

# ПЕРЕИЗЛУЧЕНИЕ УЛЬТРАКОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ МНОГОЭЛЕКТРОННЫМИ АТОМАМИ

*Д. Н. Макаров\*, В. И. Матвеев\*\**

*Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова  
163002, Архангельск, Россия*

Поступила в редакцию 23 февраля 2014 г.

Развита методика расчетов спектров переизлучения ультракоротких импульсов электромагнитного поля аттосекундной и меньшей длительности нейтральными многоэлектронными атомами с зарядами ядер от 1 до 92. Методика позволяет провести точный учет пространственной неоднородности поля ультракороткого импульса и импульсов фотонов в процессах переизлучения. Результаты представлены в виде аналитических формул, зависящих от нескольких коэффициентов и параметров экранирования, табулированных для всех атомов, электронные плотности которых описываются известной моделью Дирака–Хартри–Фока–Слейтера. В качестве примеров рассчитаны спектры переизлучения ультракоротких импульсов электромагнитного поля атомами углерода, кремния, германия, олова и свинца.

DOI: 10.7868/S0044451014100022

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Достигнутый к настоящему времени прогресс в методах генерации коротких и ультракоротких электромагнитных импульсов позволил преодолеть «фемтосекундный рубеж» и получить импульсы длительностью в несколько десятков аттосекунд. Появилось новое направление — аттосекундная физика [1] и возможность наблюдения атомных явлений в реальном масштабе времени. Стали актуальными теоретические исследования процессов, происходящих в различных мишенях при их взаимодействии с ультракороткими импульсами. Значительное количество работ посвящено процессам ионизации и возбуждения мишеней (см., например, обзоры [1–5]). Процессам же переизлучения ультракоротких импульсов посвящено сравнительно небольшое количество теоретических работ (см., например, [6] и приведенные там ссылки). В работе [7] в рамках классического описания рассмотрено рассеяние ультракороткого импульса на атоме. Сравнительно недавно в работах [6, 8] в рамках теории возмущений развито описание рассеяния ультракороткого электромагнитного импульса на многоэлектронном атоме с учетом возбуждения мишени и недипольности электромагнитного взаимодействия. Такой подход, в принципе, применим и для импульсов аттосекундной и меньшей длительности, однако в случаях такой длительности возможен точный учет поля ультракороткого импульса в рамках теории внезапных возмущений, что позволяет проще описать процессы перерасеяния [9, 10] отдельными атомами и распространить теорию на случаи многоатомных систем [11, 12]. Общий формализм для расчетов спектров переизлучения атомами таких импульсов, развитый в работе [9], позволяет провести точный учет пространственной неоднородности поля (на размерах мишени) ультракороткого импульса и точно учитывать импульс фотона в процессах переизлучения. Однако провести расчеты спектров переизлучения удалось лишь для атомов водорода и гелия, а выполнить расчеты для более сложных атомов по предложенной в работе [9] методике довольно затруднительно. Хотя именно многоэлектронные атомы часто используются при исследованиях различного рода процессов в аттосекундной физике [1–5].

В настоящей работе развит метод расчетов процессов переизлучения ультракоротких импульсов электромагнитного поля многоэлектронными атома-

\*E-mail: makarovd0608@yandex.ru

\*\*E-mail: mezon98@mail.ru

ми. В рассматриваемых нами случаях считается, что длительность ультракоротких импульсов  $\tau$  значительно меньше характерного атомного времени  $\tau_a$ , т. е.  $\tau \ll \tau_a$ . Таким образом, рассматриваются ультракороткие импульсы аттосекундной и меньшей длительности. Именно в таких случаях получены угловые распределения и спектры переизлучения ультракоротких импульсов электромагнитного поля нейтральными многоэлектронными атомами с зарядами ядер  $1 \leq Z \leq 92$  (здесь и везде ниже используются атомные единицы). Развита методика позволяет провести точный учет как пространственной неоднородности поля ультракороткого импульса, так и импульсов фотонов в процессах переизлучения. При этом поле ультракороткого импульса учитывается точно в рамках приближения внезапных возмущений, а процесс излучения фотона описывается по теории возмущений. Спектры включают в себя некогерентные (пропорциональные  $N$ ) и когерентные (пропорциональные  $N^2$ ) части, где  $N$  — число электронов в атоме. Результаты представлены в виде простых аналитических формул, зависящих от нескольких коэффициентов и параметров экранирования, табулированных [13] для всех атомов (с зарядами ядер  $1 \leq Z \leq 92$ ), электронные плотности которых описываются известной моделью Дирака–Хартри–Фока–Слейтера. В качестве примеров рассчитаны спектры переизлучения ультракоротких импульсов электромагнитного поля атомами углерода, кремния, германия, олова и свинца. Отметим, что речь идет об излучении одного фотона всеми атомными электронами за время действия внезапного возмущения. После действия внезапного возмущения возбужденный атом может релаксировать с излучением фотонов, принадлежащих известному спектру изолированного атома. Однако если внезапное возмущение вызывает изменение скоростей атомных электронов, то и во время действия возмущения атомы могут излучать [9]. Классическим аналогом задачи в такой постановке является известный [14] пример о спектре излучения свободного электрона при внезапном изменении его скорости.

## 2. ОБЩАЯ ЧАСТЬ

Известно, что задача о возбуждении или ионизации атома ультракоротким импульсом внешнего электромагнитного поля длительностью, меньшей характерных атомных периодов времени, может быть решена [15–18] путем непосредственно-

го применения теории внезапных возмущений. При этом для расчетов вероятностей излучения фотонов за время действия ультракороткого импульса необходима некоторая модификация стандартной [15–18] теории внезапных возмущений. Основой такой модификации является [9] представление точной волновой функции в виде входящих (in) и выходящих (out) решений возмущенного уравнения Шредингера с последующей аппроксимацией оператора эволюции в приближении внезапных возмущений. Тогда вероятности переизлучения ультракороткого импульса можно рассчитывать как поправки к in- и out-состояниям с использованием теории возмущений по взаимодействию атомных электронов с полем излучения. В результате спектр испускания фотона с импульсом  $\mathbf{k}$  в единицу телесного угла  $d\Omega_{\mathbf{k}}$ , описанного вокруг вектора  $\mathbf{k}$ , с одновременным переходом атома из состояния  $\varphi_0$  в состояние  $\varphi_n$  имеет вид [9]

$$\frac{d^2 W_{0n}}{d\Omega_{\mathbf{k}} d\omega} = \frac{1}{(2\pi)^2 c^3 \omega} \times \left| \langle \varphi_n | \sum_{a=1}^N \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_a) \left[ \frac{\partial \tilde{V}(\omega)}{\partial \mathbf{r}_a} \times \mathbf{n} \right] \times \exp \left( -i \int_{-\infty}^{\infty} V(t') dt' \right) | \varphi_0 \rangle \right|^2. \quad (1)$$

Здесь  $c$  — скорость света,  $\omega$  — частота фотона,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор направления вылета фотона, так что  $\mathbf{k} = (\omega/c)\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{r}_a$  — координаты атомного электрона с номером  $a$  ( $a = 1, \dots, N$ ),  $N$  — число атомных электронов,  $\tilde{V}(\omega)$  — фурье-образ

$$\tilde{V}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} V(t) e^{i\omega t} dt \quad (2)$$

потенциала взаимодействия  $V(t)$  атомных электронов с ультракоротким импульсом электромагнитного поля:

$$V(t) \equiv V(\{\mathbf{r}_a\}, t) = \sum_{a=1}^N \mathbf{E}(\mathbf{r}_a, t) \cdot \mathbf{r}_a, \quad (3)$$

где  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_a, t)$  — напряженность электрического поля ультракороткого импульса,  $\{\mathbf{r}_a\}$  — совокупность координат атомных электронов. Формула (1) описывает спектр излучения фотона с одновременным переходом атома из состояния  $\varphi_0$  в состояние  $\varphi_n$ , т. е. парциальный спектр. После суммирования (1) по полному набору конечных состояний атома  $\varphi_n$ , получим [9]

$$\frac{d^2W}{d\Omega_{\mathbf{k}}d\omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{c^3\omega} \langle \varphi_0 | \times \sum_{a,a'} \mathbf{f}(\mathbf{r}_a) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_a) \mathbf{f}^*(\mathbf{r}_{a'}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{a'}) | \varphi_0 \rangle. \quad (4)$$

Здесь мы ввели обозначение  $\mathbf{f}(\mathbf{r}_a)$  для векторного произведения:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}_a) = \frac{\partial \tilde{V}(\omega)}{\partial \mathbf{r}_a} \times \mathbf{n}. \quad (5)$$

Таким образом, формула (4) описывает полный (просуммированный по поляризациям фотона и по всем возможным конечным состояниям  $\varphi_n$  атомных электронов) спектр излучения фотона частоты  $\omega$  в единицу телесного угла  $d\Omega_{\mathbf{k}}$ . Подчеркнем, что речь идет об излучении одного фотона всеми атомными электронами только в течение времени действия внезапного возмущения  $V(t)$ . Именно эта формула использовалась в работе [9] для расчетов спектров переизлучения. Спектр представлен в виде среднего по основному состоянию атома. Для вычисления среднего необходимо знание волновой функции многоэлектронного атома и проведение многомерного интегрирования. Именно поэтому в [9] и последующих работах [11, 12] спектры переизлучения были рассчитаны лишь в простейших случаях — для изолированных атомов водорода и гелия. Далее мы покажем, что полные спектры можно рассчитать, зная только электронную плотность атома, и для модели Дирака–Хартри–Фока–Слейтера [13] получим простые аналитические выражения для угловых распределений и спектров переизлучения ультракоротких импульсов электромагнитного поля нейтральными многоэлектронными атомами с зарядами ядер от 1 до 92.

Для вычисления спектра излучения многоэлектронного атома в формуле (4) отдельно рассмотрим слагаемые с  $a = a'$  и с  $a \neq a'$ , соответственно представим спектр в виде

$$\frac{d^2W}{d\Omega_{\mathbf{k}}d\omega} = \frac{d^2W_1}{d\Omega_{\mathbf{k}}d\omega} + \frac{d^2W_2}{d\Omega_{\mathbf{k}}d\omega}, \quad (6)$$

где

$$\frac{d^2W_1}{d\Omega_{\mathbf{k}}d\omega} = A \langle \varphi_0 | \sum_a |\mathbf{f}(\mathbf{r}_a)|^2 | \varphi_0 \rangle, \quad (7)$$

$$\frac{d^2W_2}{d\Omega_{\mathbf{k}}d\omega} = A \langle \varphi_0 | \sum_{a,a' (a \neq a')} \mathbf{f}(\mathbf{r}_a) \times \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_a) \mathbf{f}^*(\mathbf{r}_{a'}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{a'}) | \varphi_0 \rangle, \quad (8)$$

где  $A = [(2\pi)^2 c^3 \omega]^{-1}$ . Выражение (7) можно переписать как

$$\frac{d^2W_1}{d\Omega_{\mathbf{k}}d\omega} = A \int \langle \varphi_0 | \sum_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) | \varphi_0 \rangle |\mathbf{f}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = A \int \rho(r) |\mathbf{f}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}, \quad (9)$$

где  $\delta(\mathbf{r})$  — дельта-функция Дирака,

$$\rho(r) = \langle \varphi_0 | \sum_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) | \varphi_0 \rangle$$

— плотность распределения электронов в атоме. Таким образом, формула (7) существенно упрощается и первая часть спектра оказывается выраженной через электронную плотность атома.

Рассмотрим теперь выражение (8). Пусть волновая функция  $|\varphi_0\rangle$  имеет вид антисимметризованных произведений одноэлектронных координатных и спиновых волновых функций. Рассмотрим какое-либо одно слагаемое в выражении для  $|\varphi_0\rangle$ , обозначая его тем же символом:  $|\varphi_0\rangle = |\phi_1(\mathbf{r}_1)\rangle |\phi_2(\mathbf{r}_2)\rangle \dots |\phi_N(\mathbf{r}_N)\rangle$ , где все  $|\phi_i\rangle$  ортонормированы, т.е.  $\langle \phi_i | \phi_j \rangle = \delta_{i,j}$ , где  $\delta_{i,j}$  — символ Кронекера.

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d^2W_2}{d\Omega_{\mathbf{k}}d\omega} &= A \sum_{a,a' (a \neq a')} \langle \phi_a | \mathbf{f}(\mathbf{r}_a) \times \\ &\times \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_a) | \phi_a \rangle \langle \phi_{a'} | \mathbf{f}^*(\mathbf{r}_{a'}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{a'}) | \phi_{a'} \rangle = \\ &= A \sum_{a,a' (a \neq a')} \langle \varphi_0 | \mathbf{f}(\mathbf{r}_a) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_a) | \varphi_0 \rangle \langle \varphi_0 | \mathbf{f}^*(\mathbf{r}_{a'}) \times \\ &\times \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{a'}) | \varphi_0 \rangle = \\ &= A |\langle \varphi_0 | \sum_a \mathbf{f}(\mathbf{r}_a) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_a) | \varphi_0 \rangle|^2 - \\ &- A \sum_a |\langle \varphi_0 | \mathbf{f}(\mathbf{r}_a) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_a) | \varphi_0 \rangle|^2. \quad (10) \end{aligned}$$

Далее, как и при выводе формулы (9), нетрудно представить результат (10) в виде

$$\frac{d^2W_2}{d\Omega_{\mathbf{k}}d\omega} = A \left| \int \rho(r) \mathbf{f}(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} \right|^2 - A \sum_a |\langle \varphi_0 | \mathbf{f}(\mathbf{r}_a) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_a) | \varphi_0 \rangle|^2. \quad (11)$$

Второе слагаемое в правой части (11) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_a |\langle \varphi_0 | \mathbf{f}(\mathbf{r}_a) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_a) | \varphi_0 \rangle|^2 &= \\ &= \sum_a \left| \int \rho_a(\mathbf{r}) \mathbf{f}(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} \right|^2, \quad (12) \end{aligned}$$

где  $\rho_a(\mathbf{r}) = \langle \varphi_0 | \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) | \varphi_0 \rangle$ . Поскольку  $\sum_a \rho_a(\mathbf{r}) = \rho(r)$ ,  $\rho_a$  можно считать парциальной электронной плотностью атома (т.е. вкладом электрона с номером  $a$  в полную электронную плотность атома). Поэтому будем считать, что  $\rho_a = \rho(r)/N$ , тогда

$$\sum_a \left| \int \rho_a(\mathbf{r}) \mathbf{f}(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} \right|^2 = \frac{1}{N} \left| \int \rho(r) \mathbf{f}(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} \right|^2. \quad (13)$$

В итоге получаем

$$\frac{d^2 W_2}{d\Omega_{\mathbf{k}} d\omega} = A \left| \int \rho(r) \mathbf{f}(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} \right|^2 \times \left( 1 - \frac{1}{N} \right). \quad (14)$$

Таким образом, и вторая часть спектра (8) выражается через электронную плотность атома. Выражение (7), которое содержит  $N$  слагаемых, пропорционально  $N$  и представляет из себя некогерентную (пропорциональную числу атомных электронов  $N$ ) часть спектра. Выражение (8), в котором суммирование проводится по парам электронов, число таких пар равно  $N(N-1)$ , поэтому (8) пропорционально  $N(N-1)$  и содержит как когерентную (пропорциональную  $N^2$ ) часть спектра, так и некогерентную (пропорциональную  $N$ ) часть. Поэтому итоговое выражение для спектра (6) удобно представить как

$$\frac{d^2 W}{d\Omega_{\mathbf{k}} d\omega} = \frac{1}{(2\pi)^2 c^3 \omega} \times \left\{ N \tilde{G}(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) + N(N-1) \tilde{F}(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) \right\}, \quad (15)$$

$\tilde{G}(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0)$  и  $\tilde{F}(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0)$  — средние величины определяемые согласно (9) и (14):

$$\tilde{G}(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = \frac{1}{N} \int \rho(r) |\mathbf{f}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}, \quad (16)$$

$$\tilde{F}(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = \frac{1}{N(N-1)} \times \left| \int \rho(r) \mathbf{f}(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} \right|^2 \left( 1 - \frac{1}{N} \right), \quad (17)$$

где по определению

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{r}_a)|_{\mathbf{r}_a=\mathbf{r}} = \left[ \frac{\partial \tilde{V}(\omega)}{\partial \mathbf{r}_a} \times \mathbf{n} \right] \Big|_{\mathbf{r}_a=\mathbf{r}}.$$

Полученные формулы (15)–(17) имеют общий характер и описывают спектры переизлучения ультракоротких импульсов произвольной формы произвольными атомами и ионами при известных плотностях электронов. В качестве примеров рассмотрим спектры переизлучения ультракоротких импульсов гауссовой формы нейтральными атомами, электронная плотность которых описывается в модели Дирака–Хартри–Фока–Слейтера [13]. В рамках этой модели предложена простая аналитическая аппроксимация плотности электронов

$$\rho(r) = \frac{N}{4\pi r} \sum_{i=1}^3 A_i \alpha_i^2 \exp(-\alpha_i r) \quad (18)$$

и приведены таблицы для коэффициентов  $A_i$  и параметров экранирования  $\alpha_i$  для всех нейтральных атомов с зарядами ядер от 1 до 92. При этом для всех атомов  $\sum_{i=1}^3 A_i = 1$ . Из выражения (18) следует, что входящие в (15) средние  $\tilde{G}(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0)$  и  $\tilde{F}(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0)$ , представленные формулами (16) и (17), не зависят от  $N$ .

### 3. ПЕРЕИЗЛУЧЕНИЕ ИМПУЛЬСА ГАУССОВОЙ ФОРМЫ

Получим спектры переизлучения ультракороткого импульса гауссовой формы:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp \left( -\alpha^2 \left( t - \frac{\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}}{\omega_0} \right)^2 \right) \times \cos(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}), \quad (19)$$

где  $\mathbf{E}_0$  — амплитуда напряженности электрического поля,  $\mathbf{k}_0 = (\omega_0/c) \mathbf{n}_0$ , а  $\mathbf{n}_0$  — единичный вектор вдоль направления распространения ультракороткого импульса,  $\mathbf{r}$  — координаты точки наблюдения,  $c$  — скорость света, длительность импульса  $\tau \approx 1/\alpha$ . Для напряженности (19) фурье-образ (2) внезапного возмущения (3) легко вычисляется, в результате необходимое нам векторное произведение (5) равно

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}_a) \equiv \frac{\partial \tilde{V}(\omega)}{\partial \mathbf{r}_a} \times \mathbf{n} = f_0(\omega) \exp \left( -i \frac{\omega}{\omega_0} \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_a \right) \times \left( \mathbf{E}_0 \times \mathbf{n} + i \frac{\omega}{\omega_0} (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}_a) [\mathbf{k}_0 \times \mathbf{n}] \right), \quad (20)$$

где

$$f_0(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \left\{ \exp \left( -\frac{(\omega - \omega_0)^2}{4\alpha^2} \right) + \exp \left( -\frac{(\omega + \omega_0)^2}{4\alpha^2} \right) \right\}. \quad (21)$$

Для гауссова импульса удобно переопределить входящие в формулу (15) средние (16) и (17), выделив  $|f_0(\omega)|^2$  как общий множитель:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) &= |f_0(\omega)|^2 G(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0), \\ \tilde{F}(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) &= |f_0(\omega)|^2 F(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0). \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя в (16) и (17) электронную плотность  $\rho(r)$  из формулы (18) и  $\mathbf{f}(\mathbf{r}_a)$  из формулы (20) при  $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}$ , получим после интегрирования по координатам следующие выражения для функций  $G$  и  $F$  из формул (22):

$$G(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = [\mathbf{E}_0 \times \mathbf{n}]^2 + \frac{24}{3} E_0^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 [\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}]^2 \times \sum_{i=1}^3 \frac{A_i}{\alpha_i^2}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} F(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) &= 2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n}) [\mathbf{E}_0 \times \mathbf{n}] [\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}] \times \\ &\times \sum_{i,j=1}^3 \frac{A_i \alpha_i^2 A_j \alpha_j^2 (\alpha_i^2 + \alpha_j^2 + 2p^2)}{(\alpha_i^2 + p^2)^2 (\alpha_j^2 + p^2)^2} + \\ &+ \left( [\mathbf{E}_0 \times \mathbf{n}]^2 + 4 \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 [\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}]^2 (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n})^2 \right) \times \\ &\times \left( \sum_{i=1}^3 \frac{A_i \alpha_i^2}{(\alpha_i^2 + p^2)^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (24)$$

В выражении (24)  $\mathbf{p} = (\omega/c)(\mathbf{n} - \mathbf{n}_0)$ , где  $\mathbf{n}_0 = \mathbf{k}_0/k_0$  и  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$ . В итоге из (15) получим с учетом переопределения (22):

$$\begin{aligned} \frac{d^2W}{d\Omega_{\mathbf{k}} d\omega} &= \frac{|f_0(\omega)|^2}{(2\pi)^2 c^3 \omega} \times \\ &\times \{NG(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) + N(N-1)F(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0)\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Эта формула, совместно с (23) и (24), представляет собой окончательное выражение для углового распределения спектра фотонов, переизлученных произвольными многоэлектронными атомами при взаимодействии с ультракороткими импульсами гауссовой формы. В области низких частот, когда  $(\omega/c)^2 \ll 1$ ,

$$G(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = F(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = [\mathbf{E}_0 \times \mathbf{n}]^2$$

с точностью до величин, пропорциональных  $(\omega/c)^2$ , (напомним, что  $\sum_{i=1}^3 A_i = 1$  [13]) и весь спектр становится когерентным (пропорциональным квадрату числа атомных электронов  $N^2$ ). В области высоких частот  $(\omega/c)^2 \gg 1$  функция  $F(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = 0$ , а

$$G(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = \frac{24}{3} E_0^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 [\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}]^2 \sum_{i=1}^3 \frac{A_i}{\alpha_i^2},$$

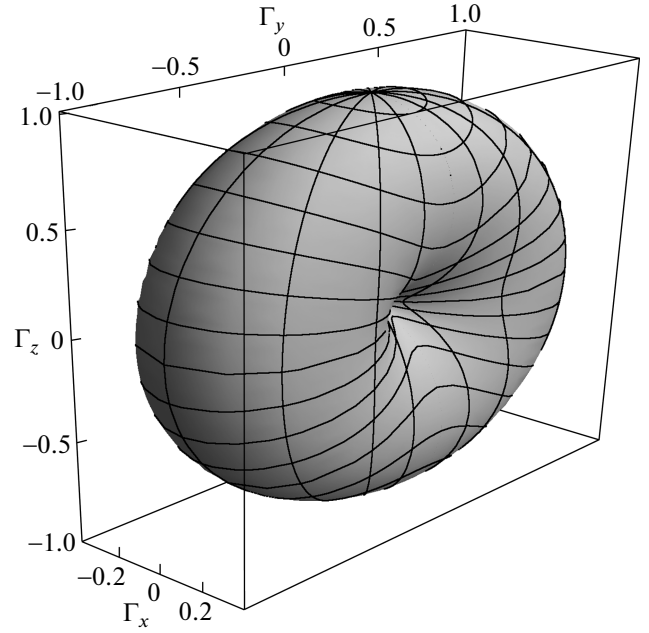


Рис. 1. Угловое распределение спектра переизлучения фотонов низкой частоты ( $\omega/c = 0.1$ ), принадлежащих когерентной части спектра

т. е. когерентные слагаемые равны нулю и остается только некогерентное (пропорциональное  $N$ ) излучение. Для атомов с большим числом электронов,  $N \gg 1$  (например, в атоме золота  $N = 79$ ), соотношение между когерентными и некогерентными частями спектра определяется не только частотой переизлученных фотонов, но и числом электронов в атоме, так что спектр остается когерентным либо сравнимым с некогерентным, пока  $N(\omega/c)^2 \leq 1$ . Таким образом, можно сказать, что когда когерентная часть спектра много больше некогерентной, то переизлучение идет преимущественно по направлениям, перпендикулярным  $\mathbf{E}_0$ , когда же некогерентная часть много больше когерентной, то переизлучение идет преимущественно в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{n}_0$ . В общем же случае, при произвольных  $\omega/c$  в спектре присутствует когерентная и некогерентная части, в этом случае спектр может быть определен только непосредственно из (25).

Проиллюстрируем сказанное выше графически. Для этого удобно рассмотреть входящую в (25) безразмерную функцию

$$\Gamma = \frac{1}{E_0^2} (NG(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0) + N(N-1)F(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{n}_0)). \quad (26)$$

Для указания направления вылета фотона введем вектор  $\mathbf{\Gamma} = \Gamma \mathbf{n}$ , по модулю равный  $\Gamma$  и направленный

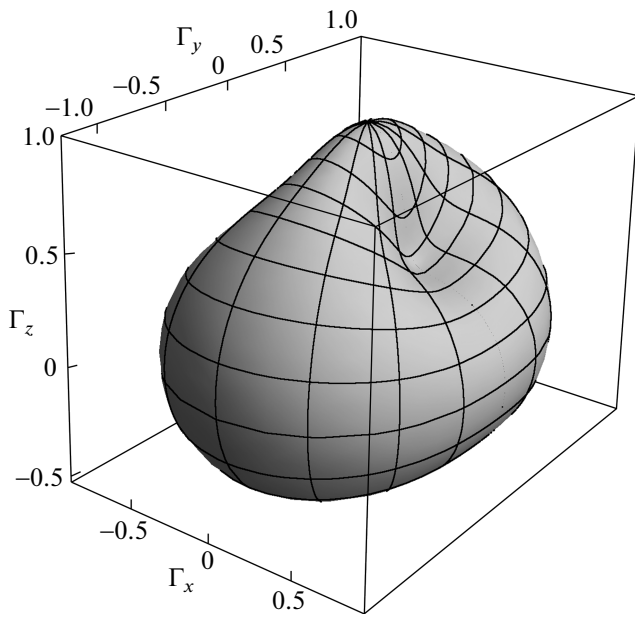


Рис. 2. Угловое распределение спектра переизлучения фотонов средней частоты ( $\omega/c = 1.3$ ), входящих в когерентную и некогерентную части спектра

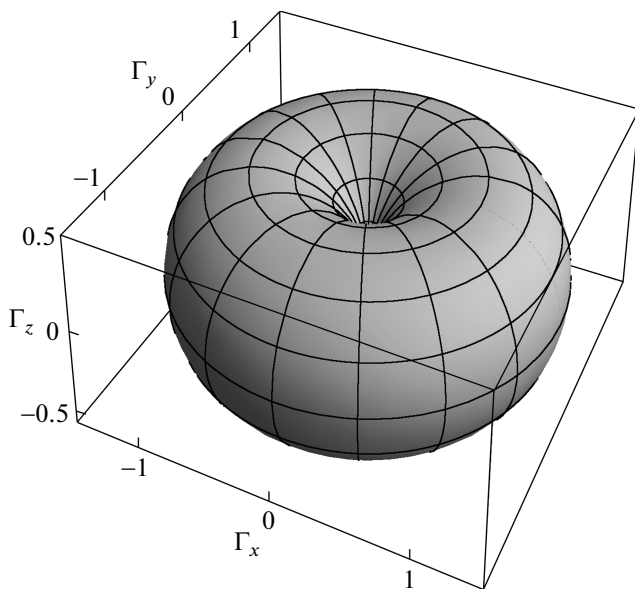


Рис. 3. Угловое распределение спектра переизлучения фотонов высокой частоты ( $\omega/c = 10$ ), принадлежащих некогерентной части спектра

ный вдоль направления вылета фотона  $\mathbf{n}$ . Выберем ось  $x$  вдоль направления распространения ультракороткого импульса  $\mathbf{n}_0$ , ось  $y$  направим по амплитуде напряженности поля ультракороткого импульса  $\mathbf{E}_0$  и ось  $z$  — перпендикулярно к  $\mathbf{n}_0$  и  $\mathbf{E}_0$ . Соответствующие проекции вектора  $\mathbf{\Gamma}$  на оси  $x, y$  и  $z$  обозначим  $\Gamma_x, \Gamma_y$  и  $\Gamma_z$ . На рис. 1–3 проиллюстрировано поведение вектора  $\mathbf{\Gamma}$  для всех возможных направлений  $\mathbf{n}$  вылета фотона и трех значений частоты излучаемого фотона. Так, рис. 1 соответствует угловому распределению фотонов, принадлежащих низкочастотной ( $\omega/c = 0.1$ ) когерентной части спектра переизлучения, рис. 2 соответствует угловому распределению фотонов промежуточных ( $\omega/c = 1.5$ ) частот, принадлежащих когерентной и некогерентной частям спектра, на рис. 3 представлено угловое распределение фотонов высоких частот ( $\omega/c = 10$ ), входящих в некогерентную часть спектра. Отметим, что для удобства графического представления на рис. 1–3 приведены значения вектора  $\mathbf{\Gamma}$  в относительных единицах, а именно на графиках приведены значения вектора  $\mathbf{\Gamma}/\Gamma_{max}$ , где  $\Gamma_{max}$  — максимальное значение, которое принимает модуль вектора  $\mathbf{\Gamma}$  при всех возможных направлениях вылета фотона (для частоты фотона, соответствующей номеру рисунка). При построении рис. 1–3 считалось, что мишень — атом углерода — находится в начале системы координат, т. е. в точке с координатами  $(0.0; 0.0; 0.0)$ . Соответственно считалось, что вектор  $\mathbf{\Gamma}$  исходит из начала системы координат и заканчивается в какой-либо точке изображенных на рис. 1–3 поверхностей. Отметим, что согласно (26) приведенные угловые распределения, очевидно, не зависят от параметров  $E_0 = |\mathbf{E}_0|$ ,  $\alpha$  и  $\omega_0$  гауссова ультракороткого импульса (19), входящих лишь в квадрат модуля фурье-образа  $|f_0(\omega)|^2$ , выделенного в виде общего множителя в формулах (22).

Формула (25) позволяет в общем виде провести интегрирование по всем углам вылета фотона и найти полный спектр переизлучения:

$$\frac{dW}{d\omega} = \int \frac{d^2W}{d\Omega_{\mathbf{k}} d\omega} d\Omega_{\mathbf{k}}. \tag{27}$$

В результате элементарного, но громоздкого интегрирования получим полный спектр переизлучения в виде

$$\frac{dW}{d\omega} = 2 \frac{|f_0(\omega)|^2 E_0^2}{3\pi c^3 \omega} \left\{ N \left( 1 + \frac{24}{3} \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \sum_{i=1}^3 \frac{A_i}{\alpha_i^2} \right) + N(N-1) I \left( \frac{\omega}{c} \right) \right\}, \tag{28}$$

где

$$I\left(\frac{\omega}{c}\right) = \left( \sum_{i=1}^3 F_i + \sum_{j=2}^3 \sum_{i=1}^{j-1} F_{i,j} \right), \quad (29)$$

$$F_i = \frac{A_i^2 \alpha_i^2}{\alpha_i^2 + 4(\omega/c)^2}, \quad (30)$$

$$F_{i,j} = \frac{3}{16} \frac{A_i \alpha_i^2 A_j \alpha_j^2}{(\alpha_i^2 - \alpha_j^2)^3 (\omega/c)^6} \times \left\{ (\alpha_i^2 - \alpha_j^2) \left[ 4\alpha_i^2 \alpha_j^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + 8(\alpha_i^2 + \alpha_j^2) (\omega/c)^4 \right] + \alpha_i^2 \alpha_j^2 \left( \alpha_i^2 + 4\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \right) \left( \alpha_j^2 + 4\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \right) \times \ln \frac{1 + 4(\omega/(c\alpha_i))^2}{1 + 4(\omega/(c\alpha_j))^2} \right\}. \quad (31)$$

Выражение для  $I(\omega/c)$  упрощается в предельных случаях. В случае малых частот ( $\omega^2/c^2 \ll 1$ )

$$I\left(\frac{\omega}{c}\right) = 1 - \left(\frac{2\omega}{c}\right)^2 \sum_{i=1}^3 \frac{A_i}{\alpha_i^2}.$$

При больших частотах ( $\omega^2/c^2 \gg 1$ )

$$I\left(\frac{\omega}{c}\right) = \frac{1}{(2\omega/c)^2} \left\{ \sum_{i=1}^3 A_i^2 \alpha_i^2 + 6 \sum_{j=2}^3 \sum_{i=1}^{j-1} \frac{A_i \alpha_i^2 A_j \alpha_j^2}{(\alpha_i^2 - \alpha_j^2)^3} \left( \alpha_i^4 - \alpha_j^4 + 2\alpha_i^2 \alpha_j^2 \ln \frac{\alpha_j^2}{\alpha_i^2} \right) \right\}.$$

Таким образом, нами получена формула для полного (просуммированного по поляризациям и проинтегрированного по всем направлениям вылета фотонов) спектра переизлучения ультракороткого импульса произвольными нейтральными атомами с зарядами ядер от 1 до 92 (т.е. от атома водорода до атома урана), для которых значения  $A_i$  и  $\alpha_i$  приведены в работе [13] в модели Дирака–Хартри–Фока–Слейтера. Спектр (28) пропорционален  $|f_0(\omega)|^2$ , поэтому согласно (21) атомом преимущественно испускаются фотоны, принадлежащие непрерывному спектру с характерными частотами  $|\omega - \omega_0| \leq 1/\tau$ . При этом спектр переизлучения (28), как и угловое распределение (25), состоит из некогерентной (пропорциональной  $N$ ) и когерентной (пропорциональной  $N^2$ ) частей. В области низких частот (когда  $\omega^2/c^2 \ll 1$ ) спектр переизлучения прямо пропорционален  $N^2$  — квадрату числа атомных электронов и имеет когерентный характер, тогда как в области высоких частот (когда  $\omega^2/c^2 \gg 1$ )

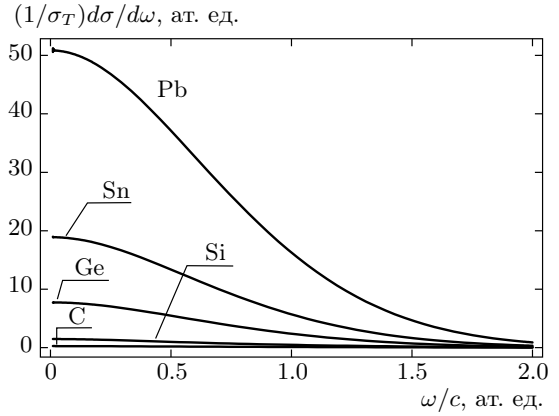


Рис. 4. Зависимость отношения (34) от частоты  $\omega$  излучаемого фотона. Расчеты проведены при  $\omega_0/c = 1/3, \alpha = 100$  для пяти элементов: углерода C, кремния Si, германия Ge, олова Sn, свинца Pb

спектр пропорционален  $N$  и имеет некогерентный характер.

Для получения сечения переизлучения импульса, очевидно, согласно [14] необходимо спектр (28) умножить на  $\omega$  и разделить на интеграл по времени от абсолютной величины вектора Пойнтинга

$$S(t) = c(4\pi)^{-1} (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t))^2,$$

где  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  выражается формулой (19), так что

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dt S(t) = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}_0^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\alpha} \times \left\{ \exp\left(-\frac{\omega_0^2}{2\alpha^2}\right) + 1 \right\}. \quad (32)$$

Таким образом, сечение переизлучения в единичный интервал частот равно

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{1}{I} \frac{dW}{d\omega} \omega. \quad (33)$$

Результаты расчетов удобно представлять для относительной величины

$$\frac{1}{\sigma_T} \frac{d\sigma}{d\omega}, \quad (34)$$

где  $\sigma_T$  — томсоновское сечение [14], которое в атомных единицах имеет вид  $\sigma_T = 8\pi/(3c^4)$ . На рис. 4–6 приведены результаты расчетов относительного сечения (34) в зависимости от частоты испущенного фотона (точнее, от  $\omega/c$ ) для атомов четвертого периода в таблице Менделеева (кривые снизу вверх: для атомов C, Si, Ge, Sn, Pb) для трех значений  $\omega_0/c = 1/3, 3/2, 4.0$ . Для каждого значения  $\omega_0/c$  из спектров переизлучения остаются лишь частоты из диапазона  $|\omega - \omega_0|/c \leq 1/c\tau$ . Таким образом, на рис. 4–6 эффективно представлены соответственно когерентная, смешанная и некогерентная

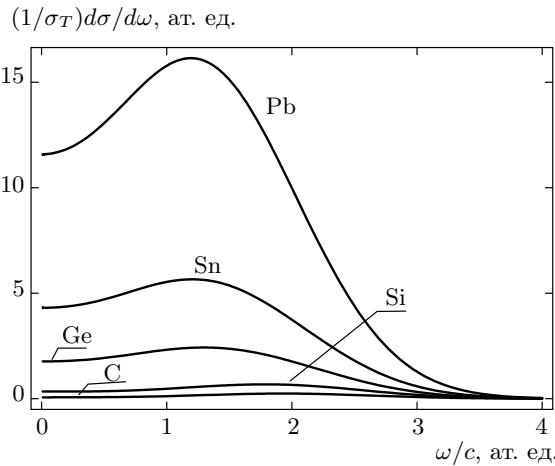


Рис. 5. То же, что и на рис. 4, при  $\omega_0/c = 3/2$

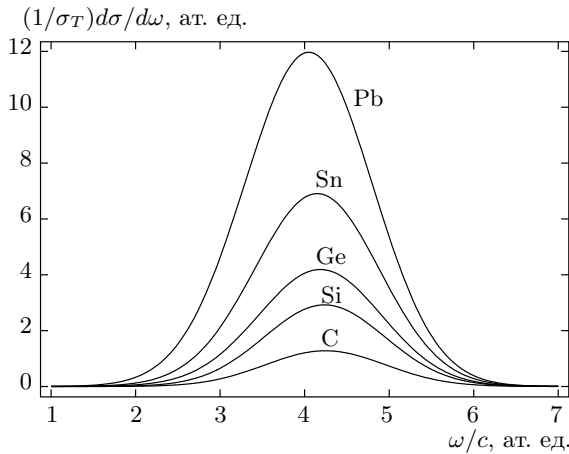


Рис. 6. То же, что и на рис. 4, при  $\omega_0/c = 4$

части спектра. Приведенные рис. 4–6 носят иллюстративный характер, поэтому, чтобы не нарушить условия применимости приближения внезапных возмущений для столь широкого выбора мишеней, нами была выбрана длительность ультракороткого импульса  $\tau = 10^{-2}$  ат. ед.  $= 2.42 \cdot 10^{-19}$  с (что соответствует значению  $\alpha = 10^2$  в гауссовом импульсе (19)). В формировании спектров переизлучения участвуют все атомные электроны, для сложных атомов с большим числом электронов подавляющее количество электронов расположено на внешних уровнях с характерными периодами времени, ненамного меньшими атомной единицы времени. На рис. 4–6 видно, что полученные нами сечения довольно значительно превышают томсоновское, это объясняется именно большим количеством электронов в атомах германия, олова и свинца.

Таким образом, нами получены спектры переизлучения многоэлектронных атомов при взаимодействии с ультракороткими импульсами электромагнитного поля. Представленным методом можно рассчитывать по формуле (15) спектры для импульса не только гауссовой формы, но и любой другой при выполнении условий применимости приближения внезапных возмущений. Очевидно, что развитый метод допускает непосредственное обобщение и на молекулярные мишени.

Работа выполнена в рамках КГЗ Министерства образования и науки РФ (№ 3.1726.2014/К) и стипендии Президента РФ (СП-2046.2012.1).

### ЛИТЕРАТУРА

1. F. Krausz and M. Ivanov, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 163 (2009).
2. P. Pierre Agostini and L. F. DiMauro, *Rep. Progr. Phys.* **67**, 813 (2004).
3. P. B. Corkit and F. Krausz, *Nature Phys.* **3**, 381 (2007).
4. V. Astapenko, *Interaction of Ultrashort Electromagnetic Pulses with Matter*, Springer Briefs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2013).
5. А. М. Желтиков, *УФН* **181**, 33 (2011).
6. В. А. Астапенко, *ЖЭТФ* **139**, 228 (2011).
7. P. A. Golovinkii and E. M. Mikhailov, *Laser Phys. Lett.* **3**, 259 (2006).
8. V. A. Astapenko, *Phys. Lett. A* **374**, 1585 (2010).
9. В. И. Матвеев, *ЖЭТФ* **124**, 1023 (2003).
10. В. И. Матвеев, *ЖТФ* **73**, 17 (2003).
11. В. И. Матвеев, Д. У. Матрасулов, *Письма в ЖЭТФ* **96**, 700 (2012).
12. Д. Н. Макаров, В. И. Матвеев, *ЖЭТФ* **144**, 905 (2013).
13. F. Salvat, J. D. Martinez, R. Mayol, and J. Parellada, *Phys. Rev. A* **36**, 467 (1987).
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).
15. А. М. Дыхне, Г. Л. Юдин, *УФН* **125**, 377 (1978).
16. В. И. Матвеев, Э. С. Парилис, *УФН* **138**, 583 (1982).
17. А. Б. Мигдал, *Качественные методы в квантовой теории*, Наука, Москва (1975).
18. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989).