

## К ТЕОРИИ ПРОХОЖДЕНИЯ ТОКА ЧЕРЕЗ ИДЕАЛЬНЫЙ ИЗОЛЯТОР

*В. Ф. Елесин\**

*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  
115409, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 3 июня 2014 г.

Найдено аналитическое решение задачи о прохождении тока через идеальный изолятор для монополярной инжекции дырок. Впервые получены зависимости тока от напряжения (ВАХ) для широкой области изменения параметров структуры (длины, концентраций дырок на границах, температуры и др.) и величины напряжения. Показано, что квадратичная ВАХ Мотта – Гарни реализуется только в определенном интервале токов от  $J_1$  до  $J_2$ . При  $J < J_1$  ток линейно зависит от напряжения  $V$  с точностью до  $V^3$ . Новый режим обнаружен при токах, больших  $J_2$ , когда ВАХ становится линейной из-за полного заполнения изолятора инжектированными дырками. Найдены постоянные интегрирования во всем интервале изменения тока и параметров структуры, а также аналитические выражения для пространственного распределения электрического поля и концентрации дырок.

DOI: 10.7868/S0044451015010113

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Явление инжекции электронов и дырок дает уникальную возможность вводить носители заряда в любые изоляторы и нелегированные полупроводники, управляя тем самым проводимостью и создавая неравновесную ситуацию. Это явление лежит в основе процессов, происходящих в светодиодах, полупроводниковых лазерах, транзисторах и др. При инжекции заряда происходит резкое нарушение электронейтральности, приводящее к ограничению тока объемным зарядом. Теория ограниченной объемным зарядом проводимости имеет фундаментальное значение, однако даже в случае монополярной инжекции в идеальный изолятор без ловушек она не является достаточно полной.

Первый результат был получен Моттом и Гарни (МГ) [1] при пренебрежении диффузией и с использованием нереалистичных граничных условий. Согласно МГ ток квадратично зависит от напряжения.

Полная система уравнений включает уравнение Пуассона и уравнение непрерывности в диффузионно-дрейфовом приближении. После исключения концентрации получаются нелинейные дифференциаль-

ные уравнения для электрического поля, которые решаются численно (см., например, [2, 3]). При этом имеются математические трудности, проблемы со сходимостью, а главное, трудно охватить широкий набор параметров, чтобы составить цельное представление о ВАХ.

Существует другой подход, при котором можно свести уравнение к уравнению для функции Эйри. По-видимому, впервые это было сделано в работе [4]. Однако анализ, проделанный в этой работе [4] и последующих (см., например, [5–7]), был недостаточно полным.

Проблема состоит в определении с помощью функций Эйри постоянных интегрирования, которые меняются в широких пределах в зависимости от тока, и большого числа параметров (концентрации на контактах, длины образца, температуры и др.).

В настоящей работе удалось преодолеть эти трудности благодаря замеченной нами формальной аналогии с задачей об энергетическом спектре квантовой ямы в электрическом поле. Впервые были найдены аналитические зависимости тока от напряжения (ВАХ) во всем интервале токов, а также зависимости постоянных интегрирования от тока и параметров структуры во всей области их изменения. Показано, что квадратичная зависимость МГ реализуется только в определенном интервале токов от  $J_1$  до  $J_2$ . При  $J < J_1$  ток линейно зависит от напряжения

\*E-mail: VFElesin@mephi.ru

$V$  с точностью до  $V^3$ . Новый режим обнаружен при  $J > J_2$ , когда ВАХ снова становится линейной и приближение МГ перестает быть справедливым. Кроме того, получены аналитические выражения для распределений электрического поля и концентрации дырок в изоляторе во всей области изменения тока и параметров изолятора.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим простейшую модель протекания тока через идеальный изолятор (см. [1]), не содержащий свободных носителей и ловушек. Для удобства в качестве носителей возьмем дырки, ток которых имеет вид

$$J_p = e\mu_p p \varepsilon_p - eD_p \frac{dp}{dx}, \quad J_p > 0, \quad (1)$$

где  $p(x)$  — концентрация дырок,  $\varepsilon_p(x)$  — электрическое поле, удовлетворяющее уравнению Пуассона,

$$\frac{d\varepsilon_p}{dx} = \frac{4\pi e p}{\kappa}. \quad (2)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $\kappa$  — диэлектрическая проницаемость изолятора,  $e$ ,  $\mu_p$ ,  $D_p$  — соответственно заряд, подвижность и коэффициент диффузии дырок, причем согласно соотношению Эйнштейна

$$D_p = \frac{k_B T}{e} \mu_p.$$

В качестве граничных условий выберем задание концентраций на контактах:

$$p(0) = p_0, \quad p(l) = p_l. \quad (3)$$

Отметим, что из уравнения непрерывности заряда вытекает независимость тока  $J_p$  от координаты.

Задача состоит в отыскании зависимости тока  $J_p$  от напряжения  $V_p$ ,

$$V_p = \int_0^l \varepsilon_p dx. \quad (4)$$

Введем новые переменные  $\varepsilon(x)$ ,  $n(x)$ ,  $J$ ,  $V$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_p(x) &= \tilde{\varepsilon} \varepsilon(x), & p(x) &= \frac{\tilde{\varepsilon}}{e} \frac{\kappa}{4\pi} n(x), \\ J_p &= \frac{\mu_p \tilde{\varepsilon}^2}{8\pi} \kappa J, & V_p &= \tilde{\varepsilon} V, & \tilde{\varepsilon} &= \frac{2k_B T}{e}. \end{aligned} \quad (5)$$

Система уравнений (1)–(3) принимает вид

$$J = 2n\varepsilon - \frac{dn}{dx}, \quad (6)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = n, \quad (7)$$

$$n(0) = n_0, \quad n(l) = n_l. \quad (8)$$

Подставляя (7) в (6), находим первый интеграл уравнения для  $\varepsilon(x)$ :

$$\varepsilon^2 - \varepsilon' = Jx + C, \quad (9)$$

где  $C$  — постоянная.

Граничные условия для поля принимают вид

$$\varepsilon^2(0) = n_0 + C, \quad \varepsilon^2(l) = n_l + C + Jl. \quad (10)$$

Впервые ВАХ идеального изолятора была найдена в работе Мотта и Гарни (см. [1]) в пренебрежении диффузией при

$$C = 0, \quad \varepsilon(0) = 0.$$

Тогда легко получить из (9)

$$\varepsilon = J^{1/2} x^{1/2}, \quad V = \frac{2}{3} x^{3/2} J^{1/2}, \quad J = \frac{9}{4} \frac{V^2}{L^3} \quad (11)$$

— известную квадратичную зависимость тока  $J$  от напряжения  $V$  (ВАХ). Из (11) следует соотношение

$$n(0) = \frac{J^{1/2}}{2x^{1/2}} \rightarrow \infty,$$

которое находится в явном противоречии с точным граничным условием (10).

Решение уравнения (9) обычно проводится довольно изощренными численными методами [2, 3], но не дает полной картины ввиду присутствия в задаче большого числа параметров.

Существует другой подход, указанный впервые в работе [4]: свести уравнение (9) к уравнению для функций Эйри. Однако в [4] и последующих работах [5–7] проведенные анализы были неполными и с использованием численных методов в связи с трудностями учета граничных условий при применении свойств функции Эйри.

В настоящей работе эти трудности удалось преодолеть благодаря замеченной нами формальной аналогии с задачей об энергии квантовой ямы в электрическом поле.

Введем новую функцию

$$u(x) = \exp\left(-\int^x \varepsilon(x') dx'\right), \quad (12)$$

уравнение для которой совпадает с уравнением Шредингера

$$u'' + (E - V(x))u = 0, \quad V(x) = Jx \quad (13)$$

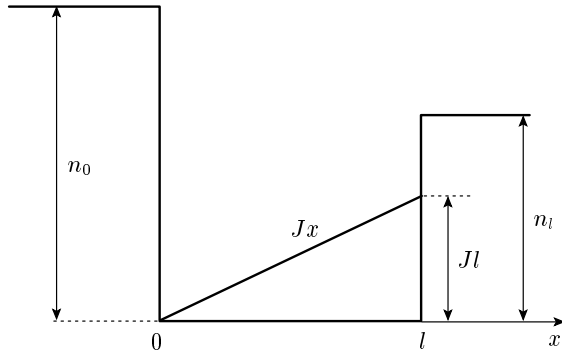


Рис. 1. Квантовая яма с «полем»  $J$

с граничными условиями

$$\varepsilon^2(0) = \left(\frac{u'}{u}\right)_0^2 = n_0 - E, \quad (14)$$

$$\varepsilon^2(l) = \left(\frac{u'}{u}\right)_l^2 = n_l - E + Jl, \quad (15)$$

если положить

$$C = -E, \quad V(x) = Jx, \quad \varepsilon(x) = -u'/u. \quad (16)$$

Нетрудно убедиться, что эта задача аналогична задаче о квантовой яме с барьерами высотой  $n_0$  (при  $x = 0$ ) и  $n_l$  (при  $x = L$ ) в «электрическом поле»  $J$  (рис. 1). Единственное отличие (причем при определенных условиях весьма существенное) состоит в том, что логарифмические производные  $u'/u$  входят в граничные условия (14) и (15) квадратично. Эта аналогия играет эвристически полезную роль при решении задачи.

Общее решение уравнения (13) хорошо известно [8]

$$u(x) = A \text{Ai}(-z) + B \text{Bi}(-z), \quad (17)$$

$$z = \tilde{E} - J^{1/3}x, \quad \tilde{E} = E/J^{2/3},$$

где  $\text{Ai}(-z)$  и  $\text{Bi}(-z)$  — функции Эйри.

Проблема состоит в отыскании коэффициента  $A$  и «энергии»  $E$  в широком интервале параметров  $n_0$ ,  $n_l$ ,  $l$  и в зависимости от тока  $J$ .

Чтобы использовать различные асимптотики функций Эйри для отыскания коэффициента  $A$  и энергии  $\tilde{E}(E)$ , удобно рассмотреть следующие области изменения тока:

1. ток равен нулю, равновесный случай;
2. малые токи,  $Jl < 1/l^2$ ;
3. большие токи,  $Jl > 1/l^2$ .

### 3. РАВНОВЕСНЫЙ СЛУЧАЙ ( $J = 0$ ), $n_0 = n_l$

В отсутствие тока решения уравнения (13)  $u$ ,  $\varepsilon(x)$ ,  $n(x)$  имеют вид

$$u = A \exp(ikx) + \exp(-ikx), \quad k^2 = E,$$

$$\varepsilon(x) = -ik \frac{A \exp(ikx) - \exp(-ikx)}{A \exp(ikx) + \exp(-ikx)}, \quad (18)$$

$$n(x) = \frac{4Ak^2}{(A \exp(ikx) + \exp(-ikx))^2}.$$

Коэффициенты  $A$  и  $k^2 = E$  находим из (8):

$$n_0 = \frac{4Ak^2}{(A+1)^2}, \quad (19)$$

$$n_l = \frac{4\tilde{A}k^2}{(\tilde{A}+1)^2}, \quad \tilde{A} = A \exp(2ikl).$$

В случае  $n_0 = n_l$  получаем

$$A = \exp(-ikl), \quad (20)$$

$$n(x) = \frac{k^2}{\cos^2(k(x-l/2))}. \quad (21)$$

Коэффициент  $k$  находим из уравнения

$$\frac{\cos^2 y}{y^2} = \frac{4}{n_0 l^2}, \quad y = \frac{kl}{2}. \quad (22)$$

Полагая параметр  $n_0 l^2$  бесконечно большим ( $n_0 l^2 \rightarrow \infty$ ), получаем

$$k = \frac{\pi}{l}, \quad E = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2, \quad (23)$$

$$n(x) = \frac{\pi^2/l^2}{\cos^2\left(\pi\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2}\right)\right)}, \quad (24)$$

что совпадает с результатом работы [9], но при этом  $n(0) = n(l) = \infty$ .

Если параметр  $n_0 l^2 \gg 1$ , но конечен, имеем

$$n(x) = \frac{\pi^2/l^2}{\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\left(x - \frac{2}{\sqrt{n_0 l^2}}\left[x - \frac{l}{2}\right]\right)\right)}. \quad (25)$$

Из формулы (25) видно, что концентрация дырок быстро уменьшается вглубь изолятора на расстоянии порядка дебаевского радиуса  $r_D = 1/\sqrt{n_0}$ .

В обратном предельном случае  $n_0 l^2 \ll 1$ , находим

$$n(x) = \frac{n_0 \cos^2\left(\frac{\sqrt{n_0}l}{2}\right)}{\cos^2\left(\sqrt{n_0}\left(x - \frac{l}{2}\right)\right)}, \quad k^2 = E \approx n_0. \quad (26)$$

Это означает, что дырки заполняют изолятор, так как  $l \ll r_D$ . Этот предел не представляет интереса для задачи инжекции носителей в изолятор и далее его не рассматриваем.

Выражения (23) и (26) для «энергии» имеют квантовую интерпретацию: в случае  $n_0 l^2 \gg 1$  «энергия» (23) совпадает с энергией первого уровня квантовой ямы размером  $l$  и бесконечными барьерами ( $n_0 \gg 1/l^2$ ); при  $n_0 l^2 \ll 1$  «энергия» (26) почти совпадает с высотой одинаковых барьеров [10].

Решение уравнения (13) иногда удобно представить в другой форме:

$$u = \sin(kx + \delta), \quad (27)$$

$$n(x) = \frac{k^2}{\sin^2(kx + \delta)}. \quad (28)$$

Для равных концентраций  $n_0 = n_l$  находим  $\delta$  в виде

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \frac{kl}{2}. \quad (29)$$

#### 4. РАВНОВЕСИЕ ( $J = 0$ ), $n_l < n_0$

Рассмотрим ситуацию разных концентраций  $n_0 \neq n_l$ ,  $n_l < n_0$  (разных «барьеров»). Если воспользоваться решением в форме (28), то граничные условия для определения  $\delta$  и  $k$  имеют вид

$$n_0 = \frac{k^2}{\sin^2 \delta}, \quad n_l = \frac{k^2}{\sin^2(kl + \delta)}. \quad (30)$$

Полагая  $n_0 l^2 \rightarrow \infty$ , найдем  $\delta$  и уравнение для  $k$ :

$$\delta = \frac{k}{\sqrt{n_0}} \rightarrow 0, \quad (31)$$

$$\frac{\sin^2 y}{y^2} = \frac{1}{n_l l^2}, \quad y = kl.$$

Из (31) следует, что с уменьшением  $n_l l^2$  (от  $n_0 l^2$ ) «энергия»  $E = k^2$  уменьшается от  $(\pi/l)^2$ , что связано с разной высотой «барьеров»  $n_0$  и  $n_l$  (как в квантовой яме, где она уменьшается до  $(\pi/2l)^2$  [10]).

Но в нашей задаче «энергия» уменьшается до нуля при  $n_l l^2 = 1$ , что обусловлено появлением нового решения из-за наличия квадратов величин в граничных условиях (14), (15). Действительно, при приближении  $n_l l^2$  к единице из (31) нетрудно получить

$$E \approx \frac{3}{l^2} \left(1 - \frac{1}{n_l l^2}\right), \quad (32)$$

т. е.  $E = 0$ , при  $n_l l^2 = 1$ .

В этом случае ( $E = 0$ ) концентрация дырок описывается выражением

$$n(x) = \frac{1}{(x + 1/\sqrt{n_0})^2}, \quad (33)$$

из которого наглядно видно, что дырки распределены в области  $x < r_D = 1/\sqrt{n_0}$ .

Нетрудно убедиться, что при  $n_l l^2 < 1$  существует решение с  $E < 0$ . Положив в (30) и (31)  $k = iq$ ,  $\delta = i|\delta|$ , получим уравнение для  $q$ :

$$\frac{\text{sh}^2 y}{y^2} = \frac{1}{n_l l^2}, \quad y = ql. \quad (34)$$

В случае  $n_l l^2 \leq 1$  имеем снова (32). Для очень малых  $n_l l^2 \ll 1$  находим  $q$ ,  $E$  и  $n(x)$  в виде

$$q \approx \frac{1}{2l} \ln \left( \frac{1}{n_l l^2} \right), \quad E = -\frac{1}{4l^2} \ln^2 \left( \frac{1}{n_l l^2} \right), \quad (35)$$

$$n(x) = \frac{q^2}{\text{sh}^2 \left( qx + \frac{q}{\sqrt{n_0}} \right)}. \quad (36)$$

#### 5. «ЭНЕРГИЯ» И ТОК ПРИ МАЛОМ ТОКЕ

$$Jl \ll 1/l^2, \quad n_0 = n_l$$

Условие  $Jl \ll 1/l^2$  означает, что поправка к «энергии»  $Jl$  мала по сравнению с «энергией» (23)  $E(0) = (\pi/l)^2$ . Поэтому в общем решении (17) приведенная энергия

$$\tilde{E} = \frac{E}{J^{2/3}} \approx \frac{\pi^2}{(Jl^3)^{2/3}} \gg 1$$

велика и положительна, а следовательно,  $z \rightarrow \infty$ .

Тогда для функций Эйри можно воспользоваться асимптотиками [8]

$$\text{Ai}(-z) \approx \frac{1}{\pi^{1/2} z^{1/4}} \sin \left( \zeta + \frac{\pi}{4} \right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (37)$$

$$\text{Bi}(-z) \approx \frac{1}{\pi^{1/2} z^{1/4}} \cos \left( \zeta + \frac{\pi}{4} \right), \quad \zeta = \frac{2}{3} z^{3/2}, \quad (38)$$

так что  $u(x)$  запишем в виде

$$u = \frac{1}{\pi^{1/2} z^{1/4}} \sin \left( \zeta - \frac{2}{3} \tilde{E}^{3/2} + \tilde{\delta} \right). \quad (39)$$

Имея ввиду малость  $J^{1/3}l$  по сравнению с  $\tilde{E}$ , получим в первом приближении по  $J$

$$u = -\sin \left( kx - \frac{Jx^2}{4k} + \tilde{\delta} \right), \quad (40)$$

$$n(x) = \frac{E - Jx}{\sin^2 \left( kx - \frac{Jx^2}{4k} + \tilde{\delta} \right)}.$$

Отметим, что (40) совпадает с результатом, полученным с помощью квазиклассического приближения [10],

$$n(x) = \frac{E - Jx}{\sin^2 \left( \int_0^x \sqrt{E - Jx'} dx' + \tilde{\delta} \right)}, \quad (41)$$

условие применимости которого имеет вид  $Jl \ll \ll 1/l^2$ .

Учитывая, что  $n_0 l^2 \gg 1$ , найдем из граничных условий  $k$  и  $\tilde{\delta}$ :

$$k = k_0 + \tilde{k}, \quad \tilde{k} = \frac{Jl^2}{4\pi}, \quad k_0 = \frac{\pi}{l}, \quad (42)$$

$$\tilde{\delta} \approx \frac{k}{\sqrt{n_0}} \rightarrow 0,$$

и соответственно «энергию»

$$E(J) = \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \left[ 1 + \frac{1}{2\pi^2} Jl^3 \right]. \quad (43)$$

«Энергия» растет с увеличением тока из-за уменьшения эффективного размера ямы  $l_{eff} \sim 1/J^{1/3}$ .

Удобное выражение для тока получим из уравнения (6), которое представим в форме

$$2\varepsilon - \frac{n'}{n} = \frac{J}{n}.$$

Интегрируя его по  $x$  от  $x = 0$  до  $x = l$ , найдем

$$J = \frac{2V}{\int_0^l \frac{dx}{n(x)}}. \quad (44)$$

В нулевом приближении по току  $k = k_0 = \pi/l$ , с использованием (40) получим

$$\int_0^l \frac{dx}{n(x)} = \frac{l^3}{2\pi^2}, \quad J = \frac{4\pi^2 V}{l^3}, \quad (45)$$

что совпадает с результатом [9].

Однако можно показать, что линейная зависимость сохраняется при учете следующего члена по  $J$  в выражении для  $n(x)$ . Действительно, после некоторых вычислений находим

$$\int_0^l \frac{dx}{n(x)} = \frac{l^3}{2\pi^2} \times \left\{ 1 + \frac{1}{2} \int_0^l \sin \left( 2k_0 x \left( \tilde{k} x - \frac{Jx^2}{4k_0} \right) \right) dx - \int_0^l \sin^2(k_0 x) \frac{2k_0 \tilde{k} - Jx}{k_0^2} dx \right\}.$$

Выполнив интегрирование, получаем

$$\int_0^l \frac{dx}{n(x)} = \frac{l^3}{2\pi^2} \times \left\{ 1 + \frac{l}{2} \left( -\tilde{k} + \frac{Jl^2}{4\pi} \right) - \frac{2l}{\pi} \left( \tilde{k} - \frac{Jl^2}{4\pi} \right) \right\}.$$

Принимая во внимание выражения (42) для  $\tilde{k}$  видим, что поправки обращаются в нуль. Таким образом, зависимость (45) остается линейной с точностью до  $V^3$ .

### 6. «ЭНЕРГИЯ» И ТОК ПРИ $Jl \ll 1/l^2$ , $n_l l^2 \ll 1$

Из условия малости тока  $Jl \ll 1/l^2$  следует, что поправка  $Jl$  мала по сравнению с «энергией» (35)

$$E_l(0) = -\frac{1}{4l^2} \ln \left( \frac{1}{n_l l^2} \right)$$

для предела  $n_l l^2 \ll 1$ , и можно использовать квазиклассическое выражение (41). Делая в (41) замены  $E \rightarrow -q^2$ ,  $\tilde{\delta} \rightarrow i|\tilde{\delta}|$ , получим

$$n(x) = \frac{q^2 + Jx}{\text{sh}^2 \left( qx + \frac{Jx}{4q} + \tilde{\delta} \right)}. \quad (46)$$

Учитывая, что  $n_0 l^2 \gg 1$ , найдем из граничных условий (8)  $q$

$$q = q_0 + \tilde{q}, \quad q_0 = \frac{1}{2l} \ln \left( \frac{1}{n_l l^2} \right), \quad \tilde{q} = -\frac{Jl}{4q_0}, \quad (47)$$

и соответственно «энергию»

$$E = -q_0^2 + \frac{Jl}{2}.$$

Действуя аналогично разд. 5, можно показать, что ток линейно зависит от напряжения  $V$  с точностью до  $V^3$ :

$$J = \frac{2Vn_l}{l} \ln^3 \left( \frac{1}{n_l l^2} \right), \quad (48)$$

если пренебречь малыми членами

$$\frac{1}{\ln^2 \left( \frac{1}{n_l l^2} \right)}.$$

Представляет интерес изучить поведение «энергии» вблизи  $n_l l^2 \approx 1$  в присутствии малого тока  $J \ll \ll 1/l^3$ , где не выполняется квазиклассическое приближение. Поскольку энергия  $\tilde{E}$  и величина  $J^{1/3}l$  малы, будем искать решение в виде разложения функций Эйри по малым степеням  $z$ . Как показано в Приложении, «энергия» имеет вид

$$E = 3 \left[ \frac{1}{l^2} \left( 1 - \frac{1}{n_l l^2} \right) + \frac{Jl}{2} \right]. \quad (49)$$

Из формулы (49) следует, что ток увеличивает «энергию» за счет уменьшения эффективной длины ямы.

### 7. ЗАВИСИМОСТЬ «ЭНЕРГИИ» ОТ ТОКА ПРИ $Jl^3 > 1$

В области  $Jl^3 > 1$  необходимо использовать общее решение (17). Граничные условия (14) и (15) запишем в форме

$$\tilde{n}_l - \tilde{E} + J^{1/3}l = \left[ \frac{A \text{Ai}'(-z_l) + \text{Bi}'(-z_l)}{A \text{Ai}(-z_l) + \text{Bi}(-z_l)} \right]^2, \quad (50)$$

$$\tilde{n}_0 - \tilde{E} = \left[ \frac{A \text{Ai}'(-z_0) + \text{Bi}'(-z_0)}{A \text{Ai}(-z_0) + \text{Bi}(-z_0)} \right]^2, \quad (51)$$

где

$$\begin{aligned} z_l &= \tilde{E} - J^{1/3}l, & z_0 &= \tilde{E}, \\ \tilde{n}_0 &= \frac{n_0}{J^{2/3}}, & \tilde{n}_l &= \frac{n_l}{J^{2/3}}. \end{aligned} \quad (52)$$

Имея в виду, что  $\varepsilon(l) > 0$  ( $J > 0$ ), находим коэффициент  $A$  из (50):

$$A = - \frac{\text{Bi}'(-z_l) + \sqrt{\tilde{n}_l - z_l} \text{Bi}(-z_l)}{\text{Ai}'(-z_l) + \sqrt{\tilde{n}_l - z_l} \text{Ai}(-z_l)}. \quad (53)$$

Далее удобно разбить область больших токов  $Jl^3 > 1$  на три интервала:

1.  $\frac{1}{l^2} < Jl < n_0(n_0 l^2)^{1/2}$ ;
2.  $Jl \approx \frac{n_0(n_0 l^2)^{1/2}}{a^3}$ ,  $a = 0.74$ ;
3.  $\frac{n_0(n_0 l^2)^{1/2}}{a^3} < Jl < \infty$ .

### 7.1. Интервал 1: $1/l^2 < Jl < n_0(n_0 l^2)^{1/2}$

В этом интервале «энергия» определяется треугольной ямой с эффективным размером

$$l_{eff} \approx \frac{1}{J^{1/3}} \ll \frac{1}{l}$$

и большим «барьером»  $n_0$  слева при  $x = 0$ . Как известно [10], в такой треугольной яме энергия первого уровня пропорциональна  $J^{2/3}$ ,  $E \propto J^{2/3}$ . Следовательно, можно ожидать, что приведенная «энергия» порядка единицы,  $\tilde{E} = E/J^{2/3} \sim 1$ , так что  $z_l = \tilde{E} - J^{1/3}l < 0$  и  $|z_l| \gg 1$ . Поэтому можно использовать для функций Эйри следующие асимптотики [8]:

$$\begin{aligned} \text{Ai}(|z|) &= \frac{1}{2\pi^{1/2}} z^{-1/2} \exp(-\zeta) \left( 1 - \frac{c}{\zeta} \right), \\ \zeta &= \frac{2}{3} |z|^{3/2}, \\ \text{Ai}'(|z|) &= -\frac{1}{2\pi^{1/2}} z^{1/4} \exp(-\zeta) \left( 1 - \frac{d}{\zeta} \right), \\ \text{Bi}(|z|) &= \frac{1}{\pi^{1/2}} z^{-1/4} \exp \zeta \left( 1 + \frac{c}{\zeta} \right), \\ \text{Bi}'(|z|) &= \frac{1}{\pi^{1/2}} z^{1/4} \exp \zeta \left( 1 + \frac{d}{\zeta} \right), \\ d &= -\frac{7}{5} c, \quad c = \frac{\Gamma(7/2)}{54\Gamma(3/2)}. \end{aligned} \quad (55)$$

Из формулы (50) с помощью (55) получаем выражение для коэффициента  $A$ :

$$\begin{aligned} A &= -2f \exp(2\zeta_l), \\ f &= \frac{z_l^{1/2} \left( 1 + \frac{d}{\zeta_l} \right) + \sqrt{\tilde{n}_0 + |z_l|} \left( 1 + \frac{c}{\zeta_l} \right)}{\sqrt{\tilde{n}_0 + |z_l|} \left( 1 - \frac{c}{\zeta_l} \right) - z_l^{1/2} \left( 1 - \frac{d}{\zeta_l} \right)}, \\ \zeta_l &= \frac{2}{3} |z_l|^{3/2}. \end{aligned} \quad (56)$$

«Энергию»  $\tilde{E}$  находим из формулы (51).

В интервале 1 «энергия»  $\tilde{E} \sim 1$ , функции  $\text{Ai}(-\tilde{E})$ ,  $\text{Bi}(-\tilde{E})$  порядка единицы, а коэффициент  $A$  велик ( $A \sim \exp(2\zeta_l)$ ), поэтому уравнение (51) упрощается:

$$\tilde{n}_0 - \tilde{E} = \left[ \frac{\text{Ai}'(-\tilde{E})}{\text{Ai}(-\tilde{E})} \right]^2. \quad (57)$$

На рис. 2а изображен ход зависимостей функций  $\left[ \frac{\text{Ai}'(-\tilde{E})}{\text{Ai}(-\tilde{E})} \right]^2$  и  $\tilde{n}_0 - \tilde{E}$  от  $\tilde{E}$ . Видно, что при  $\tilde{n}_0 \rightarrow \infty$  (бесконечный «барьер»)  $\tilde{E}$  стремится к 2.4, так как

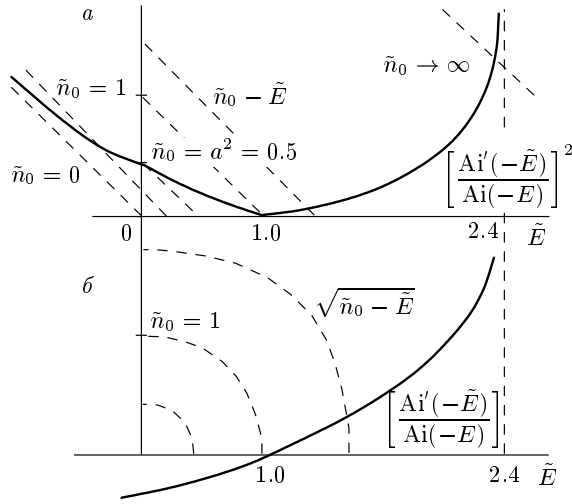


Рис. 2. Ход зависимостей функций а)  $\left[\frac{\text{Ai}'(-\tilde{E})}{\text{Ai}(-\tilde{E})}\right]^2$  и  $\tilde{n}_0 - \tilde{E}$ , б)  $\left[\frac{\text{Ai}'(-\tilde{E})}{\text{Ai}(-\tilde{E})}\right]$  и  $\sqrt{\tilde{n}_0 - \tilde{E}}$  от  $\tilde{E}$

$\text{Ai}(-2.4) = 0$ . Следовательно, «энергия» растет пропорционально  $J^{2/3}$ :

$$E \approx 2.4J^{2/3}, \quad (58)$$

т. е. действительно определяется треугольной ямой.

С дальнейшим ростом тока при фиксированном  $n_0$  приведенная «энергия»  $\tilde{E}$  уменьшается. Причина уменьшения связана с разной высотой «барьеров»: конечного  $n_0$  и большого  $Jl$ . При  $\tilde{n}_0 = 1$  «энергия»  $\tilde{E}$  становится равной единице (поскольку  $\text{Ai}'(-1) = 0$ ):

$$\tilde{E} = 1, \quad E = n_0 = J^{2/3}. \quad (59)$$

Если бы граничные условия соответствовали квантовой яме (без квадратов), то при  $\tilde{n}_0 = 1$  решения заканчивались бы, см. рис. 2б (при этом энергия равна меньшему «барьеру»). Однако присутствие квадрата величины в граничных условиях дает возможность иметь решение и при  $\tilde{n}_0 < 1$ .

Отметим, что энергия  $E$  достигает максимума при  $\tilde{n}_0 = 1$ . Чтобы это доказать продифференцируем граничные условия (14) по  $J$ :

$$\frac{\partial n_0}{\partial J} - \frac{\partial E}{\partial J} = 2\varepsilon(0) \frac{\partial \varepsilon(0)}{\partial J}.$$

Так как  $\partial n_0 / \partial J = 0$  и

$$\varepsilon(0) = 0 \left( \varepsilon^2(0) = \left[ \frac{\text{Ai}'(-\tilde{E})}{\text{Ai}(-\tilde{E})} \right]^2 \right),$$

то  $\partial E / \partial J = 0$ .

### 7.2. Интервал 2: $Jl \approx \frac{n_0(nl^2)^{1/2}}{a^3}$

В этом интервале  $\tilde{n}_0 < 1$  «энергия»  $\tilde{E}$  (и  $E$ ) продолжает уменьшаться до нуля и меняет знак. Поэтому можно применить разложение функции Эйри [8]:

$$\text{Ai}(z) \approx c_1 - c_2 z, \quad c_1 = 0.35, \quad c_2 = 0.258, \quad (60)$$

и из уравнения (57) находим

$$\tilde{E} = \frac{\tilde{n}_0 - a^2}{1 - 2a^3}, \quad a = \frac{c_1}{c_2} = 0.74, \quad a^2 = 0.5. \quad (61)$$

Из формулы (61) следует, что  $\tilde{E}$  (и  $E$ ) обращаются в нуль при условиях

$$\tilde{n}_0 = a^2, \quad J^{2/3} = \frac{n_0}{a^2}. \quad (62)$$

Если  $J > J_c$  ( $\tilde{n}_0 < a^2$ ), то «энергия»  $\tilde{E}$  становится отрицательной и начинает расти по абсолютной величине.

### 7.3. Интервал 3: $Jl > \frac{n_0(nl^2)^{1/2}}{a^3}$

В интервале 3 «энергия»  $\tilde{E} < 0$ ,  $|\tilde{E}| > 1$  и величина

$$\zeta_0 = (2/3)|\tilde{E}|^{3/2} \gg 1$$

велика. Поэтому для функций Эйри  $\text{Ai}(|z_0|)$ ,  $\text{Bi}(|z_0|)$ ,  $\text{Ai}'(|z_0|)$ ,  $\text{Bi}'(|z_0|)$ , где  $z_0 = |\tilde{E}|$ , можно воспользоваться асимптотикой (55), так что для  $\varepsilon^2(0)$  (51), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(0) &= \\ &= |z_0| \left[ \frac{2 \left( 1 + \frac{d}{\zeta_0} \right) - A \exp(-2\zeta_0) \left( 1 - \frac{d}{\zeta_0} \right)}{2 \left( 1 + \frac{c}{\zeta_0} \right) + A \exp(-2\zeta_0) \left( 1 - \frac{c}{\zeta_0} \right)} \right]^2. \end{aligned} \quad (63)$$

Поскольку

$$A \exp(-2\zeta_0) \approx -2f \exp(2(\zeta - \zeta_0)) \gg 1, \quad (64)$$

$$f \approx \frac{4z_0}{\tilde{n}_0 - z_0^{1/2}/2} \gg 1, \quad (65)$$

выражение для  $\varepsilon^2(0)$  упрощается:

$$\varepsilon^2(0) = |z_0| \left[ \frac{1 - \frac{d}{\zeta_0}}{1 - \frac{c}{\zeta_0}} \right]^2 \approx |\tilde{E}| \left( 1 + \frac{1}{2|\tilde{E}|^{3/2}} \right). \quad (66)$$

Уравнение (51) для  $|\tilde{E}|$  принимает вид

$$\tilde{n}_0 + |E| = |\tilde{E}| \left( 1 + \frac{1}{2|\tilde{E}|^{3/2}} \right), \quad (67)$$

откуда находим «энергии»  $|\tilde{E}|$  и  $|E|$ :

$$|\tilde{E}| = \frac{1}{4\tilde{n}_0^2} = \frac{J^{4/3}}{4n_0^2}, \quad |E| = \frac{J^2}{4n_0^2}, \quad (68)$$

которые растут пропорционально  $J^{4/3}$  и  $J^2$  соответственно.

Отсюда становится ясным, почему в приближении МГ требовалось обращение  $n_0$  в бесконечность — чтобы обратить в нуль постоянную  $C = -E$ . При конечном значении  $n_0$  «энергия»  $|\tilde{E}|$  может стать больше  $Jl$  и приближение МГ становится несправедливым. Как увидим ниже, при выполнении условия (73) ВАХ снова становится линейной.

### 8. ЗАВИСИМОСТЬ ТОКА ОТ НАПРЯЖЕНИЯ (ВАХ) ПРИ БОЛЬШОМ ТОКЕ ( $Jl^3 > 1$ )

Найдем ВАХ из формулы

$$V = \int_0^L \varepsilon dx = \ln \left( \frac{u(0)}{u(l)} \right) = -\ln \left( \frac{A \operatorname{Ai}(z_l) + \operatorname{Bi}(z_l)}{A \operatorname{Ai}(z_0) + \operatorname{Bi}(z_0)} \right), \quad n_0 = n_l. \quad (69)$$

Учитывая асимптотики (55) для  $z_l$ , а также соотношение  $A \operatorname{Ai}(z_0) \gg \operatorname{Bi}(z_0)$ , приходим к выражению

$$\frac{u(l)}{u(0)} \approx \frac{\exp \left( -\frac{2}{3} \left( J^{1/3}l + \tilde{E} \right)^{3/2} \right) \psi(z_l)}{\operatorname{Ai}(z_0)}, \quad (70)$$

$$\psi(z_l) = \frac{1}{\pi^{1/2} z_l^{1/4} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{\tilde{n}_0}{z_l}} \right)}.$$

В интервалах 1 и 2,

$$\frac{1}{l^2} < Jl \lesssim \frac{n_0(n_0 l^2)^{1/2}}{a^3},$$

где  $|\tilde{E}| \sim 1$ , основной вклад вносит экспонента  $\exp(-2J^{1/2}J^{3/2}/3)$ , поэтому из формул (69) и (70) получаем с точностью до  $\ln(J^{1/3}l)$

$$V = \frac{2}{3} J^{1/2} l^{3/2} + O \left[ \ln(J^{1/3}l) \right], \quad (71)$$

$$J \approx \frac{9}{4} \frac{V^2}{L^3},$$

что совпадает с оригинальным результатом МГ [1].

В интервале 3,  $Jl > n_0(n_0 l^2)^{1/2}$ , величина  $|\tilde{E}|$  становится большой. Поэтому для  $\operatorname{Ai}(z_0) = \operatorname{Ai}(|\tilde{E}|)$

можно использовать асимптотику (55), подставляя которую в (70), найдем

$$\frac{u(l)}{u(0)} = \exp \left( -\frac{2}{3} \left[ \left( J^{1/3}l + |\tilde{E}| \right)^{3/2} - |\tilde{E}|^{3/2} \right] \right) \times z_0^{1/4} \cdot 2\pi^{1/2} \psi(z_l). \quad (72)$$

Результат зависит от соотношения между величинами  $|\tilde{E}|$  и  $J^{1/3}l$ . Если  $|\tilde{E}| < J^{1/3}l$ , снова имеем выражение (71). Однако при  $|\tilde{E}| > J^{1/3}l$  или

$$J > 4n_0^2 l \quad (73)$$

получаем линейную ВАХ

$$J = \frac{2n_0 V}{l}. \quad (74)$$

При выполнении условия (73) дырки почти полностью заполняют изолятор,

$$n(x) \approx n_0 \left( 1 - \frac{4n_0^2}{J} x \right), \quad \frac{n_0^2 l}{J} \ll 1. \quad (75)$$

Таким образом, квадратичный закон МГ реализуется в интервале

$$\frac{1}{l^2} < Jl < 4n_0^2 l^2 \quad \left( J_1 = \frac{1}{l^3}, \quad J_2 = 4n_0^2 l \right).$$

До сих пор в разд. 8 предполагалось, что  $n_0 = n_l$ . Все результаты останутся прежними и для  $n_l < n_0$ , так как при  $Jl^3 > 1$  в выражении для коэффициента  $A$  величиной  $\tilde{n}_l$  можно пренебречь. Надо только к напряжению  $V$  добавить

$$V_{bi} = \ln \left( \frac{n_0}{n_l} \right). \quad (76)$$

### 9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе аналитически решена задача о протекании тока через идеальный изолятор с учетом диффузии и реалистичных граничных условий. Показано, что квадратичная зависимость МГ (71), или в размерной форме

$$J_p = \frac{9}{8} \frac{\kappa}{4\pi} \mu_p \frac{V_p^2}{L^3}, \quad (77)$$

реализуется только в интервале токов  $J_1 < J < J_2$ ,

$$J_1 = \frac{1}{l^3}, \quad J_2 = 4n_0^2 l, \quad (78)$$

или в размерной форме

$$J_{p1} = \mu_p \left( \frac{k_B T}{e} \right)^2 \frac{\kappa}{2\pi l^3}, \quad J_{p2} = e^2 \mu_p p^2 l \frac{8\pi}{\kappa}. \quad (79)$$



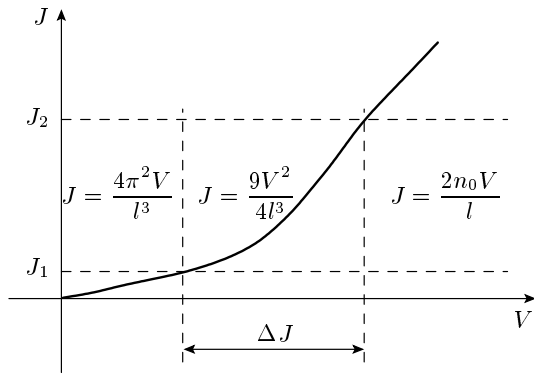


Рис. 3. Зависимость тока от напряжения для идеального изолятора.  $\Delta J$  — область применимости ВАХ МГ

Кроме того, должно выполняться условие

$$n_0 l^2 \gg 1,$$

или в размерной форме

$$l^2 \gg r_D^2, \quad r_D^{-2} = \frac{2\pi p_0 e^2}{\kappa k_B T}. \quad (80)$$

Вне этого интервала для малых токов ( $Jl^3 < 1$ ,  $n_0 = n_l$ ) зависимость  $J_p$  от  $V_p$  носит линейный характер (45) или

$$J_p = \mu_p \frac{V_p}{l^3} \frac{k_B T}{e} \kappa \quad (81)$$

с точностью до кубических по  $V$  членов.

Если  $n_l \ll n_0$ ,  $n_l l^2 \ll 1$  и  $Jl^3 < 1$  с точностью до  $V^3$  сохраняется линейная зависимость (48) или

$$J_p = \frac{e p_l \mu_p V_p}{l} \ln^3 \left( \frac{1}{n_l l^2} \right). \quad (82)$$

При больших токах и напряжениях

$$Jl^3 > (2n_0 l^2)^2, \quad V > 2n_0 l^2, \quad V_p > \frac{8\pi e}{\kappa} p_0 l \quad (83)$$

ВАХ снова становится линейной (74), или в размерной форме

$$J_p = e \mu_p p_0 \frac{V_p}{l}. \quad (84)$$

Этот новый результат объясняется полным заполнением изолятора дырками до граничной концентрации  $p_0$ . Полный ход ВАХ во всей области изменения тока изображен на рис. 3.

На рис. 4 изображены зависимости от тока «энергий»  $E$  и  $\tilde{E}$  для различных соотношений  $n_l l^2$  и  $n_0/n_l$  во всем интервале токов.

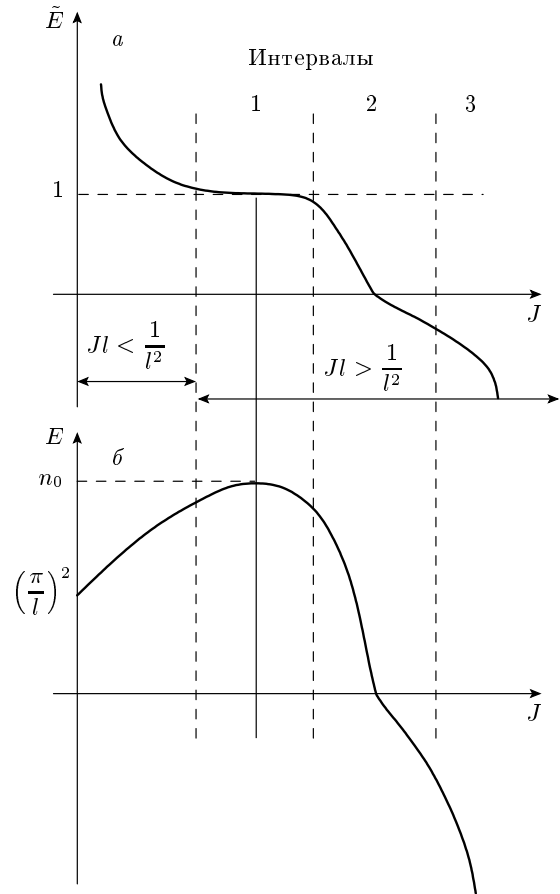


Рис. 4. Зависимости  $\tilde{E}$  (а) и  $E$  (б) от тока  $J$

Условие (83) приводит для  $p_0 = 10^{18} \text{ см}^{-3}$ ,  $\kappa = 10$ ,  $l = 100 \text{ нм}$  к значению напряженности поля  $e_P \approx 10^6 \text{ В/см}$ .

Автор выражает благодарность К. С. Гришакову за обсуждения и помощь в подготовке рукописи к печати.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Найдем «энергию» вблизи  $n_l l^2 \sim 1$  и малого тока (см. разд. 6). Необходимо учесть члены до четвертой степени включительно:

$$\text{Ai}(z) = \left[ c_1 \left( 1 + \frac{z^3}{6} \right) - c_2 \left( z + \frac{z^4}{12} \right) \right], \quad (\text{A.1})$$

$$\text{Bi}(z) = \sqrt{3} \left[ c_1 \left( 1 + \frac{z^3}{6} \right) + c_2 \left( z + \frac{z^4}{12} \right) \right]. \quad (\text{A.2})$$

Из граничного условия (14)

$$\tilde{n}_0 - \tilde{E} = \varepsilon^2(0) = \left( \frac{Aa_- + \sqrt{3}a_+}{Ab_- + \sqrt{3}b_+} \right)^2 \quad (\text{A.3})$$

находим  $A_{\pm}$ :

$$A_{\pm} = \pm\sqrt{3} \left[ \frac{b_+ \sqrt{\tilde{n}_0 - \tilde{E}} \mp a_+}{\mp b_- \sqrt{\tilde{n}_0 - \tilde{E}} + a_-} \right], \quad (\text{A.4})$$

где

$$\begin{aligned} a_{\pm}(\tilde{E}) &= \frac{c_2}{2} \tilde{E} \pm c_2 \left( 1 - \frac{\tilde{E}^3}{3} \right), \\ b_{\pm}(\tilde{E}) &= c_1 \left( 1 - \frac{\tilde{E}^3}{6} \right) \pm c_2 \left( -\tilde{E} + \frac{\tilde{E}^4}{12} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Учитывая, что

$$\tilde{n}_0 = \frac{n_0 l^2}{(J^{1/3}l)^2} \gg 1$$

выражение для  $A_{\pm}$  можно упростить:

$$A_{\pm} = A_- = A = -\frac{b_+(\tilde{E})}{b_-(\tilde{E})}. \quad (\text{A.6})$$

Подставляя  $A$  в граничное условие (15) при  $x = l$ , получаем уравнение для  $\tilde{E}$ :

$$\tilde{n}_0 - \tilde{E} + \tilde{l} = \varepsilon^2(l) = \left( \frac{\tilde{a}_+ b_- - \tilde{a}_- b_+}{\tilde{b}_+ b_- - \tilde{b}_- b_+} \right)^2, \quad (\text{A.7})$$

где  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$  даются формулой (A.5) с заменой  $-\tilde{E}$  на  $z_l = -\tilde{E} + J^{1/3}l$ .

После громоздких вычислений приходим к уравнению для  $E$ :

$$n_l - E + Jl = \varepsilon^2(l) = \frac{1}{l^2} \left[ \frac{1 - \frac{El^2}{2} + \frac{Jl^3}{3}}{1 - \frac{El^2}{6} + \frac{Jl^3}{12}} \right]^2, \quad (\text{A.8})$$

из которого находим

$$E = 3 \left[ \frac{1}{l^2} \left( 1 - \frac{1}{nl^2} \right) + \frac{Jl}{2} \right]. \quad (\text{A.9})$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. Ламперт, П. Марк, *Инжекционные токи в твердых телах*, Мир, Москва (1973).
2. J. S. Bonham and D. H. Jarvis, *Aust. J. Chem.* **30**, 705 (1977).
3. S. L. M. van Mensfoort and R. Coehoorn, *Phys. Rev. B* **78**, 085207 (2008).
4. H. Y. Fan, *Phys. Rev.* **74**, 1505 (1948).
5. W. Shocley and R. C. Prim, *Phys. Rev.* **90**, 753 (1953).
6. F. Neumann et al., *Phys. Rev. B* **75**, 205322 (2007).
7. Yu. A. Genenko et al., *Phys. Rev. B* **81**, 125310 (2010).
8. *Справочник по специальным функциям*, под ред. М. Абрамовича, И. Стиган, Наука, Москва (1979).
9. R. de Levie and Moreira, *J. Membr. Biol.* **9**, 241 (1972).
10. В. М. Галицкий, Б. И. Карнаков, В. И. Коган, *Задачи по квантовой механике*, Наука, Москва (1981).