

НИЗКОЧАСТОТНЫЕ СИГНАЛЫ БОЛЬШИХ ГРАВИТАЦИОННО-ВОЛНОВЫХ ИНТЕРФЕРОМЕТРОВ

А. В. Гусев, В. Н. Руденко, И. С. Юдин*

*Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова
119992, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 24 апреля 2014 г.

Рассматривается возможность применения гравитационно-волновых интерферометров для измерения низкочастотных сигналов геофизической природы. Основной целью исследования является изучение механизма проникновения квазистатических геофизических возмущений на высокочастотный порт интерферометра. Обращено внимание на параметрическую природу этого эффекта, связанную с медленными вариациями оптической передаточной функции. Индекс геофизической модуляции вычислен для всех гармоник выходного спектра, а также для частоты циркуляции фотонов, возникающей в результате шумовой засветки соседних оптических мод вблизи центрального резонанса. С целью улучшения качества регистрации геофизического сигнала проанализирована модель интерферометра с двухкомпонентной накачкой. Численные оценки для различных режимов работы инструмента представлены вместе с обсуждениями возможности регистрации слабых гравитационных эффектов.

DOI: 10.7868/S0044451014100137

1. ВВЕДЕНИЕ

Возможность параллельного использования большебазовых гравитационно-волновых детекторов типа лазерных интерферометров LIGO и VIRGO для регистрации низкочастотных возмущений геофизической природы рассматривалась в работах [1–7]. Предполагалось, что информация о геофизических процессах содержится в управляющих сигналах драйверов, контролирурующих позиционные и угловые координаты зеркал в рабочем режиме интерферометров, выполненных по схеме Майкельсона с эталонами Фабри–Перо (ФП) в его плечах. Зеркала удерживаются таким образом, чтобы обеспечить условие деструктивной интерференции (далее режим темной полосы или темного пятна) на выходе интерферометра Майкельсона. Очевидно, что напряжение корректирующих драйверов пропорционально деформациям плеч интерферометра, вызванным геофизическими процессами. Реализация этих идей была продемонстрирована на интерферометре VIRGO [8] в ходе научных наблюдательных серий VSR-1, VSR-2.

Было доказано, что гравитационно-волновой интерферометр может успешно работать в качестве двухкоординатного деформографа. Однако оригинальная идея использования его как углового гравитационного градиометра [2] до сих пор не нашла практического подтверждения из-за технических сложностей схемы углового контроля зеркал в установке VIRGO.

В то же время на интерферометрах LIGO было показано, что квазистатические геофизические вариации могут регистрироваться на главном относительно высокочастотном выходе инструмента, предоставляющем информацию о гравитационно-волновом воздействии. Здесь геовозмущения возникают косвенным образом, путем амплитудной модуляции шумовых гармоник на частоте циркуляции фотонов в плечах интерферометра (или, что то же самое, на частоте межмодового интервала эталонов ФП [9–11]). Попытка объяснения данного явления с помощью релятивистского гравитационного эффекта изменения скорости света в приливном гравитационном поле (при условии фиксированных положений зеркал) не была успешной: выяснилось, что наблюдаемое значение модуляции на три-четыре порядка выше, чем предсказание ОТО [11, 12]. На интерферометре VIRGO также были зарегистриро-

*E-mail: rvn@sai.msu.ru

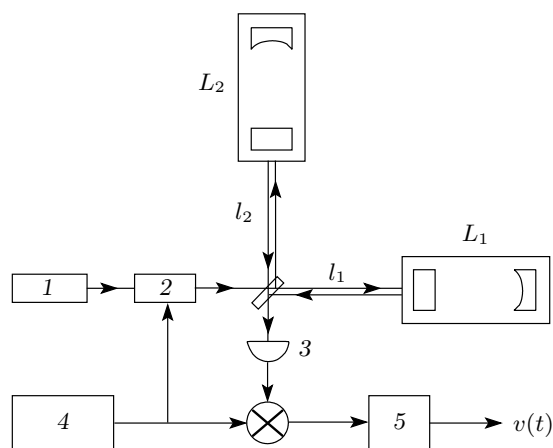


Схема гравитационно-волнового интерферометра: l_1, l_2 — малые плечи интерферометра Майкельсона; L_1, L_2 — эквивалентные зеркала интерферометра ФП; 1 — лазер; 2 — электронно-оптический модулятор; 3 — фотодетектор; 4 — радиочастотный генератор; 5 — низкочастотный фильтр

ваны следы квазиприливных модуляций (сидерическая периодичность), причем модуляции подверглись шумовые гармоники в широком диапазоне частот, входящих в рабочую зону интерферометра. Эффект был обнаружен во время поиска гравитационно-волнового сигнала от пульсара Vela на частотах около 20 Гц [13]. В работе [14] для сохранения гипотезы релятивистской природы эффекта модуляции была введена конечная расстройка режима деструктивной интерференции, что получило название «режим серого пятна» [14]. Формально, регулируя расстройку темного пятна, можно получить теоретическую величину модуляции в согласии с релятивистской теорией. Однако экспериментальных данных по режиму серого пятна в литературе недостаточно.

В сложившейся ситуации возможность объяснения эффекта геофизической модуляции появляется при отказе от условия «фиксированных зеркал», справедливость которого принимается на уровне точности систем их позиционной коррекции. Для интерферометра VIRGO это соответствует значению 10^{-12} м (или 10^{-15} в терминах деформации плеч интерферометра), что на три-четыре порядка больше, чем оценки изменения оптической длины в случае релятивистского гравитационного эффекта вариации показателя преломления.

Цель данной работы состоит в более подробном анализе механизма проникновения низкочастотных сигналов на главный выход интерферометра. В разд. 2, 3 приводится расчет передаточной функ-

ции для упрощенной оптической схемы интерферометра, изображенной на рисунке, в которой опущено «зеркало рециркуляции мощности». Оптическая накачка взята в обычном для фазомодулированного света виде. Особое внимание было уделено изучению свойств передаточной функции: в области главного оптического резонанса и его соседних мод, а также для боковых полос фазовой модуляции. За счет синхронной фоторегистрации светового потока на частоте модуляции возникает выходной ток, содержащий, в частности, частоту циркуляции фотонов, которую можно выделить при помощи специального фильтра. Показано, что амплитуда этой гармоники модулирована медленными геофизическими вариациями плеч интерферометра. Анализ конечной формулы дает возможность объяснить наблюдаемые приливные возмущения в данных S5 LIGO.

В разд. 4 выполнено исследование модели интерферометра с монохроматической накачкой, когда гармоника частоты циркуляции фотонов отсутствует на главном выходе интерферометра. Показано, что даже в этом случае геофизические возмущения могут быть считаны с главного выхода путем анализа амплитудной модуляции произвольной гармоники выходного спектра. Это становится возможно благодаря механизму параметрического переноса медленных изменений собственных частот интерферометра ФП в боковые модуляционные компоненты накачки с последующей демодуляцией в процессе дальнейшей фоторегистрации. По-видимому, с помощью такого механизма можно объяснить также наличие суточных приливных гармоник в выходных данных интерферометра VIRGO [13].

По результатам нашего анализа механизма регистрации медленных вариаций базы интерферометра предлагается модификация режима его работы с введением двухмодовой накачки, что значительно повышает качество считывания геофизических сигналов. В заключение обсуждается влияние зеркала рециркуляции на полученные результаты, а также возможность использования данной методики для измерения слабых геофизических эффектов и регистрации низкочастотного гравитационного излучения.

2. МОДЕЛЬ ИНТЕРФЕРОМЕТРА

Принципиальная оптоэлектронная схема интерферометра, использованная в установках LIGO и VIRGO, изображена на рисунке. Майкельсоновская конфигурация усложнена включением в ее плечи ин-

терферометров ФП для эффективного увеличения их длины за счет многократных проходов оптического луча. Для упрощения вычислений опущено зеркало рециркуляции между лазером и делителем луча, что качественно не меняет результаты последующего анализа. Для контроля зеркал в положении оптического резонанса цепями обратной связи вводится фазовая модуляция входного луча на радиочастоте примерно 25 МГц (блоки 2 и 4 на рисунке). Синхронное фотодетектирование на частоте модуляции отраженного от ФП-резонаторов света по схеме Паунда–Драйвера–Холла [15] позволяет сформировать управляющие напряжения для драйверов зеркал интерферометра. Информативный сигнал установки как гравитационно-волнового детектора появляется на главном выходе деструктивной интерференции (антисимметричный порт) в виде низкочастотных компонент тока фотодетектора (10 Гц–100 кГц). С помощью узкополосных фильтров можно выделять желаемую часть спектра. В частности в работах [9–11] такая фильтрация выполнялась с помощью синхронного детектирования на частоте циркуляции фотонов в плечах интерферометра ФП (частота межмодового интервала примерно 27 кГц).

После сделанных замечаний перейдем к формальному описанию взаимодействия лучей в оптической схеме, изображенной на рисунке, используя метод комплексных амплитуд (см. Приложение А).

На вход интерферометра поступает фазомодулированная накачка с несущей частотой ω_0 :

$$\begin{aligned} E_1(t) &= \text{Re} \left[\tilde{E}_1(t) \exp \{i\omega_0 t\} \right], \\ \tilde{E}_1(t) &= \tilde{E}_0(t) \exp \{i\beta \sin \bar{\Omega} t\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где комплексная огибающая $\tilde{E}_1(t)$ содержит гармоники на частоте $\bar{\Omega}$ фазовой модуляции с глубиной модуляции $\beta \sim 1$. В общем случае огибающая $\tilde{E}_0(t)$ может быть представлена в виде суммы большой постоянной компоненты A (линия генерации) и слабой шумовой компоненты $\tilde{a}(t)$ (пьедестал линии):

$$\tilde{E}_0(t) = A + \tilde{a}(t).$$

Предполагается, что комплексный процесс $\tilde{a}(t)$ меняется значительно медленнее периода радиочастоты фазовой модуляции. Это означает, что спектральная ширина пьедестала $\tilde{a}(t)$ много меньше частоты модуляции, но может быть больше межмодового расстояния в плечах интерферометра ФП. Для малого индекса модуляции ($\beta < 1$) экспоненту в (1) можно разложить в ряд

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1(t) &\approx (A + \tilde{a}(t)) \times \\ &\times \{ J_0(\beta) + J_1(\beta) [\exp \{i\bar{\Omega} t\} - \exp \{-i\bar{\Omega} t\}] \}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $J_k(\beta)$ — функции Бесселя первого рода k -го порядка.

Целью последующего анализа является вычисление выходных сигналов в схеме (см. рисунок) с учетом медленных геофизических возмущений базы интерферометра. Для сравнения с экспериментом рассчитывается так называемый индекс геофизической модуляции, определяемый как отношение переменной части выходного напряжения к его постоянному уровню. Этот универсальный параметр удобен, поскольку не зависит от конкретных параметров установки, таких как интенсивность накачки, глубина модуляции Паунда–Драйвера, эффективности фотодетектора и др. Напротив, для оценки отношения сигнал/шум требуется знание этих параметров, а также шумовых свойств накачки, степени сейсмической изоляции зеркал и др.

3. ОТКЛИК ИНТЕРФЕРОМЕТРА НА ФАЗОМОДУЛИРОВАННУЮ НАКАЧКУ

Электромагнитное поле $E_2(t)$ на выходе оптической системы (см. рисунок) может быть представлено как квазигармонический процесс:

$$E_2(t) = \text{Re} \left[\tilde{E}_2(t) \exp (i\omega_0 t) \right].$$

Для вычисления комплексной огибающей $\tilde{E}_2(t)$ можно использовать импульсную характеристику $g(t)$ или передаточную функцию $G(\omega)$ оптической системы,

$$g(t) = \text{Re} [\tilde{g}(t) \exp (i\omega_0 t)] \leftrightarrow G(\omega).$$

Выходное поле E_2 определяется через интегральное уравнение Дюамеля (см. Приложение В):

$$\begin{aligned} E_2(t) &= E_1(t) * g(t) \rightarrow \tilde{E}_2(t) = \tilde{E}_1(t) * \tilde{g}(t), \\ \tilde{g}(t) &\leftrightarrow \tilde{G}(\omega), \quad \tilde{G}(\omega) = 2G(\omega_0 + \omega), \quad |\omega| \ll \omega_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Используя выражения (2) и (3), находим

$$\begin{aligned} \tilde{E}_2(t) &= \frac{1}{2} [A + \tilde{a}(t)] \left\{ J_0(\beta) \tilde{G}(0) + \right. \\ &+ J_1(\beta) \left[\tilde{G}^{(-)}(\bar{\Omega}) \cos \bar{\Omega} t + i \tilde{G}^{(+)}(\bar{\Omega}) \sin \bar{\Omega} t \right] \left. \right\}, \quad (4) \\ \tilde{G}^{(+)}(\bar{\Omega}) &= \tilde{G}(\bar{\Omega}) + \tilde{G}(-\bar{\Omega}), \\ \tilde{G}^{(-)}(\bar{\Omega}) &= \tilde{G}(\bar{\Omega}) - \tilde{G}(-\bar{\Omega}). \end{aligned}$$

На выходе фотодетектора электромагнитное поле E_2 порождает осциллирующее напряжение на модуляционной частоте $\bar{\Omega}$, пропорциональное квадрату

модуля амплитуды поля, $v(t) \propto |\tilde{E}_2(t)|^2$, представимое через свои квадратурные компоненты в виде

$$v(t) = v_c(t) \cos \bar{\Omega}t - v_s(t) \sin \bar{\Omega}t.$$

После фазового фотодетектирования в схеме Паунда–Дривера–Холла расчет квадратур $v_c(t)$, $v_s(t)$ приводит к следующим формулам:

$$\begin{aligned} v_s(t) &\propto \operatorname{Re} \left[\left(A\tilde{G}(0) + \tilde{a}(t) * \tilde{g}(t) \right)^* i\tilde{G}^{(+)}(\bar{\Omega}) \right], \\ v_c(t) &\propto \operatorname{Re} \left[\left(A\tilde{G}(0) + \tilde{a}(t) * \tilde{g}(t) \right)^* \tilde{G}^{(-)}(\bar{\Omega}) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Для представления структуры выходного сигнала в более наглядной форме следует получить выражение для передаточной функции интерферометра, используемой в (5).

3.1. Передаточная функция оптической системы со сложными зеркалами

Передаточная функция оптической системы, изображенной на рисунке, соответствует передаточной функции для эквивалентного интерферометра Майкельсона со сложными зеркалами. В качестве таких сложных зеркал выступают интерферометры ФП в плечах оптической системы. Коэффициенты отражения $R_1(\omega)$ и $R_2(\omega)$ сложных зеркал являются функциями частоты. Предполагая абсолютное (100%) отражение на концевых (удаленных) зеркалах в плечах интерферометра [12], получаем следующую довольно простую формулу для коэффициента отражения от плечевых резонаторов Фабри–Перо:

$$R_i(\omega) = \exp[i\phi_i(\omega)], \quad i = 1, 2,$$

где ϕ_i — разность фаз между падающим и отраженным от сложного зеркала светом. Она зависит от соотношения между частотой накачки и частотой оптического резонанса эталона ФП.

Простые вычисления для оптической системы приводят к следующему выражению:

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \frac{1}{2} \exp(-i\omega\tau) R_2(\omega) \times \\ &\times \left[1 - \exp\left(2i\omega \frac{\Delta l}{c}\right) \frac{R_1(\omega)}{R_2(\omega)} \right], \end{aligned} \quad (6a)$$

или в более компактной записи

$$G(\omega) = \exp(-i\omega\tau) R_2(\omega) H(\omega). \quad (6b)$$

Среди трех множителей в формуле (6b) принципиальная роль принадлежит третьему — $H(\omega)$. Первые

два члена не меняют абсолютного значения передаточной функции, внося несущественную задержку в отклик. В дальнейших вычислениях мы используем $H(\omega)$ как аппроксимацию $G(\omega)$:

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\omega) &= 2H(\omega_0 + \omega) \approx 1 - \exp\left[2i(\omega_0 + \omega) \frac{\Delta l}{c}\right] \times \\ &\times \exp(i\psi(\omega)), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\psi(\omega) = \varphi_1(\omega_0 + \omega) - \varphi_1(\omega_0 + \omega)$ — разность фазовых сдвигов световых пучков, отраженных от сложных зеркал, $\varphi_i(\omega) = \arg R_i(\omega)$, $i = 1, 2$.

Основное внимание далее будет уделено передаточной функции в области резонансных частот интерферометра ФП и области боковых частот радиомодуляции.

3.2. Передаточная функция на резонансных частотах

Обозначим $\Omega_{1,2}(k)$ резонансные частоты плеч в k -й резонансной зоне, сдвинутой относительно основной резонансной частоты $\Omega(0)$, соответствующей частоте накачки:

$$\Omega(k) = \Omega(0) + 2\pi k\nu, \quad k = 0, \pm 1, \dots,$$

где $\nu = c/2L$ — частота межмодового интервала. Длины плеч близки, но не одинаковы (разница около 10 см при длине около 3 км), т.е. $\nu_1 \approx \nu_2$. Малые изменения длин плеч для интерферометров ФП означают изменение собственной частоты их оптических резонансов. Учтем сдвиг резонансных частот вследствие деформаций плеч $\xi \rightarrow \xi_1, \xi_2$ следующим образом:

$$\Omega(0) = \omega_0(1 + \xi). \quad (8)$$

Используя формулу (7), можно прийти к следующему виду передаточной функции вблизи k -й резонансной зоны:

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\Omega(k)) &\approx 1 - \exp\left[i\left(\omega_0 \frac{2\Delta l}{c} + \psi_0\right)\right] \times \\ &\times \exp\left(ik \frac{\pi}{1-r} \frac{\Delta L}{L}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь r — коэффициент отражения входного зеркала интерферометра ФП; для дальнего (концевого) зеркала предполагается $r = 1$. Функция $\tilde{H}(\Omega(k))$ зависит от двух настроечных параметров: разности ΔL длин больших плеч сложных зеркал и разности Δl длин малых плеч интерферометра Майкельсона. Эти факторы не являются независимыми в процессе активного удержания рабочей точки — вариация

одного из них приводит к соответствующему изменению другого.

Условие темного пятна определено уравнением $\tilde{H}(\Omega(0)) = 0$ на частоте главного резонанса. Таким образом получаем условие для разности длин плеч интерферометра Майкельсона, оптимальной для настройки в рабочую точку, $\Delta l = \Delta l_{opt}$:

$$\Delta l_{opt} = \overline{\Delta l} - \lambda \frac{\psi_0}{4\pi}, \quad (10a)$$

где введены следующие обозначения

$$\overline{\Delta l} = k \frac{\lambda}{2}, \quad \psi_0 = \frac{2\pi}{1-r} \frac{L}{\lambda} \Delta \xi, \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (10b)$$

В результате этот относительный сдвиг фаз ψ_0 в (9) зависит от разности деформаций больших плеч, $\Delta \xi = \xi_1 - \xi_2$.

В режиме захвата оптические длины интерферометров ФП сложных зеркал удерживаются постоянными на квазистатических частотах (скажем, ниже 1 Гц) с деформационной точностью $\Delta \xi_{st} \sim 10^{-15}$ (смещение порядка 10^{-12} м для установки VIRGO). В высокочастотной области, где система обратной связи не работает и зеркала подвешены свободно, возможная деформация $\Delta \xi_{gw}$ индуцируется гравитационно-волновым воздействием. Полная деформация больших плеч может быть представлена как сумма остаточных низкочастотных (квазистатических) деформаций и относительно быстрых возмущений в гравитационно-волновой области частот ($10-10^4$ Гц для VIRGO):

$$\Delta \xi = \Delta \xi_{st} + \Delta \xi_{gw}.$$

Соответствующее относительное изменение фазы ψ_0 также содержит эти части:

$$\psi_0 = \psi_0^{(st)} + \psi_0^{(gw)}.$$

$$\psi_0^{(st)} = \frac{2\pi}{1-r} \frac{L}{\lambda} \Delta \xi^{(st)}, \quad \psi_0^{(gw)} = \frac{2\pi}{1-r} \frac{L}{\lambda} \Delta \xi^{(gw)}.$$

В резонансной области передаточная функция (6b), (9) может быть записана в виде

$$\tilde{H}_{\omega,k} \approx -i \left[\frac{4\pi}{\lambda} (\Delta l - \overline{\Delta l}) + \underbrace{\psi_0^{(st)} + \psi_0^{(gw)}}_{\psi_0} + k \frac{\pi}{1-r} \frac{\Delta L}{L} \right], \quad (11)$$

а в основном резонансе ($k = 0$) —

$$\tilde{H}_{\omega,0} \approx -i \left[\frac{4\pi}{\lambda} (\Delta l - \overline{\Delta l}) + \psi_0^{(st)} + \psi_0^{(gw)} \right]. \quad (12)$$

Естественно предположить, что в процессе удержания рабочей точки подстраивается только квазистатическая часть фазы ψ_0^{st} , т. е. условие темного пятна (10a) запишется как

$$\Delta l_{opt} = \overline{\Delta l} - \frac{\lambda}{4\pi} \psi_0^{(st)}.$$

Реальная система удержания зеркал всегда работает с конечной точностью. Обозначая ошибку позиционирования (сдвиг настройки) через δl , получаем

$$\Delta l = \Delta l_{opt} + \delta l = \overline{\Delta l} - \frac{\lambda}{4\pi} \psi_0^{(st)} + \delta l, \quad (13)$$

после чего формула (11) может быть приведена к следующему виду:

$$\tilde{H}_{\omega,k} \approx -i\pi \left[\frac{4}{\lambda} \delta l + \frac{\psi_0^{(gw)}}{\pi} + k \frac{1}{1-r} \frac{\Delta L}{L} \right]. \quad (14)$$

Для последующей оценки дисперсии выходного сигнала в схеме, данной на рисунке, полезно вычислить сумму квадратов передаточной функции на резонансных частотах, симметричных относительно центральной полосы:

$$\left| \tilde{H}_{\omega,1} \right|^2 + \left| \tilde{H}_{\omega,-1} \right|^2 \propto \left[\frac{4}{\lambda} \delta l + \frac{\psi_0^{(gw)}}{\pi} \right]^2 + \left[\frac{1}{1-r} \frac{\Delta L}{L} \right]^2, \quad (15)$$

Формулы (14), (15) будут использоваться для расчетов низкочастотного сигнала на выходе интерферометра (см. рисунок).

3.3. Передаточная функция на боковых модуляционных частотах

Важно найти значение передаточной функции на частотах $\omega \pm \Omega$, соответствующих боковым компонентам фазомодулированной накачки. Они играют роль гетеродина при фотодетектировании отраженного света в режиме темного пятна. Для нахождения передаточной функции на боковых частотах обратимся к формулам (6), (7), учитывая, что на этих частотах сложные зеркала интерферометров ФП находятся вне резонанса и их коэффициент отражения принимает тривиальный вид $R_i(\omega_0 \pm \bar{\Omega}) \approx -1$:

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\omega \pm \bar{\Omega}) &\approx 1 - \exp \left[2i(\omega_0 \pm \bar{\Omega}) \frac{\Delta L}{c} \right] \approx \\ &\approx -i \left(-\psi_0^{(st)} + 4\pi \frac{\delta l}{\lambda} \pm 2\bar{\Omega} \frac{\Delta L}{c} \right). \quad (16) \end{aligned}$$

Для вычисления фототока (4), (5) используем найденные ранее передаточные функции $\tilde{H}^{(+)}$, $\tilde{H}^{(-)}$, представленные в формулах (4), (6b). Используя выражение (14), получаем передаточную характеристику

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\omega^{(+)}(\bar{\Omega}) &= -2iQ_c, \quad Q_c \approx \left(4\pi\frac{\delta l}{\lambda} - \psi_0^{(st)}\right), \\ \tilde{H}_\omega^{(-)}(\bar{\Omega}) &= -2iQ_s, \quad Q_s \approx 2\bar{\Omega}\frac{\Delta l}{c}, \end{aligned} \quad (17a)$$

где для упрощения введены функции

$$\begin{aligned} Q_c &\approx \frac{2\pi L}{\lambda} \left(\frac{2\delta l}{L} - \frac{\Delta\xi_{st}}{1-r}\right), \\ Q_s &\approx \frac{2\pi L}{\lambda} \frac{2\bar{\Omega}}{\omega_0} \left(\frac{\bar{\Delta l}}{L} - \frac{2\pi}{1-r}\Delta\xi_{st} + \frac{\delta l}{L}\right). \end{aligned} \quad (17b)$$

Для последующего анализа особый интерес представляет следующая комбинация квадратурных компонент:

$$\begin{aligned} Q_c^2 + Q_s^2 &\propto \left(\frac{2\delta l}{L} - \frac{\Delta\xi_{st}}{1-r}\right)^2 + \\ &+ \mu^2 \left(1 - \frac{2\pi}{1-r}\frac{L\Delta\xi_{st}}{\bar{\Delta l}} + \frac{\delta l}{\bar{\Delta l}}\right)^2, \end{aligned} \quad (18a)$$

где введен малый параметр

$$\mu = \frac{2\bar{\Omega}\bar{\Delta l}}{\omega_0 L}. \quad (18b)$$

Из формулы (18b) следует, что $\mu \ll 1$. В формуле (18a) параметр μ стоит перед множителем в круглых скобках, который с хорошим приближением можно заменить на единицу.

4. ДИСПЕРСИЯ ШУМА НА ЧАСТОТЕ ЦИРКУЛЯЦИИ ФОТОНОВ

Вернемся к формулам квадратурных компонент (5) для вычисления соответствующих квадратур шума на выходе оптической системы (см. рисунок). Принимая во внимание шумовую структуру амплитуды $\tilde{E}_0(t)$ (линия и пьедестал), для спектральной плотности квадратур $v_s(t)$, $v_c(t)$ можно записать

$$\begin{aligned} N_c(\omega) &= N_0(\omega) [|H_\omega(\omega)|^2 + |H_\omega(-\omega)|^2] Q_c^2, \\ N_s(\omega) &= N_0(\omega) [|H_\omega(\omega)|^2 + |H_\omega(-\omega)|^2] Q_s^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Перекрестные энергетические спектры $N_{c,s}(\omega)$ описываются следующим выражением:

$$N_{c,s}(\omega) \propto iN_0(\omega) \left[|\tilde{H}_\omega(\omega)|^2 - |\tilde{H}_\omega(-\omega)|^2 \right] Q_c Q_s.$$

Процессы $v_c(t)$, $v_s(t)$ некоррелированы в совпадающие моменты времени. Это означает, что $|H_\omega(\omega)| = |H_\omega(-\omega)|$ и $N_{c,s}(\omega) = 0$. Для сравнения с экспериментом будем использовать дисперсию σ_0^2 выходного шума после синхронного детектирования на частоте межмодового интервала интерферометра. Она может быть найдена как усредненная спектральная плотность в полосе частот $\Delta\omega$ вблизи частоты межмодового интервала:

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{\nu-\Delta\omega}^{\nu+\Delta\omega} [N_c(\omega) + N_s(\omega)] d\omega \approx \\ &\approx \frac{2}{\pi} [N_c(\nu) + N_s(\nu)] \Delta\omega. \end{aligned}$$

Из (19) находим

$$\sigma_0^2 \propto (Q_c^2 + Q_s^2) \left[|\tilde{H}_{\omega,1}|^2 + |\tilde{H}_{\omega,-1}|^2 \right], \quad (20)$$

где $\Delta\omega$ — ширина фильтра для комплексного случайного процесса $v_0(t)$. Используя формулы (15), (18a), (19), можно записать выражение (20) в виде

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 &\propto \left[\left(\frac{2\delta l}{L} - \frac{\Delta\xi}{1-r}\right)^2 + \mu^2 \right] \times \\ &\times \left[\left(\frac{4\delta l}{\lambda} + \frac{\psi_0^{(gw)}}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{(1-r)^2} \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Полученная формула будет использована при обсуждении результатов.

4.1. Геофизический сигнал на частоте циркуляции фотонов

Физика взаимодействия оптических полей на выходе фотодетектора состоит в интерференции света на соседних, симметричных относительно частоты лазера модах и света на боковых частотах, возникающих вследствие фазовой модуляции. Последние играют роль гетеродина при фотодетектировании. Это отражено в формуле (20), которая представляет собой произведение квадратов модулей передаточной функции оптической системы на собственных частотах интерферометра и на радиомодуляционных частотах. Оба квадрата зависят от квазистатических вариаций $\Delta\xi_{st}$ длин плеч. После когерентного детектирования с частотой модуляции в составе низкочастотного спектра появляется компонента на частоте циркуляции фотонов. Ключевым условием появления этой компоненты является гипотеза «шумовой

засветки» мод, соседних с центральным резонансом. В отличие от работы [12], в которой рассматривалась только одна соседняя мода, мы учли выше обе моды, симметричные центральному резонансу. Это приводит к серьезному расхождению в оценках величины геофизического сигнала. Чтобы найти новую оценку, следует проанализировать дисперсию σ_0^2 выходного шума в формуле (21). Результат анализа сильно зависит от режима работы оптической схемы (настройки рабочей точки).

4.1.1. Режим темного пятна

Режим полной деструктивной интерференции, или режим темного пятна (темной полосы) рассматривается как основной рабочий режим гравитационно-волновых интерферометров. Он выбран с целью минимизации выходного оптического шума. Принимая $\delta l = 0$ в формуле (21), получаем, что выходная дисперсия зависит только квадратично от величины геофизической вариации $\Delta\xi_{st}$. В работах [11, 12] оценки дисперсии выходного шума содержат члены первого порядка по величине $\Delta\xi_{st}$. Такой результат получается вследствие игнорирования факта засветки двух соседних мод, симметричных относительно главного резонанса (в указанных работах рассматривался случай засветки только одной моды).

Тем не менее экспериментальные данные, полученные на гравитационно-волновой антенне LIGO [9–11], показывают наличие линейного эффекта, поскольку они содержат основные гармоники приливных деформаций. Наличие членов, пропорциональных $\Delta\xi_{st}$, можно объяснить, допуская некоторые отклонения от режима темного пятна. Анализ передаточной функции (21) показывает, что линейная зависимость выходной дисперсии σ_0^2 от медленных деформаций $\Delta\xi_{st}$ появляется при отказе от «идеального режима» темного пятна и предположения о наличии слабой засветки за счет небольшой расстройки ($\delta l \neq 0$), согласно формуле (13).

4.1.2. Режим серого пятна

Система стабилизации положения зеркал удерживает рабочую точку с некоторым смещением от идеального положения. В этом случае

$$\Delta l = \Delta l_{opt} + \delta l, \quad \delta l = \text{const} \neq 0. \quad (22)$$

Конечное постоянное смещение δl от условия темного пятна $\Delta l = \Delta l_{opt}$ приводит к ненулевой засветке на выходе интерферометра.

Из формул (18a), (20) получаем

$$\sigma_0^2 \propto Q_c^2 + Q_s^2 \propto \left(\frac{2\delta l}{L} - \frac{\Delta\xi_{st}}{1-r} \right)^2 + \mu^2,$$

где опущены члены $o(\mu^2)$. Эта дисперсия содержит как постоянную, так и переменную часть, отсюда относительный индекс модуляции оценивается следующей формулой:

$$m' \approx \frac{2\delta l}{L} \frac{\Delta\xi_{st}}{1-r} \left[\left(\frac{2\delta l}{L} \right)^2 + \mu^2 \right]^{-1}. \quad (23)$$

Малый параметр $\mu \ll 1$ (18b) разделяет два типа поведения индекса модуляции как функции стационарной отстройки δl от идеального режима деструктивной интерференции. При $\delta l > \mu L/2$ индекс модуляции растет с уменьшением отстройки:

$$m' \approx \frac{L\Delta\xi_{st}}{(1-r)\delta l}. \quad (24)$$

Максимальное значение m' соответствует отстройке $\delta l = \mu L/2$:

$$m' = \frac{\Delta\xi_{st}}{\mu(1-r)}. \quad (25)$$

Дальнейшее уменьшение отстройки ведет к исчезновению эффекта модуляции линейно по $\delta l < \mu L/2$:

$$m' \approx \frac{2\delta l\Delta\xi_{st}}{\mu^2 L(1-r)}. \quad (26)$$

Таким образом, подбирая величину отстройки δl в сером пятне можно менять индекс модуляции.

Приведем численные оценки. Возьмем значения технических параметров интерферометра близкие к имеющимся в установках LIGO и VIRGO: частота оптической накачки $\omega_0 = 2 \cdot 10^{15}$ рад/с, радиочастота модуляции $\Omega = 6 \cdot 10^7$ рад/с, разность малых плеч интерферометра Майкельсона $\Delta l \approx 20\text{--}30$ см, длина и разность больших плеч интерферометра ФП $L = 3\text{--}4$ км, $\Delta L = 1\text{--}3$ см. Тогда для параметра μ получим следующую среднюю оценку:

$$\mu = \frac{2\bar{\Omega}}{\omega_0} \frac{\Delta l}{L} \approx 4 \cdot 10^{-12}. \quad (27)$$

При этом индекс модуляции достигает своего максимума (25) для отстройки $\delta l \approx 5 \cdot 10^{-3}\lambda$.

Рассмотрим альтернативные гипотезы объяснения наблюдаемого эффекта модуляции частоты циркуляции фотонов в больших плечах интерферометра.

1) *Релятивистский эффект изменения оптического показателя преломления вследствие наличия приливного гравитационного потенциала* [12].

В этом случае $\Delta\xi_{st} \approx 10^{-19}$. Подставляя численные величины в (24) даже с оптимальной величиной отстройки $\delta l = 5 \cdot 10^{-3}\lambda$ получаем индекс модуляции $m \approx 0.001\%$, что на три порядка меньше наблюдаемой в эксперименте величины [9].

2) *Эффект остаточных приливных деформаций плеч интерферометра.* Точность удержания положения зеркал составляет 10^{-10} см. Если предположить наличие остаточной приливной деформации больших плеч на этом уровне, то получаем $\Delta\xi_{st} \approx 10^{-15}$. При отстройке порядка $\delta l \approx 10^{-2}\lambda$ получаем оценку индекса модуляции $m \approx 4\%$, находящуюся в хорошем согласии с наблюдаемым эффектом [9].

4.2. Геофизический сигнал в рабочем диапазоне частот

Выше был исследован механизм влияния квазистатических геофизических возмущений на частоту циркуляции фотонов (межмодового интервала) с целью объяснения наблюдений, представленных в работах [9–11]. Как оказалось, это может быть результатом медленного изменения передаточной функции оптической системы. Остаточные деформации плеч вызывают изменения резонансных частот интерферометра ФП, которые через параметрический механизм преобразуются в оптический диапазон. После когерентной демодуляции эти сигналы могут быть выделены с помощью соответствующего полосового фильтра.

Следует отметить, что частота циркуляции фотонов является одной из многих в спектре выходного сигнала. Ее появление требует специального условия — засветки мод, соседних с основной модой. Однако, очевидно, что медленные вариации передаточной функции оптической системы должны влиять также на другие гармоники в выходном спектре интерферометра. Используя развитый формализм, можно показать, что произвольно выбранная гармоника из рабочих частот на выходе интерферометра будет модулирована геофизическими возмущениями.

Рассмотрим чисто гармоническую накачку в зоне центрального резонанса,

$$\tilde{E}_0(t) = A, \quad \tilde{a}(t) = 0.$$

Тогда из формулы (5) для квадратурных компонент имеем

$$v_c(t) \propto A \operatorname{Re} \left[\tilde{G}^*(0) \tilde{G}^{(-)}(\bar{\Omega}) \right] \propto A \operatorname{Re} \left[\tilde{H}^*(0) \tilde{H}^{(-)}(\bar{\Omega}) \right]. \quad (28)$$

При работе интерферометра в режиме темного пятна ($\Delta l = \Delta l_{opt}$, $\delta l = 0$) из формулы (14) получаем

$$k = 0, \delta l = 0: \quad \tilde{H}^*(0) \approx i\psi_0^{(gw)}. \quad (29)$$

Важно отметить, что для квазистатической деформации $\Delta\xi_{st}$ передаточная функция $\tilde{H}^*(0)$ равна нулю в режиме темного пятна. При условии $\Delta l = \Delta l_{opt}$ передаточная функция оптической системы на боковых частотах $\omega_0 \pm \bar{\Omega}$ согласно (17а) имеет вид

$$\tilde{H}^{(-)}(\bar{\Omega}) \approx -2iQ_s, \quad Q_s \approx 2\bar{\Omega} \frac{\Delta l_{opt}}{c}. \quad (30)$$

Комбинируя формулы (28), (29), (30) приходим к следующему результату:

$$v_c(t) \propto A\psi_0^{(gw)} \bar{\Omega} \frac{\Delta l_{opt}}{c} \propto \psi_0^{(gw)} \left(1 - \frac{1}{2(1-r)} \frac{L}{\Delta l} \Delta\xi_{st} \right). \quad (31)$$

Рассмотрим физический смысл множителя $\psi_0^{(gw)}$. Это сигнал, спектр которого лежит в полосе приема гравитационно-волнового интерферометра. Из формулы (11) следует, что спектральные компоненты этого сигнала будут модулированы медленными геофизическими деформациями $\Delta\xi_{st}$ с индексом модуляции, заданным формулой

$$m \approx \frac{L\Delta\xi_{st}}{2(1-r)\Delta l}. \quad (32)$$

Сравнение выражений (32) и (24) показывает, что параметр δl в (24) заменен большей величиной $\frac{\Delta l}{2}$ (10b). Таким образом, может показаться, что здесь эффект геофизической модуляции заметно меньше аналогичного эффекта на частоте межмодового интервала. Однако здесь он имеет место в режиме темного пятна, когда модуляция на частоте циркуляции фотонов отсутствует.

5. ИНТЕРФЕРОМЕТР С ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ НАКАЧКОЙ

Выше мы проанализировали возможный механизм проникновения геофизических сигналов на главный выход (антисимметричный порт) гравитационно-волновых интерферометров. Эффект может быть достаточно большим на частоте межмодового

интервала в режиме серого пятна. Однако его появление носит случайный характер, связанный с шумовой засветкой мод, соседних с главным резонансом. Для того чтобы сделать этот эффект более регулярным и надежным, следует ввести двухкомпонентную накачку для регулярной подсветки сразу двух соседних мод. В этом случае появление достаточно мощной гармоники на частоте межмодового интервала на основном выходе интерферометра было бы гарантировано. Ниже представлено вычисление величины эффекта геофизической модуляции в случае двухкомпонентной накачки.

Предположим, что излучение лазера накачки $E_0(t)$ представлено суперпозицией $E_0(t) = E_{0,0}(t) + E_{0,1}(t)$ двух волн

$$E_{0,k} = \text{Re} \left[\tilde{E}_{0,k}(t) \exp(i\omega_k t) \right]$$

с близкими резонансными частотами $\omega_0 \sim \omega_1 = \omega_0 + 2\pi\nu$. Тогда вместо комплексной амплитуды $\tilde{E}_0(t)$ в формулу (1) подставляем выражение

$$\tilde{E}_0(t) = \tilde{E}_{0,0}(t) + \tilde{E}_{0,1}(t) \exp(2\pi i\nu t), \quad (33)$$

где ν — частота циркуляции фотонов. Как и ранее, комплексные огибающие $\tilde{E}_1(t)$ и $\tilde{E}_2(t)$ связаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1(t) &= \tilde{E}_0(t) [J_0(\beta) + 2iJ_1(\beta) \cos \bar{\Omega}t], \\ \tilde{E}_2(t) &= \tilde{E}_1(t) * \tilde{g}(t). \end{aligned}$$

В квазистатическом приближении (величина $\tilde{E}_0(t)$ меняется медленно по отношению к $\cos \bar{\Omega}t$ и $\sin \bar{\Omega}t$) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{E}_2(t) &\approx J_0(\beta) [\tilde{E}_0(t) * \tilde{g}(t)] + \\ &+ 2iJ_1(\beta) \tilde{E}_0(t) [\cos \bar{\Omega}t * \tilde{g}(t)]. \end{aligned} \quad (34)$$

Тогда аналог формулы (4) запишется в виде

$$\begin{aligned} \tilde{E}_2(t) &\approx J_0(\beta) [\tilde{E}_0(t) * \tilde{G}(0)] + \\ &+ iJ_1(\beta) \tilde{E}_0(t) [\tilde{G}^{(+)}(\bar{\Omega}) \cos \bar{\Omega}t + i\tilde{G}^{(-)}(\bar{\Omega}) \sin \bar{\Omega}t], \end{aligned}$$

где $\tilde{G}^{(+)}$ и $\tilde{G}^{(-)}$ по-прежнему определяются формулами (4).

На выходе фотодетектора квадратурные компоненты частоты циркуляции определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} v_c(t) &\propto \text{Re} \left[[\tilde{E}_0(t) * \tilde{g}(t)]^* i\tilde{E}_0(t) \tilde{G}^{(+)}(\bar{\Omega}) \right], \\ v_s(t) &\propto \text{Re} \left[[\tilde{E}_0(t) * \tilde{g}(t)]^* \tilde{E}_0(t) \tilde{G}^{(-)}(\bar{\Omega}) \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Отличие этих выражений от формул (5) заключается в учете переменной комплексной амплитуды $\tilde{E}_0(t)$ (33) (построенная часть \tilde{E}_0 в (5) ранее опускалась). Таким образом, выражение (35) учитывает нелинейные члены фотодетектирования.

Рассмотрим простейший случай двухкомпонентной накачки:

$$\tilde{E}_{0,0}(t) = A_0, \quad \tilde{E}_{0,1}(t) = A_1 \exp(i\vartheta), \quad A_1 = \text{const.}$$

На практике начальная фаза ϑ неизвестна. В дальнейших вычислениях предполагается, что фаза ϑ является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале $(0, 2\pi)$. Тогда выражение (33) сводится к виду

$$\tilde{E}_0(t) = A_0 + A_1 \exp[i(\nu t + \vartheta)], \quad (36)$$

а первый множитель в (35) будет выглядеть следующим образом:

$$[\tilde{E}_0(t) * \tilde{g}(t)] = A_0 \tilde{H}(0) + A_1 \exp[i(\nu t + \vartheta)] \tilde{H}(\nu),$$

где, согласно (6b), вместо полной формы передаточной функции \tilde{G} мы использовали ее основной фактор \tilde{H} .

Фильтрация выходного сигнала в узкой полосе вблизи частоты циркуляции фотонов дает

$$\begin{aligned} &[\tilde{E}_0(t) * \tilde{g}(t)]^* \tilde{E}_0(t) \approx \\ &\approx A_0 A_1 \left[(H(0) + \tilde{H}(\nu))^* \cos(\nu t + \vartheta) + \right. \\ &\quad \left. + i(\tilde{H}(0) - \tilde{H}(\nu))^* \sin(\nu t + \vartheta) \right] + \\ &\quad + \text{high harmonics.} \end{aligned} \quad (37)$$

Для передаточных функций $H(0)$ и $H(\nu)$ на резонансных модах используем соотношение (11) с подстановкой ψ_0 через $\Delta\xi$. В итоге первый множитель в (37) может быть переписан в виде

$$\tilde{H}(k\nu) \approx \tilde{H}(0) - i\pi k \frac{1}{(1-r)} \frac{\Delta L}{L}, \quad k = 0, \pm 1, \dots,$$

где

$$\tilde{H}(0) \approx -i \frac{4\pi}{\lambda} \left[(\Delta l - \bar{\Delta}l) + \frac{L}{2(1-r)} \Delta\xi_{st} \right].$$

Вводим новые переменные $M^{(+)}$ и $M^{(-)}$ как

$$\begin{aligned} (\tilde{H}(0) + \tilde{H}(\nu))^* &\approx i\pi M^{(+)}, \\ (\tilde{H}(0) - \tilde{H}(\nu))^* &\approx -i\pi M^{(-)}, \end{aligned}$$

где

$$M^{(+)} \approx \frac{8}{\lambda} \left[(\Delta l - \overline{\Delta l}) + \frac{L}{2(1-r)} \Delta \xi_{st} + \frac{\lambda}{8(1-r)} \frac{\Delta L}{L} \right], \quad (38)$$

$$M^{(-)} \approx \frac{1}{1-r} \frac{\Delta L}{L} = \text{const},$$

что позволяет представить первый множитель в выражениях (35), (37) в более компактной форме (резонансная область):

$$\left[\tilde{E}_0(t) * \tilde{g}(t) \right]^* \tilde{E}_0 \approx iM^{(+)} \cos(\nu t + \vartheta) + M^{(-)} \sin(\nu t + \vartheta) + \text{high harmonics}. \quad (39)$$

С помощью формул (16), (17а) передаточная функция в области боковых частот может быть записана как

$$\tilde{H}^{(+,-)}(\bar{\Omega}) \approx -i \frac{4\pi}{\lambda} \left[(\Delta l - \overline{\Delta l}) + \frac{\bar{\Omega}}{\omega_0} \Delta l \right],$$

или в виде полезных комбинаций:

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{(+)}(\bar{\Omega}) &\approx iQ_c, & Q_c &= -8\pi i \frac{\Delta l - \overline{\Delta l}}{\lambda}, \\ \tilde{H}^{(-)}(\bar{\Omega}) &\approx iQ_s, & Q_s &= 8 \left(\frac{\bar{\Omega}}{\omega_0} \right) \frac{(\Delta l - \overline{\Delta l}) + \overline{\Delta l}}{\lambda}. \end{aligned} \quad (40)$$

Подставляя (39), (40) в (35), получаем

$$v_c(t) \propto \text{Re} \left[\left(iM^{(+)} \cos(\nu t + \vartheta) + M^{(-)} \sin(\nu t + \vartheta) \right) \times \right. \\ \left. \times 2Q_c \right] + \dots,$$

$$v_s(t) \propto \text{Re} \left[\left(iM^{(+)} \cos(\nu t + \vartheta) + M^{(-)} \sin(\nu t + \vartheta) \right) \times \right. \\ \left. \times (-2i)Q_s \right] + \dots$$

В итоге выражения для квадратурных компонент выходного сигнала принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} v_c(t) &\propto Q_c M^{(-)} \sin(\nu t + \vartheta) + \dots, \\ v_s(t) &\propto Q_s M^{(+)} \cos(\nu t + \vartheta) + \dots \end{aligned} \quad (41)$$

Известно, что при случайной равномерно распределенной начальной фазе ϑ оптимальной наблюдаемой переменной («достаточной статистикой») является квадрат огибающей на частоте циркуляции,

$$\Theta(\Delta \xi_{st}) = \left(Q_c M^{(-)} \right)^2 + \left(Q_s M^{(+)} \right)^2. \quad (42)$$

Разлагая данное выражение по малому параметру $\Delta \xi_{st}$ (38), получаем оценку индекса амплитудной модуляции в виде

$$m = \left[\frac{d}{d\Delta \xi_{st}} \ln \Theta(\Delta \xi_{st}) \right]_{\Delta \xi_{st}=0}. \quad (43)$$

Для конкретизации этой формулы выберем простой случай, в котором $\Delta l = \overline{\Delta l}$, т.е. разность длин малых плеч интерферометра Майкельсона равна целому числу оптических полуволн (что, в общем случае, соответствует режиму серого пятна). Тогда из выражений (38), (40) получаем

$$Q_c = 0, \quad Q_s = 8 \frac{\bar{\Omega}}{\omega_0} = \text{const},$$

$$M^{(+)} = \frac{\Delta L}{(1-r)L} \left[1 + \frac{L \Delta \xi_{st}}{\lambda} \frac{L}{\Delta L} \right], \quad M^{(-)} = \text{const}.$$

Наконец, из формул (42), (43) находим следующую оценку индекса модуляции:

$$m \approx \frac{L \Delta \xi_{st}}{\lambda} \frac{L}{\Delta L}. \quad (44)$$

Для всех трех выражений (24), (32), (44) «индекса геофизической модуляции» ниже выполнен сравнительный анализ с обсуждениями результатов.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Цель нашего исследования заключалась в более строгом по сравнению с работами [11, 12] анализе механизма проникновения слабых геофизических возмущений на главный, относительно высокочастотный, выход (дифференциальный порт) гравитационно-волнового интерферометра. Мы пришли к следующим заключениям.

а) Сигналы геофизической природы вызывают амплитудную модуляцию частоты циркуляции фотонов (или частоты межмодового интервала). Такая компонента возникает в результате шумовой «паразитной» засветки мод, соседних с главным резонансом. Это может быть следствием неидеальной монохроматичности оптической накачки интерферометра (реальная накачка), которая помимо узкой центральной линии содержит малоинтенсивный пьедестал с широким (больше межмодового интервала) спектром амплитудных флуктуаций. Медленные геофизические возмущения базы интерферометра меняют его оптическую передаточную функцию, вследствие чего гармоника частоты циркуляции фотонов оказывается амплитудно-модулированной с частотой геофизических сигналов. В принципе, это

позволяет нам считать информацию о геофизических процессах. Более строгий по сравнению с [11, 12] анализ, проведенный в данной работе, показал, что эффект «геофизической модуляции» исчезает в первом порядке в режиме темного пятна благодаря компенсирующим вкладам соседних мод, симметричных относительно главного резонанса. Показано, что линейная зависимость от геофизических деформаций может быть восстановлена при переходе от режима темного пятна к режиму серого пятна, допускающего слабую остаточную засветку интерференции. При реалистической остаточной засветке такой механизм позволяет объяснить наблюдения приливных гармоник в эксперименте LIGO, которые, по-видимому, являются результатом остаточной (нескомпенсированной) деформации плеч интерферометра на уровне за порогом чувствительности схем, контролирующей положение зеркал.

б) При строго монохроматической оптической накачке (идеальная накачка) частота циркуляции фотона отсутствует в выходном спектре интерферометра. Тем не менее даже в таком случае информация о геофизических сигналах может быть считана с главного выхода. В такой ситуации это может быть реализовано с помощью демодуляции произвольно выбранной гармоники из выходного спектра. Причина этого кроется в той же самой зависимости оптической передаточной функции от остаточных деформаций базы интерферометра. Однако индекс амплитудной модуляции произвольно выбранной гармоники будет значительно ниже, чем в случае частоты циркуляции фотонов. С другой стороны, интенсивность такой гармоники будет выше интенсивности соседних мод, засвеченных за счет слабых амплитудных флуктуаций накачки. Частично это должно компенсировать уменьшение индекса модуляции.

в) Физическая картина, представленная в предыдущих двух пунктах (а, б), стимулирует рассмотрение схемы интерферометра с двухкомпонентной накачкой, одновременно проводящей засветку двух соседних резонансных мод интерферометра ФП (модель двухкомпонентной накачки). Такая модель возвращает возможность регистрации геофизических процессов через частоту циркуляции фотонов, но с очевидным дополнительным преимуществом. Отсутствует эффект взаимного погашения мод, симметричных относительно главного резонанса, интенсивности обеих компонент сравниваются и значительно превышают уровень амплитудных флуктуаций. Такого рода модернизация ведет к значительному усилению геофизического отклика и радикально повы-

шает отношение сигнала к естественному шумовому фону. При этом чувствительность к геофизическим сигналам будет определяться только внешними окружающими шумами (приближение «идеального прибора»).

Для численной иллюстрации интересно привести оценки индекса модуляции (27), (32), (44), используя соответствующие параметры установок LIGO и VIRGO. Значение квазистатических остаточных деформаций, нескомпенсированных контрольными схемами, составляет $\Delta\xi_{st} \leq 10^{-15}$. Длина больших плеч интерферометра $L = 3-4$ км. Асимметрия плеч $\Delta L \sim 1$ см и $\overline{\Delta l} \approx 30$ см (см. [11]). Значение параметра расстройки выбрано в соответствии с шириной оптического резонанса интерферометров ФП, $\delta l \approx 10^{-2}\lambda$.

Прежде всего, сравним случаи реальной зашумленной (24) ($m = m_r$) и идеальной монохроматической (32) ($m = m_i$) накачек. Для отношения индексов модуляции имеем

$$\frac{m_r}{m_i} = \frac{\overline{\Delta l}}{\delta l} \sim 10^7.$$

Эта оценка демонстрирует малость эффекта модуляции произвольных шумовых гармоник.

Сопоставим теперь случаи двухкомпонентной (44) ($m = m_d$) и реальной накачек:

$$\frac{m_d}{m_r} = \frac{\delta l}{\Delta l} \frac{L}{\lambda} (1 - r) \sim 1,$$

т. е. индексы модуляции оказываются одного порядка. Напомним, что оба случая соответствуют работе интерферометра в режиме серого пятна.

Далее интересно оценить уровень выходного геофизического сигнала, который зависит не только от индекса модуляции, но и от амплитуды соответствующей несущей частоты. В случае реальной накачки это есть амплитуда гармоники частоты циркуляции фотонов на выходе фотодетектора, изображенного на рисунке. Она является результатом гетерогенного смешивания гармоник соседних мод и боковой модуляционной компоненты накачки. Для установки LIGO гармоники соседних мод имеют спектральную амплитуду $E_{\pm} \approx 10^{-7} E_0$ Гц $^{-1/2}$, приведенную в [11]. При ширине оптического резонанса примерно 200 Гц имеем следующую оценку стандарта амплитуды: $E_{\pm} \sim 10^{-6} E_0$.

Для оценки при идеальной монохроматической накачке требуется знание амплитуды флуктуаций выходных гармоник в частотной зоне максимальной чувствительности. Такую оценку можно дать на основе кривой чувствительности установки LIGO.

Используем тривиальную формулу для изменений интенсивности ΔI в интерферометре Фабри–Перо, вызванных вариациями базы:

$$\Delta I \approx I_0 \frac{2\pi L}{\lambda} F \frac{\Delta x}{L};$$

здесь F — резкость резонансов в интерферометре ФП. Значение деформации может быть выбрано в соответствии с соотношением $\Delta x/L \approx h_\nu \sqrt{\Delta\nu} \approx \approx h_{min} \sim 10^{-21}$ (используя $h_\nu \sim 10^{-22}$ Гц^{-1/2}, $\Delta\nu \approx \approx 200$ Гц для области максимальной чувствительности). В итоге приходим к оценке стандартной амплитуды выходных гармоник

$$\langle \Delta E_{fl} \rangle \approx \sqrt{\Delta I} \sim 10^{-3} E_0,$$

что значительно превышает величину шумовой амплитуды в соседних модах.

Теперь сравним величину геофизического отклика ΔI для реальной зашумленной и идеальной монохроматической накачек. Соответствующее отношение будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\Delta I_r}{\Delta I_i} = \frac{E_\pm m_r}{E_{fl} m_i} \sim 10^4,$$

что вновь демонстрирует значительное преимущество проведения измерений на частоте циркуляции фотонов в качестве несущей.

При использовании двухкомпонентной накачки выгода многократно возрастает. Действительно, индексы модуляции для реальной и двухкомпонентной накачек являются величинами одного порядка. Это означает, что величина геофизического сигнала в режиме двухкомпонентной накачки должна быть увеличена в $E_0/E_\pm \sim 10^6$ раз по сравнению с режимом обычной реальной накачки.

Приводя данные результаты, нельзя не затронуть вопрос вклада зеркала рециркуляции мощности, которое присутствует в реальной схеме интерферометра. Такая конструкция была нами проанализирована ранее [16]. В связи с громоздкими вычислениями, которых требует полный анализ, мы приведем здесь только качественное описание полученных результатов. Метод анализа в работе [16] был аналогичен использованному в данной статье, а именно: полная схема сводилась к «эквивалентному» интерферометру ФП с базой l_R , состоящему из зеркала рециркуляции мощности и сложного зеркала конструкции Фабри–Перо–Майкельсона (см. рисунок). В приближении геометрической оптики передаточная функция «эквивалентного» интерферометра ФП зависит от длины базы l_R , коэффициентов отражения r_R и пропускания τ_R зеркала рециркуляции и аналогичных параметров r_M ,

τ_M для эквивалентного зеркала конструкции Фабри–Перо–Майкельсона. Последние параметры в свою очередь зависят от деформаций ξ_1, ξ_2 плеч. Коэффициент пропускания эквивалентного зеркала фактически определяется передаточной функцией схемы без рециркуляции $\tau_M \propto G(\omega, \Delta\xi)$, которая равна нулю в режиме темного пятна. Геофизическая информация однако сохраняется в коэффициенте отражения $r_M = r_M(\omega, \xi_1, \xi_2)$. Таким образом, схема с рециркуляцией позволяет извлечь информацию о геофизических процессах даже в режиме темного пятна, поскольку исчезает взаимное гашение линейного эффекта в симметричных относительно главного резонанса модах. Регулируя параметр базы l_R в координации с длинами малых плеч интерферометра Майкельсона, можно добиться оптимальной настройки всей системы. При этом интенсивность геофизического сигнала будет увеличена на фактор «эквивалентного» интерферометра ФП. В результате выводы, касающиеся эффекта геофизической модуляции в рабочей полосе приема гравитационно-волнового интерферометра и на частоте циркуляции фотонов, остаются в силе (детали см. в [16]).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный в данной статье анализ был сконцентрирован на физических механизмах проникновения низкочастотных сигналов на главный выход гравитационно-волнового интерферометра. Вскрыта их параметрическая природа, связанная с медленными геофизическими вариациями передаточной функции инструмента.

В заключение кратко рассмотрим возможные приложения этих механизмов к проведению некоторых фундаментальных экспериментов: измерение слабых глобальных геофизических эффектов и детектирование низкочастотных гравитационных волн [11].

Такой анализ предполагает сравнение ожидаемой величины сигнала с уровнем шумового фона, воздействующего на инструмент. Требуется указание оценочного спектра плотности мощности фоновых стохастических деформаций. Косвенные оценки могут быть получены по данным геофизического канала VIRGO (сигналы контрольных драйверов зеркал) с помощью данных серий VSR2/VSR1, представленных в [8, 17]. После вычитания «теоретической приливной компоненты» была сделана оценка остаточного шума деформаций: 10^{-12} – 10^{-11} Гц^{-1/2} в частотном интервале 0.1–0.01 Гц. Известно, что

именно в этом частотном диапазоне происходит завал спектральной плотности мощности сейсмического шума.

Для независимой оценки могут быть также использованы данные вертикальных сейсмических ускорений a_ω в спокойных подземных шахтах [18, 19]: $\langle a_\omega \rangle \sim 10^{-7} \text{ см/с}^2 \cdot \text{Гц}^{1/2}$. Полагая, что в грубом приближении величина горизонтальных и вертикальных сдвигов примерно одинакова, приходим к следующим оценкам для амплитуды шумовых деформаций $\Delta x \approx \langle a_\omega \rangle \omega^{-2} \sim 10^{-7} - 10^{-6} \text{ см/Гц}^{1/2}$. Нормировка на размер плеча интерферометра ведет к значениям деформационного уровня шума, близким к оценкам, полученным по данным VIRGO. Разумеется, это нижняя оценка уровня шума, которую мы будем использовать ниже при анализе задач детектирования слабого гравитационного сигнала.

Геофизические гравитационные эффекты

В ряду глобальных, но слабых геофизических процессов, находящихся в сфере интересов современной геодинамики, присутствуют относительно высокочастотные явления, такие как короткие приливные гармоники (с периодами 4–6 ч), высокочастотные Земные моды (с периодами около 0.1 ч) и близкие группы гармоник, составляющие резонанс «жидкого ядра» (с периодами примерно 24 ч) [19]. Все эти процессы соответствуют возмущениям гравитационного поля $\Delta g/g \sim \Delta L/L \sim 10^{-10} - 10^{-9}$ (где g — гравитационное ускорение). Пользуясь предположением, что деформационный уровень шума, оцененный выше, может быть экстраполирован в область частот $10^{-5} - 10^{-4} \text{ Гц}$, приходим к позитивному ответу о возможности измерения высокочастотных эффектов. Актуальной «горячей точкой» современной геодинамики является изучение «осцилляций внутреннего ядра» [20]. Период таких осцилляций составляет около 3–4 ч с амплитудой отклонения от центра Земли около 1 м, при этом ожидаемая безразмерная амплитуда сигнала будет $10^{-11} - 10^{-10}$. Таким образом, подобные осцилляции могут быть также измерены при условии накопления данных на интервале в несколько десятков колебательных циклов.

Низкочастотные гравитационные волны

Существующие астрофизические прогнозы ожидаемой интенсивности гравитационных волн не являются оптимистичными. Интересующий нас частотный интервал $10^{-4} - 1 \text{ Гц}$ частично пересекается с интервалом проекта LISA [21]. К числу потенциальных источников гравитационных волн в этом

интервале можно отнести белые карлики в нашей Галактике, тесные сверхплотные двойные, релятивистские звезды, падающие на сверхмассивную черную дыру в центре нашей Галактики. Статистически достоверный прогноз верхней границы на амплитуду гравитационно-волнового излучения в проекте LISA составляет $h \sim 10^{-20}$ [21]. В качестве более благоприятной модели источника можно рассмотреть тесную двойную из двух белых карликов (с периодом около 100 с), удаленную на расстояние 100 пк. Забывая про такой показатель, как число событий в единицу времени, найдем оценки непрерывной амплитуды гравитационной волны на Земле: $h \sim 10^{-19}$. Слияние такой двойной звезды в центре нашей Галактики на расстоянии 10 кпк породит всплеск гравитационных волн (длительность около 10 с) с подобной же амплитудой $h \sim 10^{-19}$ [22]. Только для весьма искусственного примера — слияния нейтронной звезды и черной дыры ($10M_\odot$) на расстоянии 1 кпк — мы можем ожидать гравитационно-волновой импульс с амплитудой $h \sim 10^{-17}$ при несущей частоте порядка 1 Гц. Даже для таких гиперболизированных случаев вероятность регистрации крайне мала: при шуме $10^{-12} \text{ Гц}^{-1/2}$ после одного года накопления непрерывного гравитационно-волнового сигнала может быть достигнута чувствительность $h_{min} \approx 2 \cdot 10^{-16} \text{ Гц}^{-1/2}$.

Тем не менее для будущих гравитационно-волновых детекторов третьего поколения, которые будут располагаться на большой глубине (1 км) ожидается понижение уровня фонового шума на два порядка [23, 24]. Это сделает задачу наземной регистрации низкочастотных гравитационных волн не столь безнадёжной.

Авторы признают стимулирующую роль проф. А. Melissinos в развитии данного исследования. Мы также благодарны коллегам А. Giazotto, J. Y. Vinet и F. Ferrini из группы EGO-VIRGO за многочисленные дискуссии. Особо мы хотим поблагодарить группу La Sapienza, VIRGO (F. Ricci, S. Frasca и E. Majorana), оказавшую нам помощь в понимании деталей работы контрольных цепей установки VIRGO.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Метод комплексной огибающей

Для стационарных линейных передающих систем с импульсной характеристикой $g(t)$ выходной

сигнал $y(t)$ связан с входным сигналом $x(t)$ через интегральное соотношение Дюамеля:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)x(\tau)d\tau \equiv g(t) * x(t). \quad (\text{A.1})$$

Для комплексных огибающих $\tilde{x}, \tilde{g}(t)$ справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{Re} [\tilde{x}(t) \exp(i\omega_0 t)] = \\ &= \frac{1}{2} [\tilde{x}(t) \exp(i\omega_0 t) + \tilde{x}^*(t) \exp(-i\omega_0 t)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(t) &= \text{Re} [\tilde{g}(t) \exp(i\omega_0 t)] = \\ &= \frac{1}{2} [\tilde{g}(t) \exp(i\omega_0 t) + \tilde{g}^*(t) \exp(-i\omega_0 t)]. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\tilde{g}(t)$ является медленно меняющейся функцией на временах ω_0^{-1} , имеем

$$\tilde{g}(t) \approx 2g(t) \exp(-i\omega_0 t).$$

Вместо импульсной характеристики можно использовать передаточную функцию $G(\omega) \leftrightarrow g(t)$ в вещественной и комплексной формах:

$$\tilde{g}(t) \leftrightarrow \tilde{G}(\omega) = 2G(\omega_0 + \omega), \quad |\omega| \ll \omega_0,$$

где была учтена узкополосность $G(\omega)$. Несложно показать, что выражение (A.1) также применимо для случая комплексных огибающих:

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(t - \tau)\tilde{x}(\tau)d\tau = \frac{1}{2} \tilde{g}(t) * \tilde{x}(t).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Выходное поле интерферометра

Накачка на входе схемы

$$E(t) = E_0 \cos(\omega_0 t + \beta \sin \bar{\Omega} t) = \text{Re} [\tilde{E}(t) \exp(i\omega_0 t)],$$

$$\tilde{E} = E_0 \exp(i\beta \sin \bar{\Omega} t).$$

Используя известное разложение

$$\exp(iz \sin t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z) \exp(imt),$$

$$J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z),$$

где $J_m(z)$ — функции Бесселя, приходим к выражению

$$\tilde{E} \propto J_0(\beta) + J_1(\beta) [\exp(i\bar{\Omega} t) - \exp(-i\bar{\Omega} t)] + \dots$$

Таким образом, связь входного и выходного поля имеет вид

$$\begin{aligned} E_2 &= \tilde{E}_1(t) * \tilde{g}(t) \propto J_0(\beta) \bar{G}(0) + \\ &+ J_1(\beta) [\tilde{G}(\bar{\Omega}) \exp(i\bar{\Omega} t) - \tilde{G}(-\bar{\Omega}) \exp(-i\bar{\Omega} t)]. \end{aligned}$$

Заменяя экспоненты на гармонические функции,

$$\exp(\pm i\bar{\Omega} t) = \cos \bar{\Omega} t \pm i \sin \bar{\Omega} t,$$

приходим к выражению (4) в тексте работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Копаев, В. Н. Руденко, Письма в ЖЭТФ **59**, 630 (1994).
2. V. N. Rudenko, Phys. Lett. A **223**, 421 (1996).
3. V. N. Rudenko and S. L. Pasynok, Frontier Sci. Ser. **20**, 63 (1997) (in *Gravitational Wave Detection*, Univ. Acad. Press (1997)).
4. V. N. Rudenko, V. V. Kulagin, S. L. Pasynok et al., Frontier Sci. Ser. **32**, 343 (2000) (in *Gravitational Wave Detection II*, Univ. Acad. Press (2000)).
5. C. Bradaschia, A. Giazotto, G. Giordano et al., in *Proc. MG-9* (Roma 2000), Pt. C, p. 1851, World Sci. (2002).
6. V. V. Kulagin, V. N. Rudenko, S. L. Pasynok, and A. V. Serdobol'skii, Proc. SPIE **4350**, 178 (2001).
7. L. P. Grishchuk, V. V. Kulagin, V. N. Rudenko, and A. V. Serdobol'skii, Class. Quantum Grav. **22**, 245 (2005).
8. А. В. Гусев, А. Б. Манукин, В. Н. Руденко и др., Измерительная техника № 2, 3 (2009).
9. A. Melissinos, in *Proc. MG-12* (Paris 2009), Pt. C, p. 1718, World Sci. (2012).
10. C. V. Forrest, PhD Thesis, Univ. of Rochester, LIGO Document P09 0000 v1 (2009).
11. C. Forrest and A. Melissinos, Technical Note LIGO-T0900507-V3-2 (22/03/2010).
12. А. В. Гусев, В. Н. Руденко, Письма в ЖЭТФ **91**, 543 (2010).
13. S. D'Antonio, P. Astone, S. Frasca et al., Talk at Orsay LSC-Virgo meeting, June 2011 (LSC-Virgo white paper on gravitational wave data analysis 2012–2013 edition).

14. А. В. Гусев, В. Н. Руденко, И. С. Юдин, Измерительная техника № 1, 59 (2011).
15. R. W. P. Drever, J. Hough, A. Munley et al., Appl. Phys. **31**, 97 (1983).
16. A. V. Gusev, V. N. Rudenko, and I. S. Yudin, Gravitation and Cosmology **19**, 265 (2013).
17. <http://www.infn.virgo.it>, VIRGO document VIR-0627A-10, Virgo geophysical channel:VSR2/VSR1 analysis (2010).
18. J. Peterson, US Department of Interior Geological Survey, Open-file report 93-322 (1993).
19. T. Lay and T. C. Wallace, Modern Global Seismology, Vol. 58, Acad. Press (1995).
20. N. Cartier, B. Ducarm, J. Coodkind et al., Phys. Earth and Planetary Interiors **117**, 3 (2000).
21. K. Danzmann, T. A. Prince, V. Binetruy et al., Tech. Rep. ESA/SRE 3 (2011), European Space Agency.
22. M. Van der Sluys, arXiv:1108.1307v1 [astro-ph.SR].
23. M. Punturo, M. Abernathy, and F. Acernese et al., Class. Quantum Grav. **27**, 084007 (2010).
24. M. G. Beker, G. Cella, and R. DeSalvo et al., Gen. Rel. Grav. **43**, 623 (2011).