$I_{2\pm} = \frac{1}{3} (f_{2\pm} (e^{\pm \xi} / \xi) \mp \operatorname{Ei}(\pm \xi)),$$

$$f_{2\pm} = -\xi^{-2} \pm \xi^{-1} + 1, \quad g_{21} = \frac{2}{3} \frac{g_{10}}{g_{\xi 2}}.$$

Коэффициент при третьем слагаемом в круглых скобках выражения (26) равен

$$c_{0\gamma \eta} W_2 = \left[\frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 I_3 + \gamma_{12}^{(en)} I_4 + \varepsilon_0 I_5 \right) + c_{0k\lambda} I_1 - I_2 + I_0 + I_{00} \right] \Big|_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2},$$

где введены следующие обозначения:

$$I_3 = (c'_{11})^2 I_{3+} + (c'_{11} + c'_2) [2c'_{11} I_{30} - (c'_{11} + c'_2) I_{3-}],$$

$$I_4 = (c'_{11})^2 I_{4+} + (c'_{11} + c'_2) [2c'_{11} I_{40} - (c'_{11} + c'_2) I_{4-}],$$

$$\begin{aligned}
 I_5 &= (c'_{11})^2 I_{5+} + (c'_{11} + c'_2) [2c'_{11} I_{50} - (c'_{11} + c'_2) I_{5-}], \\
 I_0 &= \frac{1}{2} \gamma_2^{(en)} \xi s^2 + c_0 \lambda_2 \xi^2 s - c'_{0\eta 2} \xi^{-1} s, \\
 I_{00} &= \frac{\eta (3 + 5g_u)}{3E_u^2} \xi^3 - \frac{4\eta}{3(E'_u)^2} \xi^{-3}, \\
 I_{30} &= \xi + \xi^{-1}, \quad I_{40} = \frac{1}{3} \xi^{-3} - \xi^{-1}, \quad I_{50} = \frac{4}{3} \xi^{-5} + \xi^{-1}, \\
 \gamma_{12}^{(en)} &= 2\gamma_1^{(en)} - \gamma_2^{(en)}, \quad c_{0k\lambda} = 2(c_{0k2} - c_{0\lambda 2}), \\
 c_{0\gamma\eta} &= 2c'_{0\gamma 2} - c'_{0\eta 2}, \quad I_{3\pm} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \mp \xi^{-1} \right) e^{\pm 2\xi}, \\
 I_{4\pm} &= \frac{1}{3} \left[\frac{e^{\pm 2\xi}}{\xi} (f_{2\pm} \pm \xi^{-1}) \mp 2 \text{Ei}(\pm 2\xi) \right], \\
 I_{5\pm} &= \frac{4}{3} \left\{ \frac{e^{\pm 2\xi}}{\xi} \left[f_{2\pm} - 3 \left(1 \mp \frac{1}{2} \xi \right) \right] \pm 2 \text{Ei}(\pm 2\xi) \right\}.
 \end{aligned}$$

Из условия минимума потенциала (26) находим равновесный связанный поверхностный заряд:

$$Q = Q_0 \left[\frac{s_1 (p_1 - p_2 \xi_{21}^3)}{3K} + \frac{s_2 (p_1 - p_2)}{4\eta} \right], \quad (27)$$

где $Q_0 = 2\lambda^{(en)} \varepsilon_{0a}^{-1/2}$ — характерный связанный заряд, задаваемый материальными константами, $s_{1,2} = W_{11,12}/2W_2 (\xi_{21}^3 - 1)$ — коэффициенты, зависящие от параметров среды и геометрии оболочки. Согласно (27) величина заряда определяется разностью давлений и разностью энергий, которыми обладали бы сфера радиусом r_1 , находящаяся под давлением p_1 , и сфера радиусом r_2 , находящаяся под давлением p_2 . В отсутствие давлений связанный заряд, напряженность электрического поля и деформации в оболочке равны нулю, для равных давлений ($p_1 = p_2 \neq 0$) значения перечисленных выше величин определяются только первым членом в квадратных скобках в правой части (27), а для давлений, удовлетворяющих соотношению $p_1/p_2 = \xi_{21}^3$, — только вторым членом. Заряд линейно зависит от давлений и изменяет знак при

$$\frac{p_{1K}}{p_{2K}} = \frac{s_1 \xi_{21}^3 + s_2 K}{s_1 + s_2 K},$$

где $p_{1K,2K} = p_{1,2}/3K$, а $s_{2K} = s_2 (3K/4\eta)$.

Проиллюстрируем выводы теории графическим материалом, полученным при использовании первых пяти членов в разложении интегральной показательной функции и следующих значений параметров: $\lambda = \eta = 1$ эрг/см³, $\lambda^{(en)} = \eta^{(en)} = 0.01$ эрг/см³, $a_2 = 0.1$ см², $\varepsilon_0 = 1$. Нормировка напряженности

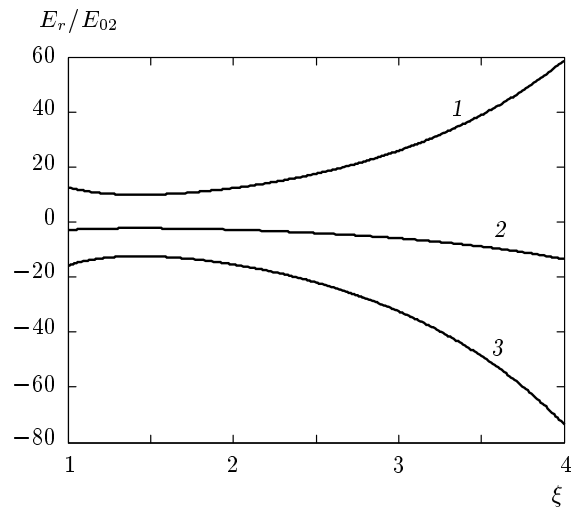


Рис. 1. Зависимости E_r/E_{02} от ξ при различных значениях $\{p_{1K}; p_{2K}\}$

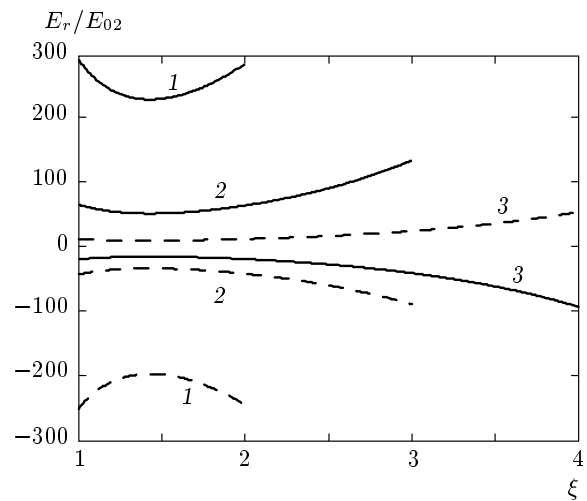


Рис. 2. Зависимости E_r/E_{02} от ξ при различных значениях ξ_2 и $\{p_{1K}; p_{2K}\}$

электрического поля (ось ординат на рис. 1–3) проводится на величину E_{02} , которая представляет собой комбинацию материальных констант и не зависит ни от геометрических параметров оболочки, ни от значений внутреннего и внешнего давления.

На рис. 1 представлены зависимости нормированной напряженности радиального электрического поля E_r/E_{02} от нормированной радиальной координаты ξ при различных значениях нормированных внутреннего и внешнего давлений $\{p_{1K}; p_{2K}\}$, равных $\{0.1; 0.01\}$ (кривая 1), $\{0.1; 0.1\}$ (кривая 2), $\{0.01; 0.1\}$ (кривая 3). Видно, что соотношение между давлениями определяет знак и координатную зависимость поля.

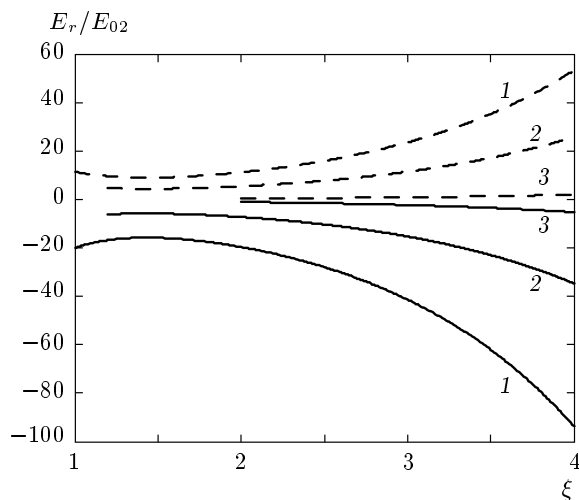


Рис. 3. Зависимости E_r/E_{02} от ξ при различных значениях ξ_1 и $\{p_{1K}; p_{2K}\}$

На рис. 2 приведены зависимости E_r/E_{02} от ξ при различных значениях нормированного внешнего радиуса $\xi_2 = 2.0$ (1), 3.0 (2), 4.0 (3). Сплошные и штриховые линии на рисунке соответствуют зависимостям при давлениях $\{p_{1K}; p_{2K}\}$, равных соответственно $\{0.1; 0.2\}$ и $\{0.2; 0.1\}$. При увеличении внешнего радиуса уменьшается напряженность поля и изменяется ее знак. Аналогичные зависимости E_r/E_{02} от ξ при различных значениях внутреннего радиуса $\xi_1 = 1.0$ (1), 1.2 (2), 2.0 (3) для давлений $\{p_{1K}; p_{2K}\}$, равных $\{0.1; 0.2\}$ (сплошные линии) и $\{0.2; 0.1\}$ (штриховые линии) изображены на рис. 3. С ростом внутреннего радиуса напряженность поля уменьшается (без изменения знака), а ее координатная зависимость сглаживается.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Возникновение в деформируемых оболочках значительных поверхностных связанных зарядов может быть причиной ряда явлений, происходящих в земной коре и мантии, клеточных мембранах, окрестности пор и вакансий в твердых телах и др.

Если для сферической оболочки, подвергаемой гидростатическому давлению извне и изнутри, электрическое поле вне оболочки отсутствует по соображениям симметрии, то для эллипсоидальной оболочки в аналогичных условиях внешнее поле будет отличным от нуля; в случае переменного давления оболочка будет излучать электромагнитные волны.

В несимметричных оболочках в сегментах с малым локальным радиусом кривизны возникают самые сильные неоднородные деформации, приводящие к накоплению на внутренней и внешней поверхностях значительных электрических зарядов разного знака.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Кабыченков, Ф. В. Лисовский, Письма в ЖЭТФ **98**, 898 (2013).
2. А. Ф. Кабыченков, Ф. В. Лисовский, ЖЭТФ **145**, 733 (2014).
3. R. D. Mindlin, J. Appl. Phys., **10**, 222 (1939).
4. R. D. Mindlin, J. Appl. Phys. **10**, 273 (1939).
5. P. Zubko, G. Catalan, and A. K. Tagantsev, Ann. Rev. Mater. Res. **43**, 387 (2013).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория упругости, Наука, ГИФМЛ, Москва (1987).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Наука, ГИФМЛ, Москва (1982).
8. Ю. И. Сиротин, М. П. Шаскольская, Основы кристаллофизики, Наука, ГИФМЛ, Москва (1979).
9. А. А. Ильюшин, Механика сплошной среды, Изд-во МГУ, Москва (1990).
10. В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др., Линейные уравнения математической физики, Наука, Москва (1964).
11. А. Г. Свешников, А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов, Лекции по математической физике, Изд-во МГУ, Москва (1993).
12. А. П. Прудников, Ю. А. Бычков, О. И. Маричев, Интегралы и ряды, Наука, Москва (1981).