

ДИССИПАТИВНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ МОД В ПОТОКЕ «ЛЕВИТИРУЮЩИХ» НЕЙТРОНОВ

*М. И. Петелин**, *М. Л. Тай*

*Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 20 мая 2014 г.
после переработки 1 декабря 2014 г.

В экспериментах [1–4] распределение потока нейтронов, инжектированного в горизонтальный канал, на выходе канала оказывается немонотонной функцией вертикальной координаты. Эволюция структуры потока описывается с учетом поглощения частиц материалом «пола».

DOI: 10.7868/S0044451015060014

1. ВВЕДЕНИЕ

На основе предложенного в работе [1] метода в экспериментах [2–4] (рис. 1) поток ультрахолодных нейтронов инжектируется в протяженный горизонтальный канал, на выходе которого нейтроны оказываются приподнятыми над «полом» — эффект, условно названный левитацией. Квантовая теория [1–4] описывает вертикальное распределение плотности потока при $x > 0$ (см. рис. 1) суперпозицией функций (рис. 2), каждая из которых стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$ (на частицы действует сила гравитации) и при $z \rightarrow 0$ (частицы отражаются от «пола»).

В предлагаемой работе учтено, что отражение частиц от «пола» является не полным, и, соответственно, уточнена структура функций, описывающих поведение нейтронов при $x > 0$. Как и в работах [2–4], будем рассматривать нейтрон как волну Ψ , распространение которой описывается уравнением Шредингера [5]

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi \quad (1)$$

с гамильтонианом

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U. \quad (2)$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, а U — потенциал, который над «полом» обусловлен силой тяжести,

$$U = mgz, \quad z > 0, \quad (3)$$

*E-mail: petelin@appl.sci-nnov.ru

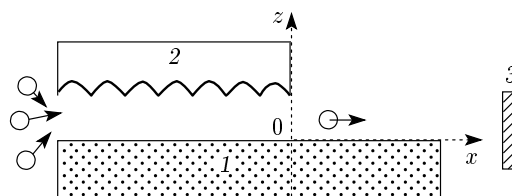


Рис. 1. Распространение потока нейтронов вдоль горизонтального канала: 1 — нижняя пластина («пол»); 2 — верхняя пластина (рассеиватель-поглотитель); 3 — детектор, измеряющий распределение плотности нейтронного потока на выходе структуры

а внизу ($z < 0$) — взаимодействием нейтрона с материалом «пола»,

$$U = B, \quad z < 0, \quad (4)$$

где B — комплексная константа [6]. Как и в работах [2–4], в качестве граничных условий примем, что

$$\Psi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow \pm\infty \quad (5)$$

(близкой моделью в электродинамике может служить рефракционный канал в виде плоско-слоистого диэлектрика, лежащего на металлической плоскости [7, гл. 11]).

Уравнениям (1)–(4) удовлетворяет произвольный набор дискретных собственных мод

$$\Psi = \psi(z) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et + ik_{\parallel}x\right), \quad (6)$$

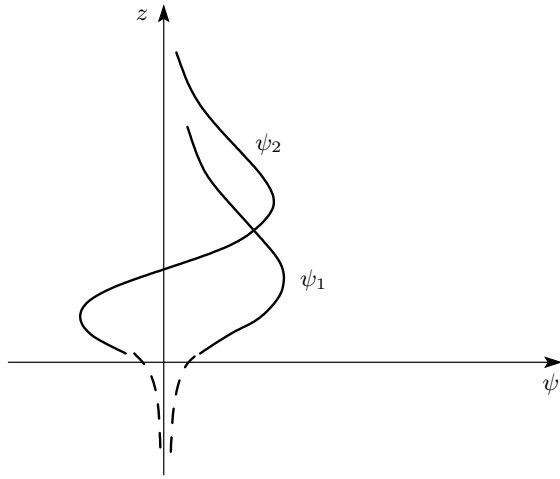


Рис. 2. Вертикальные структуры собственных функций нейтронов при $x > 0$

где E — энергия нейтрона, $\hbar k_{\parallel}$ — его продольный относительно оси x импульс, $\psi(z)$ — функция вертикальной координаты.

2. ВЕРТИКАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ

Подстановка (6) в уравнение (1) дает для функции $\psi(z)$ уравнение неоднородной струны:

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + [\gamma - U_1(z)]\psi = 0, \quad (7)$$

$$U_1(z) = \frac{2m}{\hbar^2} U(z), \quad (8)$$

$$\gamma = \frac{2mE}{\hbar^2} - k_{\parallel}^2. \quad (9)$$

При достаточно высокой плотности материала «пола» [6],

$$|B| \gg E, \quad (10)$$

оно может быть решено методом последовательных приближений (подобно тому, как для высокочастотного поля на границе вакуум–металл вводится импеданс Леонтовича [7]).

2.1. «Подпольная» ($z \leq 0$) структура волновой функции

При условии (10) в области $z \leq 0$ уравнение (7) можно приближенно записать в виде

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = b\psi, \quad (11)$$

где коэффициент

$$b = \frac{2mB}{\hbar^2}, \quad (12)$$

согласно формуле (1.42) монографии [6], соответствует поглощению нейтронов материалом «пола»,

$$\text{Re} \sqrt{b} > 0, \quad (13)$$

в результате чего волновая функция

$$\psi(z) = A \exp(z\sqrt{b}) \quad (14)$$

при удалении от поверхности «пола» убывает. На границе $z = 0$ из (14) следует импедансное условие

$$\left(\psi - \frac{1}{\sqrt{b}} \frac{d\psi}{dz} \right)_{z=0} = 0. \quad (15)$$

2.2. Структура волновых функций над «идеально зеркальным полом» [4]

В нулевом приближении, устремив плотность нижней пластины в бесконечность, $|b| \rightarrow \infty$, из условия (15) получаем

$$\psi^{(0)}|_{z=0} = 0, \quad (16)$$

а при $z \rightarrow \infty$ граничным условием, согласно (5), является $\psi(z) \rightarrow 0$. Сама волновая функция $\psi(z)$ при $z \geq 0$, согласно выражениям (3), (7), (8), удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \left(\gamma - \frac{2m^2}{\hbar^2} gz \right) \psi = 0. \quad (17)$$

Заменой

$$z = \frac{\gamma_n^{(0)} + \alpha^2 \zeta}{\alpha^3}, \quad (18)$$

$$\alpha = \left(\frac{2m^2 g}{\hbar^2} \right)^{1/3}, \quad (19)$$

где n — число экстремумов функции $\psi_n^{(0)}$, уравнение (17) сводится к уравнению Эйри [4, 5]

$$\frac{d^2\psi_n^{(0)}}{d\zeta^2} - \zeta\psi_n^{(0)} = 0. \quad (20)$$

Его решение, удовлетворяющее граничным условиям (5) и (16), есть

$$\psi_n^{(0)} = D_n \text{Ai}(z\alpha + \zeta_n), \quad \gamma_n^{(0)} = -\alpha^2 \zeta_n, \quad (21)$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

где $\text{Ai}(\zeta)$ — функция Эйри [5, стр. 749], первые три нуля которой есть

$$\zeta_1 = -2.34, \quad \zeta_2 = -4.09, \quad \zeta_3 = -5.52, \quad (22)$$

D_n — произвольные константы. Решения (21) аппроксимируют изображенные на рис. 2 волновые функции нейтронов при $z > 0$.

2.3. Структура волновых функций над «частично поглощающим полом»

Чтобы учесть просачивание нейтронов внутрь «пола» (см. рис. 1), величину B считаем по-прежнему удовлетворяющей условию (10), но уже не бесконечной [6]. В этом, первом, приближении ищем собственные функции $\psi_n^{(1)}(z)$ и соответствующие им собственные значения $\gamma_n^{(1)}$, удовлетворяющие уравнению (7) и импедансному граничному условию (15). В силу формулы Ньютона–Лейбница имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\psi_n^{(1)} \frac{d^2 \psi_n^{(0)}}{dz^2} - \psi_n^{(0)} \frac{d^2 \psi_n^{(1)}}{dz^2} \right) dz &= \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dz} \left(\psi_n^{(1)} \frac{d\psi_n^{(0)}}{dz} - \psi_n^{(0)} \frac{d\psi_n^{(1)}}{dz} \right) dz = \\ &= \left(\psi_n^{(1)} \frac{d\psi_n^{(0)}}{dz} - \psi_n^{(0)} \frac{d\psi_n^{(1)}}{dz} \right) \Big|_0^\infty. \end{aligned} \quad (23)$$

В левой части уравнения (23) выразим вторые производные из уравнения (7), а затем используем близость функций

$$\psi_n^{(0)}(z) \approx \psi_n^{(1)}(z), \quad 0 < z < \infty. \quad (24)$$

В правой части уравнения (23) используем граничные условия (5), (15), (16) и близость производных

$$\left. \frac{d\psi_n^{(0)}}{dz} \right|_{z=0} \approx \left. \frac{d\psi_n^{(1)}}{dz} \right|_{z=0}. \quad (25)$$

Тогда из (23) получаем соотношение

$$\left(\gamma_n^{(1)} - \gamma_n^{(0)} \right) \int_0^\infty \psi_n^{(0)2}(z) dz \approx \frac{1}{\sqrt{b}} \left[\left. \frac{d\psi_n^{(0)}}{dz} \right|_{z=0} \right]^2, \quad (26)$$

позволяющее рассчитать более точные, по сравнению с $\gamma_n^{(0)}$, собственные значения $\gamma_n^{(1)}$, соответствующие функциям $\psi_n^{(1)}(z)$. Поскольку интеграл в левой части уравнения (26) пропорционален

$$\begin{aligned} \int_{\zeta_n}^\infty [\text{Ai}(\zeta)]^2 d\zeta &= [\zeta^* \text{Ai}^2(\zeta)] \Big|_{\zeta_n}^\infty - \\ &- \int_{\zeta_n}^\infty \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{d \text{Ai}}{d\zeta} \right)^2 d\zeta = - \left(\frac{d \text{Ai}}{d\zeta} \right)^2 \Big|_{\zeta_n}^\infty, \end{aligned} \quad (27)$$

из выражений (18), (26) и (27) получаем

$$\gamma_n^{(1)} \approx \gamma_n^{(0)} - \frac{a^3}{\sqrt{b}} = -a^2 \zeta_n - \frac{a^3}{\sqrt{b}}. \quad (28)$$

3. ГОРИЗОНТАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ

Запишем соотношение (9) в виде

$$k_{\parallel,n} = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2} - \gamma_n}. \quad (29)$$

При расчете действительной части продольного волнового числа можно положить $\gamma_n \approx \gamma_n^{(0)}$. Тогда, согласно (21), имеем

$$\text{Re } k_{\parallel,n} \approx \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2} + a^2 \zeta_n}, \quad (30)$$

а для мнимой части продольного волнового числа на основании формул (28), (29) получаем

$$\text{Im } k_{\parallel,n} \approx \frac{a^3}{2k_{\parallel,n}^{(0)}} \text{Im} \left(\frac{1}{\sqrt{b}} \right). \quad (31)$$

С ростом энергии нейтронов их поглощение «полем», характеризуемое множителем $\text{Im} \left(1/\sqrt{b} \right)$ в формуле (31), растет [6, 8]. Наряду с этим, согласно выражениям (29)–(31), при заданной энергии E частиц, чем больше число n вертикальных вариаций волновой функции, тем меньше продольное волновое число $k_{\parallel,n}^{(0)}$ и, согласно (31), тем больше соответствующий продольный декремент $\text{Im } k_{\parallel,n}^{(1)}$. Этот эффект легко интерпретировать, если, следуя рецепту из [9], построить лучевой «скелет» и одеть его диффузионным «мясом»: заменой $2mE/\hbar^2 = k^2$, $\gamma_n = k_{\perp,n}^2$ трансформировать формулу (9) к теореме Пифагора $k^2 = k_{\perp}^2 + k_{\parallel,n}^2$ и сопоставить каждой волновой моде (см. рис. 1) ее лучевую структуру (рис. 3). Каждый луч отражается последовательно то от верхней «гравитационной стенки», то от нижнего горизонтального «пола». При заданной исходной энергии волны-частицы чем больше число вертикальных вариаций волновой функции, тем чаще «луч» падает на частично поглощающий

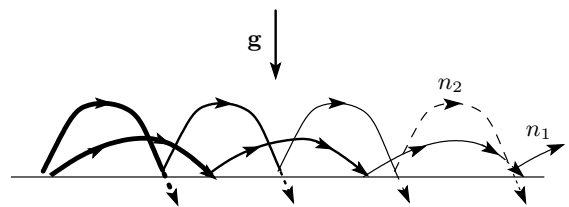


Рис. 3. Траектории лучей, соответствующих модам с разными числами вертикальных вариаций: $n_2 > n_1$

«пол». Поэтому, в согласии с соотношением (31), при одной и той же энергии E нейтрона вертикально-многогорбые волновые функции убывают в горизонтальном направлении быстрее, чем вертикально-малогорбые. В пределе $x \rightarrow \infty$ вертикальное распределение нейтронов стремится к изображенной на рис. 2 одногорбой функции $\psi_1(z)$.

Используя выражение (31), длину фильтрации $L = 1/\text{Im} k_{\parallel,1}^{(1)}$ можем оценить как $L \sim 1/\alpha\delta$, где $1/\alpha \sim 10$ мкм — «высота подъема» нейтрона в гравитационном поле Земли, а $\delta \sim 2 \text{Re} \sqrt{\gamma_1^{(0)}/b}$ — коэффициент отражения нейтрона от стенки. При $\delta \sim 10^{-4}$ [6] длина фильтрации составляет $L \sim 0.1$ м.

Авторы благодарны А. В. Стрелкову за постановку задачи и В. И. Луцикову, В. К. Игнатовичу, В. В. Несвижевскому, В. И. Фурману, А. Б. Маненкову за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. I. Luschnikov, *Phys. Today* **30**(6), 42 (1977).
2. V. V. Nesvizhevsky, H. G. Börner, A. K. Petukhov et al., *Nature* **415**, 297 (2002).
3. V. V. Nesvizhevsky, H. G. Börner, A. M. Gagarski et al., *Phys. Rev. D* **67**, 102002 (2003).
4. В. В. Несвижевский, *УФН* **180**, 673 (2010).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989).
6. D. J. Hughes, *Neutron Optics*, New York (1954).
7. Л. А. Вайнштейн, *Электромагнитные волны*, Радио и связь, Москва (1988).
8. А. В. Стрелков, *УФН* **174**, 565 (2004).
9. Л. А. Вайнштейн, *Открытые резонаторы и открытые волноводы*, Сов. Радио, Москва (1966).