ЖЭТФ, 2015, том 147, вып. 1, стр. 157–164

БИЛИНЕЙНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ЗАДАЧЕ О ГАЛЬВАНОМАГНИТНЫХ СВОЙСТВАХ КОМПОЗИТОВ

Б. Я. Балагуров[*]

Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля Российской академии наук
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 21 августа 2014 г.

Рассмотрены некоторые общие свойства тензора эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$ композита, помещенного в магнитное поле напряженности $\mathbf{H}$. Показано, что производные от составляющих тензора $\hat{\sigma}_e$ по их аргументам могут быть выражены через различные билинейные характеристики — средние значения произведений напряженностей электрического поля в исходной и «транспонированной» (отличающейся от исходной заменой $\mathbf{H} \to -\mathbf{H}$) системах. При $H \to 0$ из полученных общих формул следуют известные выражения для коэффициента Холла и магнитосопротивления, справедливые для случая слабых магнитных полей.

DOI: 10.7868/S0044451015010149

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение гальваномагнитных свойств неоднородных сред (в частности, композитов) представляет значительный интерес как с прикладной, так и с общефизической точек зрения. Хотя аналитический подход к этой задаче наталкивается на серьезные трудности, в двумерном случае в ее решении имеется определенный прогресс. Так, Дыхне [1] с помощью преобразования симметрии нашел в явном виде эффективный тензор проводимости $\hat{\sigma}_e$ двумерной двухкомпонентной системы с критическим составом. В работах [2, 3] установлен изоморфизм задач о гальваномагнитных свойствах двумерной бинарной системы и ее проводимости в отсутствие магнитного поля. Найденные в работах [2, 3] соотношения изоморфизма позволили выразить составляющие тензора $\hat{\sigma}_e$ через гальваномагнитные характеристики отдельных компонент и эффективную проводимость системы при $\mathbf{H} = 0$. Тем самым задача о гальваномагнитных свойствах двумерных двухкомпонентных систем произвольной структуры фактически получила полное решение.

Преобразование симметрии, предложенное в работе [1] и использованное в работе [3], не переносится на трехмерный случай, так что здесь точных результатов столь же общего характера, как для двумерных систем, не найдено. По этой причине для трехмерных систем аналитические результаты получены только в некоторых предельных случаях. Так, например, в случае произвольных магнитных полей тензор эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$ вычислялся в работах [4–6] для слабонеоднородной среды и в [6] — в линейном по концентрации включений (произвольной формы) приближении. Коэффициент Холла в слабом магнитном поле исследовался аналитическими методами в работах [7, 8] и численными — в [9, 10]. Последовательная теория гальваномагнитных свойств бинарных композитов в случае слабого магнитного поля дана в работе [11], где найдены общие выражения для коэффициента Холла и магнитосопротивления. В [11], кроме того, обращено внимание на важность исследования различных парциальных квадратичных эффективных характеристик — средних значений квадратов напряженности электрического поля, вычисленных по объемам отдельных компонент.

Перспективность изучения подобных среднеквадратичных величин была продемонстрирована при численном исследовании [12] проводимости (при $\mathbf{H} = 0$) неупорядоченных трехмерных решеток. В работе [12], например, найдена производная от безразмерной эффективной проводимости компози-

[*] E-mail: balagurov@deom.chph.ras.ru, byabalagurov@mail.ru

та по одному из ее аргументов без использования численного дифференцирования. Как показано в [12], определение среднеквадратичных характеристик напряженности электрического поля дает возможность более детально, чем в ходе стандартного численного эксперимента, исследовать окрестность порога протекания — точки фазового перехода металл–диэлектрик. Такой комплексный численный эксперимент позволяет провести всестороннюю проверку справедливости гипотезы подобия [13, 14].

В настоящей работе обсуждаются некоторые общие свойства эффективного тензора проводимости $\hat{\sigma}_e$ композитов, помещенных в магнитное поле $\mathbf{H}$ произвольной величины. Основное внимание уделено выяснению связи производных от $\hat{\sigma}_e$ с напряженностью электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ в среде. Показано, что производные от составляющих тензора $\hat{\sigma}_e$ по соответствующим аргументам выражаются через парциальные билинейные эффективные характеристики — средние (по объемам отдельных компонент) значения произведений напряженностей электрического поля в исходной и «транспонированной», отличающейся от исходной только заменой $\mathbf{H} \to -\mathbf{H}$, системах. Рассмотрен также случай слабого магнитного поля и выяснено, как из общих формул настоящей работы в пределе $H \to 0$ следуют результаты, полученные в работе [11].

2. ТЕНЗОР ЭФФЕКТИВНОЙ ПРОВОДИМОСТИ

Обсудим сначала постановку задачи о гальваномагнитных свойствах композита и введем необходимые обозначения. Для вычисления тензора эффективной проводимости неоднородной среды необходимо решить уравнения постоянного тока

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{j} = 0 \tag{1}$$

при соответствующих граничных условиях. В линейной задаче плотность тока $\mathbf{j}$ и напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ связаны законом Ома

$$\mathbf{j} = \hat{\sigma}(\mathbf{r})\,\mathbf{E}, \tag{2}$$

где $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$ — локальный тензор проводимости среды. Тензор эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$ определяется обычным образом:

$$\langle \mathbf{j}\,\rangle = \hat{\sigma}_e \langle \mathbf{E} \rangle, \tag{3}$$

где $\langle \ldots \rangle$ — среднее по объему образца V при $V \to \infty$.

Проводимость исходно изотропной среды, помещенной в магнитное поле напряженности $\mathbf{H}$, описывается тензором

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_a & 0 \\ -\sigma_a & \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где принято, что поле $\mathbf{H}$ направлено вдоль оси z. Для упрощения последующих формул в (4) введены обозначения $\sigma_x = \sigma_{xx} = \sigma_{yy}$, $\sigma_z = \sigma_{zz}$, $\sigma_a = \sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$ для поперечной, продольной и холловской составляющих тензора проводимости $\hat{\sigma}$. Такой же вид, как (4), имеет и тензор эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$.

Для бинарного композита тензор $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$ принимает постоянные значения $\hat{\sigma}_1$ и $\hat{\sigma}_2$ соответственно в первой и второй компонентах. Эффективный тензор проводимости в этом случае зависит от семи аргументов:

$$\hat{\sigma}_e = \hat{\sigma}_e(p; \sigma_{1x}, \sigma_{1z}, \sigma_{1a}; \sigma_{2x}, \sigma_{2z}, \sigma_{2a}), \tag{5}$$

где p — безразмерная концентрация (доля занимаемого объема) первой компоненты. Определение трех многопараметрических функций σ_{ex}, σ_{ez} и σ_{ea} вида (5) является основной задачей теории гальваномагнитных свойств двухкомпонентных композитов. Эта задача крайне сложна и в общем виде вряд ли разрешима. В то же время некоторые общие свойства тензора $\hat{\sigma}_e$ могут быть установлены без решения уравнений постоянного тока (1) с заданным $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$. Такой подход, использующий, как и в работе [11], следствия различных преобразований симметрии, естественно назвать феноменологическим.

Как отмечено, например, в работах [3, 11], уравнения постоянного тока (1) сохраняют свой вид при преобразовании

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}', \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}' + \hat{C}\mathbf{E}', \tag{6}$$

где $\hat{C}$ — независящий от координат произвольный антисимметричный тензор: $C_{\alpha\beta} = -C_{\beta\alpha}$. Тензор проводимости «штрихованной» системы имеет вид

$$\hat{\sigma}'(\mathbf{r}) = \hat{\sigma}(\mathbf{r}) - \hat{C}. \tag{7}$$

Таким же соотношением связаны тензоры эффективной проводимости исходной $\hat{\sigma}_e$ и штрихованной $\hat{\sigma}'_e$ систем:

$$\hat{\sigma}_e = \hat{\sigma}'_e + \hat{C}. \tag{8}$$

Рассмотрим бинарную среду и положим $\hat{C} = \hat{\sigma}_{2a}$, где $\hat{\sigma}_{2a}$ — антисимметричная (холловская) часть тензора проводимости второй компоненты $\hat{\sigma}_2$. Тогда в штрихованной системе для холловских составляющих получаем: $\sigma'_{2a} = 0$ и $\sigma'_{1a} = \sigma_{1a} - \sigma_{2a}$. Таким образом, тензор $\hat{\sigma}'_e$ зависит от σ_{1a} и σ_{2a} только в виде разности $\sigma_{1a} - \sigma_{2a}$. Это означает, что в исходной системе величины σ_{ex}, σ_{ez} и $\sigma_{ea} - \sigma_{2a}$ также зависят только от $\sigma_{1a} - \sigma_{2a}$. Заметим, что при $\sigma_{1a} = \sigma_{2a} = \sigma_a$ имеем $\sigma_{ea} = \sigma_a$.

Как известно, при изменении знака напряженности магнитного поля тензор проводимости переходит в транспонированный: $\hat{\sigma}(-\mathbf{H}) = \hat{\sigma}^T(\mathbf{H})$. Поэтому составляющие σ_x и σ_z — четные функции $\mathbf{H}$, а σ_a — нечетная функция $\mathbf{H}$: $\sigma_x(-\mathbf{H}) = \sigma_x(\mathbf{H})$, $\sigma_z(-\mathbf{H}) = \sigma_z(\mathbf{H})$, $\sigma_a(-\mathbf{H}) = -\sigma_a(\mathbf{H})$. Этими же свойствами обладает и тензор эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$. Таким образом, соображения симметрии и четности приводят к выводу, что составляющие тензора $\hat{\sigma}_e$ могут быть представлены в виде

$$\begin{gathered}\sigma_{e\nu} = \sigma_{e\nu}\big(p; \sigma_{1x}, \sigma_{1z}; \sigma_{2x}, \sigma_{2z}; \sigma_{1a} - \sigma_{2a}\big),\\ \nu = x, y,\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ea} = \sigma_{2a} + \big(\sigma_{1a} - \sigma_{2a}\big) \times \\ \times F\big(p; \sigma_{1x}, \sigma_{1z}; \sigma_{2x}, \sigma_{2z}; \sigma_{1a} - \sigma_{2a}\big).\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь функции σ_{ex} и F раскладываются в ряд по четным степеням $\sigma_{1a} - \sigma_{2a}$. Заметим, что выражение (10) записано с учетом условия $\sigma_{ea} = \sigma_a$ при $\sigma_{1a} = \sigma_{2a} = \sigma_a$. Отметим также, что при $H \to 0$ холловские составляющие σ_{ia} линейны по H, а поправки в выражениях для σ_{ix} и σ_{iz} — квадратичны. Этими же свойствами обладают и составляющие тензора $\hat{\sigma}_e$.

Из формул (9), (10) следует, что производные от σ_{ex}, σ_{ez} и σ_{ea} по аргументам σ_{1a} и σ_{2a} связаны между собой соотношениями

$$\frac{\partial \sigma_{e\nu}}{\partial \sigma_{2a}} = -\frac{\partial \sigma_{e\nu}}{\partial \sigma_{1a}}, \quad \nu = x, z, \tag{11}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ea}}{\partial \sigma_{2a}} = 1 - \frac{\partial \sigma_{ea}}{\partial \sigma_{1a}}. \tag{12}$$

В (12) учтено, что

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{2a}} = -\frac{\partial F}{\partial \sigma_{1a}}. \tag{13}$$

Равенства (11), (12) позволяют ограничиться вычислением производных только по одному из аргументов: σ_{1a} или σ_{2a}.

Величины σ_{ex}, σ_{ez} и σ_{ea} являются однородными функциями первого порядка по отношению к аргументам σ_{ix}, σ_{iz} и σ_{ia}. Поэтому по теореме Эйлера об однородных функциях должно выполняться равенство

$$\hat{\sigma}_e = \sum_i \left\{ \sigma_{ix} \frac{\partial \hat{\sigma}_e}{\partial \sigma_{ix}} + \sigma_{iz} \frac{\partial \hat{\sigma}_e}{\partial \sigma_{iz}} + \sigma_{ia} \frac{\partial \hat{\sigma}_e}{\partial \sigma_{ia}} \right\}. \tag{14}$$

В то же время величина F из (10) является однородной функцией нулевого порядка, так что для нее имеем

$$\sum_i \left\{ \sigma_{ix} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ix}} + \sigma_{iz} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{iz}} + \sigma_{ia} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ia}} \right\} = 0. \tag{15}$$

Равенства (14) и (15) справедливы для n-компонентных ($i = 1, \ldots, n$) сред. Для бинарных систем эти соотношения с учетом (11)–(13) могут быть преобразованы к виду

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_e = \hat{\sigma}_{2a} + \sum_{i=1}^{2} \left\{ \sigma_{ix} \frac{\partial \hat{\sigma}_e}{\partial \sigma_{ix}} + \sigma_{iz} \frac{\partial \hat{\sigma}_e}{\partial \sigma_{iz}} \right\} + \\ + \big(\sigma_{1a} - \sigma_{2a}\big) \frac{\partial \hat{\sigma}_e}{\partial \sigma_{1a}},\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2} \left\{ \sigma_{ix} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ix}} + \sigma_{iz} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{iz}} \right\} + \\ + \big(\sigma_{1a} - \sigma_{2a}\big) \frac{\partial F}{\partial \sigma_{1a}} = 0.\end{aligned} \tag{17}$$

В (16) $\hat{\sigma}_{2a}$ — антисимметричная часть тензора проводимости второй компоненты $\hat{\sigma}_2$.

Для бинарных случайно-неоднородных сред одновременная замена $p \to 1 - p$ и $\hat{\sigma}_1 \rightleftarrows \hat{\sigma}_2$ не меняет их макроскопических свойств, так что

$$\hat{\sigma}_e(p; \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2) = \hat{\sigma}_e(1 - p; \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_1). \tag{18}$$

Отсюда с учетом (9) и (10) следуют соотношения

$$\begin{aligned}\sigma_{e\nu}(p; \sigma_{1x}, \sigma_{1z}; \sigma_{2x}, \sigma_{2z}; \sigma_{1a} - \sigma_{2a}) = \\ = \sigma_{e\nu}(1 - p; \sigma_{2x}, \sigma_{2z}; \sigma_{1x}, \sigma_{1z}; \sigma_{1a} - \sigma_{2a}),\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}F(p; \sigma_{1x}, \sigma_{1z}; \sigma_{2x}, \sigma_{2z}; \sigma_{1a} - \sigma_{2a}) + \\ + F(1 - p; \sigma_{2x}, \sigma_{2z}; \sigma_{1x}, \sigma_{1z}; \sigma_{1a} - \sigma_{2a}) = 1.\end{aligned} \tag{20}$$

Соотношения (19), (20) могут быть полезны в качестве проверочных при численном изучении гальваномагнитных свойств неупорядоченных решеток.

Необходимость в знании производных от составляющих тензора $\hat{\sigma}_e$ по аргументам σ_{ix}, σ_{iz} и σ_{ia} возникает, в частности, в задаче о диэлектрической проницаемости композита в квазистационарном электрическом поле частоты ω (см., например, [13]). В этом случае тензор проводимости становится комплексным, а решение квазистационарной задачи следует из решения статической при замене [15]

$$\hat{\sigma}_i \to \hat{\sigma}_i - \frac{i\,\omega}{4\pi}\,\hat{\varepsilon}_i, \quad \hat{\sigma}_e \to \hat{\sigma}_e - \frac{i\omega}{4\pi}\,\hat{\varepsilon}_e, \tag{21}$$

где тензор диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$ имеет ту же структуру, что и $\hat{\sigma}$ из (4). Проведя эти замены в (5), в пределе $\omega \to 0$ найдем

$$\hat{\varepsilon}_e = \sum_i \left\{ \varepsilon_{ix} \frac{\partial \hat{\sigma}_e}{\partial \sigma_{ix}} + \varepsilon_{iz} \frac{\partial \hat{\sigma}_e}{\partial \sigma_{iz}} + \varepsilon_{ia} \frac{\partial \hat{\sigma}_e}{\partial \sigma_{ia}} \right\}. \quad (22)$$

Соотношение (22) справедливо для n-компонентной среды. Для бинарного композита равенство (22) с учетом (11), (12) может быть записано также в виде

$$\hat{\varepsilon}_e = \hat{\varepsilon}_{2a} + \sum_{i=1}^{2} \left\{ \varepsilon_{ix} \frac{\partial \hat{\sigma}_e}{\partial \sigma_{ix}} + \varepsilon_{iz} \frac{\partial \hat{\sigma}_e}{\partial \sigma_{iz}} \right\} + \\ + \left(\varepsilon_{1a} - \varepsilon_{2a}\right) \frac{\partial \hat{\sigma}_e}{\partial \sigma_{1a}}, \quad (23)$$

где $\hat{\varepsilon}_{2a}$ — антисимметричная часть тензора диэлектрической проницаемости второй компоненты.

3. БИЛИНЕЙНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Согласно [11] при $\mathbf{H} = 0$ производные от эффективной проводимости σ_e изотропного композита выражаются через средние значения квадратов напряженности электрического поля, вычисленные по объемам каждой из компонент. Такие соотношения оказываются полезными, например, при компьютерных экспериментах на неупорядоченных решетках [12]. Подобного типа соотношения могут быть установлены и в случае $\mathbf{H} \neq 0$. При их выводе приме́ним тот же прием, что и в работе [11], где использовались некоторые тождества, обобщающие известное (см., например, [16]): $\langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \rangle = \langle \mathbf{E} \rangle \cdot \langle \mathbf{j} \rangle$.

Обозначим через $\mathbf{E}^{(\nu)}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{j}^{(\nu)}(\mathbf{r})$ напряженность электрического поля и плотность тока в среде, определенные при заданном значении $\langle \mathbf{E}^{(\nu)} \rangle$. Здесь верхний индекс «$\nu$» означает, что средняя напряженность поля $\langle \mathbf{E}^{(\nu)} \rangle$ направлена вдоль оси ν. Если ν совпадает с одной из координатных осей, то

$$\langle E_\alpha^{(\nu)} \rangle = \langle E_\nu^{(\nu)} \rangle \delta_{\alpha\nu}, \quad \alpha, \nu = x, y, z, \quad (24)$$

где $\delta_{\alpha\nu}$ — символ Кронекера. Пусть для некоторой системы с тензором проводимости $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$ известна напряженность $\mathbf{E}^{(\nu)}(\mathbf{r})$ и, тем самым, плотность тока $\mathbf{j}^{(\nu)}(\mathbf{r})$. Изменим проводимость этой системы и знак магнитного поля: $\hat{\sigma}(\mathbf{r}) \to \tilde{\hat{\sigma}}(\mathbf{r})$, где значок «тильда» включает также операцию транспонирования (или $\mathbf{H} \to -\mathbf{H}$). Для системы с тильдой будем иметь величины $\widetilde{\mathbf{E}}^{(\mu)}(\mathbf{r})$ и $\widetilde{\mathbf{j}}^{(\mu)}(\mathbf{r})$, определенные при заданном $\langle \widetilde{\mathbf{E}}^{(\mu)} \rangle$.

В этом случае аналогично [11] могут быть установлены два следующих соотношения:

$$\langle \widetilde{\mathbf{E}}^{(\mu)} \cdot \mathbf{j}^{(\nu)} \rangle = \langle \widetilde{\mathbf{E}}^{(\mu)} \rangle \cdot \langle \mathbf{j}^{(\nu)} \rangle, \\ \langle \mathbf{E}^{(\nu)} \cdot \widetilde{\mathbf{j}}^{(\mu)} \rangle = \langle \mathbf{E}^{(\nu)} \rangle \cdot \langle \widetilde{\mathbf{j}}^{(\mu)} \rangle, \quad (25)$$

причем (ср. с (3))

$$\langle \mathbf{j}^{(\nu)} \rangle = \hat{\sigma}_e \langle \mathbf{E}^{(\nu)} \rangle, \quad \langle \widetilde{\mathbf{j}}^{(\mu)} \rangle = \tilde{\hat{\sigma}}_e \langle \widetilde{\mathbf{E}}^{(\mu)} \rangle. \quad (26)$$

Для величин $\mathbf{E}^{(\nu)}(\mathbf{r})$ и $\widetilde{\mathbf{E}}^{(\mu)}(\mathbf{r})$ может быть установлено еще одно тождество (ср. с [11]):

$$\langle [\widetilde{\mathbf{E}}^{(\mu)} \times \mathbf{E}^{(\nu)}] \rangle = [\langle \widetilde{\mathbf{E}}^{(\mu)} \rangle \times \langle \mathbf{E}^{(\nu)} \rangle], \quad (27)$$

где $[\ldots \times \ldots]$ — векторное произведение. Тождества (25) и (27) имеют место для произвольных неоднородных сред, помещенных в магнитное поле. Для их выполнения достаточно, чтобы величины $\mathbf{E}^{(\nu)}(\mathbf{r})$, $\mathbf{j}^{(\nu)}(\mathbf{r})$, а также $\widetilde{\mathbf{E}}^{(\mu)}(\mathbf{r})$, $\widetilde{\mathbf{j}}^{(\mu)}(\mathbf{r})$ подчинялись уравнениям постоянного тока вида (1).

Рассмотрим n-компонентный композит с тензором проводимости (4). В этом случае, расписывая левую часть первого тождества из (25) в виде суммы по отдельным компонентам, получим следующее равенство:

$$\sum_k \Big\{ \sigma_{kx} \langle \widetilde{E}_x^{(\mu)} E_x^{(\nu)} + \widetilde{E}_y^{(\mu)} E_y^{(\nu)} \rangle^{(k)} + \\ + \sigma_{kz} \langle \widetilde{E}_z^{(\mu)} E_z^{(\nu)} \rangle^{(k)} + \sigma_{ka} \langle \big[\widetilde{\mathbf{E}}^{(\mu)} \times \mathbf{E}^{(\nu)}\big]_z \rangle^{(k)} \Big\} = \\ = \sigma_{ex} \Big\{ \langle \widetilde{E}_x^{(\mu)} \rangle \langle E_x^{(\nu)} \rangle + \langle \widetilde{E}_y^{(\mu)} \rangle \langle E_y^{(\nu)} \rangle \Big\} + \\ + \sigma_{ez} \langle \widetilde{E}_z^{(\mu)} \rangle \langle E_z^{(\nu)} \rangle + \sigma_{ea} \big[\langle \widetilde{\mathbf{E}}^{(\mu)} \rangle \times \langle \mathbf{E}^{(\nu)} \rangle\big]_z, \quad (28)$$

где $[\ldots]_z$ означает z-составляющую соответствующего векторного произведения. В (28) индекс «k» нумерует компоненты ($k = 1, \ldots, n$), а величина

$$\langle (\ldots) \rangle^{(k)} = \frac{1}{V} \int\limits_{V_k} (\ldots)\, dV \quad (29)$$

представляет собой парциальное среднее по объему k-й компоненты V_k.

Поступив аналогичным образом со вторым тождеством из (25) и вычтя из полученного равенства соотношение (28), найдем

$$\sum_k \Big\{ \delta\sigma_{kx} \langle \widetilde{E}_x^{(\mu)} E_x^{(\nu)} + \widetilde{E}_y^{(\mu)} E_y^{(\nu)} \rangle^{(k)} + \\ + \delta\sigma_{kz} \langle \widetilde{E}_z^{(\mu)} E_z^{(\nu)} \rangle^{(k)} + \delta\sigma_{ka} \langle \big[\widetilde{\mathbf{E}}^{(\mu)} \times \mathbf{E}^{(\nu)}\big]_z \rangle^{(k)} \Big\} = \\ = \delta\sigma_{ex} \Big\{ \langle \widetilde{E}_x^{(\mu)} \rangle \langle E_x^{(\nu)} \rangle + \langle \widetilde{E}_y^{(\mu)} \rangle \langle E_y^{(\nu)} \rangle \Big\} + \\ + \delta\sigma_{ez} \langle \widetilde{E}_z^{(\mu)} \rangle \langle E_z^{(\nu)} \rangle + \delta\sigma_{ea} \big[\langle \widetilde{\mathbf{E}}^{(\mu)} \rangle \times \langle \mathbf{E}^{(\nu)} \rangle\big]_z. \quad (30)$$

Здесь $\delta\sigma_{kx} = \widetilde{\sigma}_{kx} - \sigma_{kx}, \ldots$; $\delta\sigma_{ex} = \widetilde{\sigma}_{ex} - \sigma_{ex}, \ldots$, причем в $\widetilde{\sigma}_{ka}$ и $\widetilde{\sigma}_{ea}$ учтено изменение знака $\mathbf{H}$.

Положим в (30) $\mu = \nu = x$, $\delta\sigma_{kz} = \delta\sigma_{ka} = 0$ при всех k, $\delta\sigma_{kx} = 0$ для $k \neq i$ и $\delta\sigma_{ix} \neq 0$. Тогда из (30) с учетом (24) в пределе $\delta\sigma_{ix} \to 0$ получим

$$\frac{\partial\sigma_{ex}}{\partial\sigma_{ix}} = \frac{\langle\, \bar{E}_x^{(x)} E_x^{(x)} + \bar{E}_y^{(x)} E_y^{(x)} \rangle^{(i)}}{\langle\, \bar{E}_x^{(x)} \rangle \langle\, E_x^{(x)} \rangle}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{31}$$

В (31) и ниже черточкой отмечается напряженность электрического поля, относящаяся к транспонированной системе, которая отличается от исходной только знаком напряженности магнитного поля. Далее, положив в соотношении (30) $\mu = \nu = z, \ldots$, таким же образом найдем производную $\partial\sigma_{ez}/\partial\sigma_{ix}$, выражение для которой можно объединить с (31) в единую формулу

$$\frac{\partial\sigma_{e\nu}}{\partial\sigma_{ix}} = \frac{\langle\, \bar{E}_x^{(\nu)} E_x^{(\nu)} + \bar{E}_y^{(\nu)} E_y^{(\nu)} \rangle^{(i)}}{\langle\, \bar{E}_\nu^{(\nu)} \rangle \langle\, E_\nu^{(\nu)} \rangle}, \quad \nu = x, z. \tag{32}$$

Аналогичным образом могут быть найдены и остальные производные.

В результате оказывается, что все производные от составляющих тензора $\hat{\sigma}_e$ по аргументам σ_{ix}, σ_{iz}, σ_{ia} выражаются через следующие билинейные эффективные (в пределе $V \to \infty$) характеристики композита трех типов:

$$\Psi_{i\perp}^{\mu\nu} = \frac{\langle\, \bar{E}_x^{(\mu)} E_x^{(\nu)} + \bar{E}_y^{(\mu)} E_y^{(\nu)} \rangle^{(i)}}{\langle\, \bar{E}_\mu^{(\mu)} \rangle \langle\, E_\nu^{(\nu)} \rangle}, \tag{33}$$

$$\Psi_{i\|}^{\mu\nu} = \frac{\langle\, \bar{E}_z^{(\mu)} E_z^{(\nu)} \rangle^{(i)}}{\langle\, \bar{E}_\mu^{(\mu)} \rangle \langle\, E_\nu^{(\nu)} \rangle}, \tag{34}$$

$$\Phi_i^{\mu\nu} = \frac{\langle\, \left[\bar{\mathbf{E}}^{(\mu)} \times \mathbf{E}^{(\nu)}\right]_z \rangle^{(i)}}{\langle\, \bar{E}_\mu^{(\mu)} \rangle \langle\, E_\nu^{(\nu)} \rangle}. \tag{35}$$

В формулах (33) и (34) индексы «$\perp$» и «$\|$» означают, что под знак среднего в числителе входят составляющие напряженностей $\bar{\mathbf{E}}^{(\mu)}$ и $\mathbf{E}^{(\nu)}$, перпендикулярные и параллельные магнитному полю соответственно.

Через величины (33)–(35) производные от σ_{ex}, σ_{ez}, σ_{ea} по аргументам σ_{ix}, σ_{iz}, σ_{ia} выражаются следующим образом:

$$\frac{\partial\sigma_{ex}}{\partial\sigma_{ix}} = \Psi_{i\perp}^{xx}, \quad \frac{\partial\sigma_{ex}}{\partial\sigma_{iz}} = \Psi_{i\|}^{xx}, \quad \frac{\partial\sigma_{ex}}{\partial\sigma_{ia}} = \Phi_i^{xx}, \tag{36}$$

$$\frac{\partial\sigma_{ez}}{\partial\sigma_{ix}} = \Psi_{i\perp}^{zz}, \quad \frac{\partial\sigma_{ez}}{\partial\sigma_{iz}} = \Psi_{i\|}^{zz}, \quad \frac{\partial\sigma_{ez}}{\partial\sigma_{ia}} = \Phi_i^{zz}, \tag{37}$$

$$\frac{\partial\sigma_{ea}}{\partial\sigma_{ix}} = \Psi_{i\perp}^{xy}, \quad \frac{\partial\sigma_{ea}}{\partial\sigma_{iz}} = \Psi_{i\|}^{xy}, \quad \frac{\partial\sigma_{ea}}{\partial\sigma_{ia}} = \Phi_i^{xy}. \tag{38}$$

Соотношения (36)–(38) справедливы для произвольных изотропных n-компонентных композитов.

Заметим, что для величин Φ_i^{xx}, Φ_i^{zz} и Φ_i^{xy} из (35) с учетом тождества (27) имеем следующие «правила сумм»:

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi_i^{\nu\nu} = 0, \quad \nu = x, z, \quad \sum_{i=1}^{n} \Phi_i^{xy} = 1. \tag{39}$$

Отсюда для двухкомпонентных систем получаем

$$\Phi_1^{\nu\nu} + \Phi_2^{\nu\nu} = 0, \quad \nu = x, z, \quad \Phi_1^{xy} + \Phi_2^{xy} = 1. \tag{40}$$

Подстановка сюда вместо $\Phi_i^{\mu\nu}$ соответствующих производных из (36)–(38) приводит к соотношениям (11), (12).

Через билинейные характеристики могут быть выражены и сами величины σ_{ex}, σ_{ez}, σ_{ea}. Положив в (28) $\mu = \nu$, найдем

$$\sigma_{e\nu} = \sum_i \Big\{ \sigma_{ix}\, \Psi_{i\perp}^{\nu\nu} + \sigma_{iz}\, \Psi_{i\|}^{\nu\nu} + \sigma_{ia}\, \Phi_i^{\nu\nu} \Big\}, \qquad \nu = x, z. \tag{41}$$

Соответственно при $\mu = x$ и $\nu = y$ из (28) получаем

$$\sigma_{ea} = \sum_i \Big\{ \sigma_{ix}\, \Psi_{i\perp}^{xy} + \sigma_{iz}\, \Psi_{i\|}^{xy} + \sigma_{ia}\, \Phi_i^{xy} \Big\}. \tag{42}$$

Подстановка в (41), (42) выражений для билинейных характеристик из (36)–(38) приводит к соотношениям (14) для составляющих тензора $\hat{\sigma}_e$. Формулы (41), (42) можно использовать для контроля правильности вычислений в ходе компьютерного эксперимента.

4. СЛАБЫЕ МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

Как отмечалось во Введении, для гальваномагнитных свойств бинарных композитов в слабом магнитном поле развита последовательная теория [11]. Рассмотрим этот случай, исходя из общих формул предыдущего раздела.

При $\mathbf{H} = 0$ тензор проводимости (4) сводится к скаляру ($\hat{\sigma}(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r})\hat{1}$, где $(\hat{1})_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$), так что в нулевом по H приближении имеем $\hat{\sigma}_e = \sigma_e \hat{1}$, где

$$\sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2) = \sigma_{e\nu}(p; \sigma_1, \sigma_1; \sigma_2, \sigma_2; 0), \qquad \nu = x, z. \tag{43}$$

Здесь функции σ_{ex} и σ_{ez} определены согласно (9). Величину σ_e удобно представить в виде

$$\sigma_e = \sigma_1\, f(p, h), \quad h = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \tag{44}$$

где $f(p,h)$ — безразмерная эффективная проводимость изотропного бинарного композита в отсутствие магнитного поля.

1. При $H \to 0$ холловская составляющая тензора проводимости обращается в нуль как первая степень H, так что в линейном по H приближении из (10) следует

$$\sigma_{ea} = \sigma_{2a} + (\sigma_{1a} - \sigma_{2a})\,\varphi_a(p,h), \tag{45}$$

где

$$\varphi_a(p,h) = F(p;\sigma_1,\sigma_1;\sigma_2,\sigma_2;0). \tag{46}$$

Дифференцируя соотношение (45) по σ_{1a}, получаем

$$\varphi_a(p,h) = \left(\frac{\partial\sigma_{ea}}{\partial\sigma_{1a}}\right)_0. \tag{47}$$

Правая часть в (47) вычисляется при $H = 0$, так что, переходя в третьем равенстве (38) (при $i = 1$) к пределу $H \to 0$, с учетом определения (35) найдем

$$\varphi_a(p,h) = \frac{\langle\,[\mathbf{E}_0^{(x)} \times \mathbf{E}_0^{(y)}]_z\rangle^{(1)}}{\langle\,E_{0x}^{(x)}\rangle\langle\,E_{0y}^{(y)}\rangle}, \tag{48}$$

где $\mathbf{E}_0^{(\nu)}(\mathbf{r})$ — напряженность электрического поля в среде при $H = 0$. Формулы (45) и (48) совпадают с соответствующими выражениями из работы [11] (см. также [8]).

В том же (линейном по H) приближении имеем

$$\left.\frac{\partial\sigma_{ea}}{\partial\sigma_i}\right|_{H\to0} = \left[\frac{\partial\sigma_{ea}}{\partial\sigma_{ix}}\,\frac{\partial\sigma_{ix}}{\partial\sigma_i} + \frac{\partial\sigma_{ea}}{\partial\sigma_{iz}}\,\frac{\partial\sigma_{iz}}{\partial\sigma_i}\right]_{H\to0}, \tag{49}$$

откуда

$$H \to 0: \quad \frac{\partial\sigma_{ea}}{\partial\sigma_i} = \left[\frac{\partial\sigma_{ea}}{\partial\sigma_{ix}} + \frac{\partial\sigma_{ea}}{\partial\sigma_{iz}}\right]_{H\to0}. \tag{50}$$

С учетом (38) и (33), (34) равенство (50) принимает вид

$$H \to 0: \quad \frac{\partial\sigma_{ea}}{\partial\sigma_i} = \left[\frac{\langle\,\bar{\mathbf{E}}^{(x)}\cdot\mathbf{E}^{(y)}\rangle^{(i)}}{\langle\,\bar{E}_x^{(x)}\rangle\langle\,E_y^{(y)}\rangle}\right]_{H\to0}. \tag{51}$$

Правая часть в (51) должна быть разложена до линейных по H членов.

В рассматриваемом приближении имеем

$$\mathbf{E}^{(\nu)}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0^{(\nu)}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_1^{(\nu)}(\mathbf{r}) + \ldots, \tag{52}$$

где $\mathbf{E}_1^{(\nu)}(\mathbf{r})$ — линейная по H поправка к $\mathbf{E}_0^{(\nu)}(\mathbf{r})$. Считаем, что $\langle\,\mathbf{E}_1^{(\nu)}\rangle = 0$. Согласно [11] поправка $\mathbf{E}_1^{(\nu)}(\mathbf{r})$ может быть представлена в виде

$$\mathbf{E}_1^{(\nu)}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma_{1a} - \sigma_{2a}}{\sigma_1}\,\mathbf{e}^{(\nu)}(\mathbf{r}). \tag{53}$$

Формальное выражение для величины $\mathbf{e}^{(\nu)}(\mathbf{r})$, независящей от магнитного поля, приведено в работе [11]. Для транспонированной системы имеем $\bar{\mathbf{E}}_1^{(\nu)}(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}_1^{(\nu)}(\mathbf{r})$ и $\langle\,\bar{\mathbf{E}}_1^{(\nu)}\rangle = 0$.

В нулевом по H приближении правая часть равенства (51) обращается в нуль, так как согласно [11] для бинарной системы имеем

$$\langle\,\mathbf{E}_0^{(\mu)}\cdot\mathbf{E}_0^{(\nu)}\rangle^{(1)} = \left(f - h\,\frac{\partial f}{\partial h}\right)\langle\,\mathbf{E}_0^{(\mu)}\rangle\cdot\langle\,\mathbf{E}_0^{(\nu)}\rangle, \tag{54}$$

$$\langle\,\mathbf{E}_0^{(\mu)}\cdot\mathbf{E}_0^{(\nu)}\rangle^{(2)} = \frac{\partial f}{\partial h}\,\langle\,\mathbf{E}_0^{(\mu)}\rangle\cdot\langle\,\mathbf{E}_0^{(\nu)}\rangle. \tag{55}$$

Здесь $f = f(p,h)$ — безразмерная эффективная проводимость, введенная в (44). Правые части соотношений (54), (55) при $\mu = x$ и $\nu = y$ обращаются в нуль в силу ортогональности величин $\langle\,\mathbf{E}_0^{(x)}\rangle$ и $\langle\,\mathbf{E}_0^{(y)}\rangle$ — см. (24).

В линейном по H приближении с учетом $\bar{\mathbf{E}}_1^{(x)}(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}_1^{(x)}(\mathbf{r})$ из (51) получаем

$$\frac{\partial\sigma_{ea}}{\partial\sigma_i} = \frac{\langle\,\mathbf{E}_0^{(x)}\cdot\mathbf{E}_1^{(y)} - \mathbf{E}_0^{(y)}\cdot\mathbf{E}_1^{(x)}\rangle^{(i)}}{\langle\,E_{0x}^{(x)}\rangle\langle\,E_{0y}^{(y)}\rangle}. \tag{56}$$

Подстановка в (56) величины σ_{ea} в виде (45) дает

$$\left(\sigma_{1a} - \sigma_{2a}\right)\frac{\partial\varphi_a}{\partial\sigma_i} = \frac{\langle\,\mathbf{E}_0^{(x)}\cdot\mathbf{E}_1^{(y)} - \mathbf{E}_0^{(y)}\cdot\mathbf{E}_1^{(x)}\rangle^{(i)}}{\langle\,E_{0x}^{(x)}\rangle\langle\,E_{0y}^{(y)}\rangle}, \tag{57}$$

откуда с учетом выражения (53) для $\mathbf{E}_1^{(\nu)}(\mathbf{r})$ находим

$$\frac{\partial\varphi_a}{\partial\sigma_i} = \frac{1}{\sigma_1}\,\frac{\langle\,\mathbf{E}_0^{(x)}\cdot\mathbf{e}_1^{(y)} - \mathbf{E}_0^{(y)}\cdot\mathbf{e}_1^{(x)}\rangle^{(i)}}{\langle\,E_{0x}^{(x)}\rangle\langle\,E_{0y}^{(y)}\rangle}. \tag{58}$$

Из (58) при $i = 2$ и $i = 1$ получаем соответственно

$$\frac{\partial\varphi_a}{\partial h} = \frac{\langle\,\mathbf{E}_0^{(x)}\cdot\mathbf{e}_1^{(y)} - \mathbf{E}_0^{(y)}\cdot\mathbf{e}_1^{(x)}\rangle^{(2)}}{\langle\,E_{0x}^{(x)}\rangle\langle\,E_{0y}^{(y)}\rangle}, \tag{59}$$

$$\frac{\partial\varphi_a}{\partial h} = -\frac{1}{h}\,\frac{\langle\,\mathbf{E}_0^{(x)}\cdot\mathbf{e}_1^{(y)} - \mathbf{E}_0^{(y)}\cdot\mathbf{e}_1^{(x)}\rangle^{(1)}}{\langle\,E_{0x}^{(x)}\rangle\langle\,E_{0y}^{(y)}\rangle}, \tag{60}$$

где $h = \sigma_2/\sigma_1$.

Выражения (59) и (60) эквивалентны. Действительно, как отмечено в работе [11], для величин $\mathbf{E}_1^{(\nu)}$ и $\mathbf{j}_0^{(\mu)} = \sigma\mathbf{E}_0^{(\mu)}$ имеет место тождество типа (25):

$$\langle\,\mathbf{E}_1^{(\nu)}\cdot\mathbf{j}_0^{(\mu)}\rangle = \langle\,\mathbf{E}_1^{(\nu)}\rangle\cdot\langle\,\mathbf{j}_0^{(\mu)}\rangle. \tag{61}$$

Правая часть в (61) равна нулю в силу условия $\langle\mathbf{E}_1^{(\nu)}\rangle = 0$, так что для бинарной системы имеем равенство

$$\sigma_1\,\langle\,\mathbf{E}_0^{(\mu)}\cdot\mathbf{E}_1^{(\nu)}\rangle^{(1)} + \sigma_2\,\langle\,\mathbf{E}_0^{(\mu)}\cdot\mathbf{E}_1^{(\nu)}\rangle^{(2)} = 0. \tag{62}$$

Отсюда после подстановки $\mathbf{E}_1^{(\nu)}$ из (53) получаем соотношение

$$\langle \mathbf{E}_0^{(\mu)} \cdot \mathbf{e}_1^{(\nu)} \rangle^{(1)} = -h \langle \mathbf{E}_0^{(\mu)} \cdot \mathbf{e}_1^{(\nu)} \rangle^{(2)}, \tag{63}$$

с помощью которого устанавливается эквивалентность выражений (59) и (60).

2. В квадратичном по магнитному полю приближении положим

$$\sigma_{ix} = \sigma_i + \gamma_{ix}, \quad \sigma_{iz} = \sigma_i + \gamma_{iz}, \tag{64}$$

где $\gamma_{i\nu} \propto H^2$; $\nu = x, z$. При малых H с точностью до членов порядка H^2 включительно имеем следующее разложение для величины σ_{ez} из (9):

$$\sigma_{ez} = \sigma_e + \sum_{i=1}^{2} \left\{ \gamma_{ix} \left(\frac{\partial \sigma_{ez}}{\partial \sigma_{ix}} \right)_0 + \gamma_{iz} \left(\frac{\partial \sigma_{ez}}{\partial \sigma_{iz}} \right)_0 \right\} + \\ + \frac{1}{2} \left(\sigma_{1a} - \sigma_{2va} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 \sigma_{ez}}{\partial \sigma_{1a}^2} \right)_0. \tag{65}$$

Здесь σ_e — то же, что и в (43); производные от σ_{ez} берутся при $H = 0$. В работе [11] соответствующее разложение записано в виде

$$\sigma_{ez} - \sigma_e = \gamma_{1x} \psi_z^{(1)} + \gamma_{1z} \psi_z^{(2)} + \gamma_{2x} \psi_z^{(3)} + \gamma_{2z} \psi_z^{(4)} + \\ + \frac{\left(\sigma_{1a} - \sigma_{2a} \right)^2}{\sigma_1} \chi_z. \tag{66}$$

Здесь $\psi_z^{(k)}(p, h)$, $k = 1, \ldots, 4$, и $\chi_z(p, h)$ — величины, зависящие от свойств композита при $H = 0$.

Производные по σ_{ix} и σ_{iz} в (65) выразим с помощью соотношений (37) через величины (33) и (34) при $H = 0$. После этого из сравнения с (66) находим следующие выражения для коэффициентов разложения $\psi_z^{(k)}$:

$$\begin{aligned} \psi_z^{(1)} &= \psi_{1t}, \quad \psi_z^{(2)} = \psi_{1l}, \\ \psi_z^{(3)} &= \psi_{2t}, \quad \psi_z^{(4)} = \psi_{2l}, \end{aligned} \tag{67}$$

где

$$\begin{aligned} \psi_{it} &= \frac{\langle \left(E_{0x}^{(z)} \right)^2 + \left(E_{0y}^{(z)} \right)^2 \rangle^{(i)}}{\left(\langle E_{0z}^{(z)} \rangle \right)^2}, \\ \psi_{il} &= \frac{\langle \left(E_{0z}^{(z)} \right)^2 \rangle^{(i)}}{\left(\langle E_{0z}^{(z)} \rangle \right)^2}. \end{aligned} \tag{68}$$

Величины ψ_{it} и ψ_{il} — соответственно поперечные и продольные (по отношению к $\langle \mathbf{E} \rangle$) квадратичные эффективные характеристики напряженности электрического поля при $H = 0$.

В линейном по H приближении из (37) и (35) следует, что

$$\frac{\partial \sigma_{ez}}{\partial \sigma_{1a}} = \frac{1}{\left(\langle E_{0z}^{(z)} \rangle \right)^2} \times \\ \times \left\{ \langle \left[\bar{\mathbf{E}}_1^{(z)} \times \mathbf{E}_0^{(z)} \right]_z \rangle^{(1)} + \langle \left[\mathbf{E}_0^{(z)} \times \mathbf{E}_1^{(z)} \right]_z \rangle^{(1)} \right\}. \tag{69}$$

Подстановка в (69) выражения (53) для $\mathbf{E}_1^{(z)}$ дает

$$\frac{\partial \sigma_{ez}}{\partial \sigma_{1a}} = 2 \, \frac{\sigma_{1a} - \sigma_{2a}}{\sigma_1} \, \frac{\langle \left[\mathbf{E}_0^{(z)} \times \mathbf{e}_1^{(z)} \right]_z \rangle^{(1)}}{\left(\langle E_{0z}^{(z)} \rangle \right)^2}. \tag{70}$$

Отсюда, находя вторую производную от σ_{ez} по σ_{1a}, для функции χ_z из (66) получаем выражение

$$\chi_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{ez}}{\partial \sigma_{1a}^2} \right)_0 = \frac{\langle \left[\mathbf{E}_0^{(z)} \times \mathbf{e}_1^{(z)} \right]_z \rangle^{(1)}}{\left(\langle E_{0z}^{(z)} \rangle \right)^2}. \tag{71}$$

Аналогичным образом рассматривается разложение величины σ_{ex} по степеням H. В результате находим

$$\sigma_{ex} - \sigma_e = \gamma_{1x} \psi_x^{(1)} + \gamma_{1z} \psi_x^{(2)} + \gamma_{2x} \psi_x^{(3)} + \gamma_{2z} \psi_x^{(4)} + \\ + \frac{\left(\sigma_{1a} - \sigma_{2a} \right)^2}{\sigma_1} \chi_x, \tag{72}$$

где

$$\begin{aligned} \psi_x^{(1)} &= \psi_{1l} + \frac{1}{2} \psi_{1t}, \quad \psi_x^{(2)} = \frac{1}{2} \psi_{1t}, \\ \psi_x^{(3)} &= \psi_{2l} + \frac{1}{2} \psi_{2t}, \quad \psi_x^{(4)} = \frac{1}{2} \psi_{2t}, \end{aligned} \tag{73}$$

$$\chi_x = \frac{\langle \left[\mathbf{E}_0^{(x)} \times \mathbf{e}_1^{(x)} \right]_z \rangle^{(1)}}{\left(\langle E_{0x}^{(x)} \rangle \right)^2}. \tag{74}$$

Выражения (66)–(68) и (71)–(74) совпадают с соответствующими результатами работы [11].

Функции ψ_{it} и ψ_{il} — те же, что и в (68) (выбор направления $\langle \mathbf{E} \rangle$ в изотропной среде несуществен). Поэтому между величинами $\psi_x^{(k)}$ и $\psi_z^{(k)}$ имеется ряд соотношений, позволяющих выразить, например, все $\psi_z^{(k)}$ через $\psi_x^{(k)}$. Кроме того, имеются еще два соотношения, связывающих функции $\psi_x^{(k)}$ с безразмерной эффективной проводимостью $f(p, h)$. Для того чтобы их найти, заметим, что из определения (43) аналогично (50) следует

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_i} = \left(\frac{\partial \sigma_{e\nu}}{\partial \sigma_{ix}} \right)_0 + \left(\frac{\partial \sigma_{e\nu}}{\partial \sigma_{iz}} \right)_0. \tag{75}$$

Отсюда с учетом (37) и (33), (34) находим

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_i} = \frac{\langle {\mathbf{E}_0}^2 \rangle^{(i)}}{\left(\langle \mathbf{E}_0 \rangle \right)^2}. \tag{76}$$

Подстановка (44) в (76) приводит к выражениям [11]

$$\psi_1 = \frac{\langle \mathbf{E}_0{}^2 \rangle^{(1)}}{\left(\langle \mathbf{E}_0 \rangle\right)^2} = f - h\,\frac{\partial f}{\partial h}, \tag{77}$$

$$\psi_2 = \frac{\langle \mathbf{E}_0{}^2 \rangle^{(2)}}{\left(\langle \mathbf{E}_0 \rangle\right)^2} = \frac{\partial f}{\partial h}. \tag{78}$$

Используя выражения (77), (78), находим для функций $\psi_x^{(k)}$ из (73) соотношения

$$\psi_x^{(1)} + \psi_x^{(2)} = \psi_1 = f - h\,\frac{\partial f}{\partial h}, \tag{79}$$

$$\psi_x^{(3)} + \psi_x^{(4)} = \psi_2 = \frac{\partial f}{\partial h}, \tag{80}$$

полученные в работе [11] с помощью феноменологического подхода.

Для композита с естественной анизотропией (при $H = 0$) соотношение (76) может быть обобщено следующим образом:

$$\frac{\partial \sigma_{e\nu}}{\partial \sigma_{i\mu}} = \frac{\langle \left(E_\mu^{(\nu)}\right)^2 \rangle^{(i)}}{\left(\langle E_\nu^{(\nu)} \rangle\right)^2}, \quad \mu, \nu = x, y, z. \tag{81}$$

Здесь $\sigma_{e\nu}$ и $\sigma_{i\mu}$ — главные значения соответственно тензора эффективной проводимости композита $\hat{\sigma}_e$ и тензора проводимости i-й компоненты $\hat{\sigma}_i$, $i = 1, \ldots, n$. При этом считается, что главные оси этих тензоров образуют декартову систему.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты настоящей работы показывают, что исследование билинейных характеристик $\Psi_{i\perp}^{\mu\nu}$, $\Psi_{i\|}^{\mu\nu}$ и $\Phi_i^{\mu\nu}$ представляет несомненный интерес, так что при изучении проводимости композитов в магнитном поле следует расширить круг рассматриваемых величин. Совместное определение (например, компьютерными методами) составляющих тензора эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$ и парциальных билинейных характеристик дает возможность получать обширную информацию о гальваномагнитных свойствах композитов. При использовании величин $\Psi_{i\perp}^{\mu\nu}$, $\Psi_{i\|}^{\mu\nu}$ и $\Phi_i^{\mu\nu}$ отпадает необходимость в затруднительном (особенно в окрестности порога протекания — точки фазового перехода металл–диэлектрик) численном дифференцировании, что позволяет находить производные от составляющих $\hat{\sigma}_e$ практически с той же точностью, что и сам тензор $\hat{\sigma}_e$. В ходе подобного комплексного компьютерного эксперимента могут быть подробно изучены гальваномагнитные свойства композитов в окрестности порога протекания и выяснены достаточно тонкие детали их поведения, недоступные при стандартном подходе, ограничивающемся исследованием только составляющих тензора $\hat{\sigma}_e$. Из-за отсутствия (даже на уровне гипотезы подобия) адекватной теории критического поведения проводимости композитов при произвольных $\mathbf{H}$ предлагаемое численное изучение этой проблемы представляется вполне актуальным и перспективным.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 641 (1970) [A. M. Dykhne, Sov. Phys. JETP **32**, 348 (1971)].
2. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **82**, 1333 (1982) [B. Ya. Balagurov, Sov. Phys. JETP **55**, 774 (1982)].
3. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **85**, 568 (1983) [B. Ya. Balagurov, Sov. Phys. JETP **58**, 331 (1983)].
4. C. Herring, J. Appl. Phys. **31**, 1939 (1960).
5. Ю. А. Дрейзин, А. М. Дыхне, ЖЭТФ **63**, 242 (1972) [Yu. A. Dreizin and A. M. Dykhne, Sov. Phys. JETP **36**, 127 (1973)].
6. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **145**, 356 (2014) [B. Ya. Balagurov, JETP **118**, 311 (2014)].
7. Б. И. Шкловский, ЖЭТФ **72**, 288 (1977) [B. I. Shklovskii, Sov. Phys. JETP **45**, 152 (1977)].
8. D. J. Bergman and D. Stroud, Phys. Rev. B **32**, 6097 (1985).
9. А. С. Скал, ДАН СССР **260**, 602 (1981) [A. S. Skal, Sov. Phys. Dokl. **26**, 872 (1981)].
10. А. С. Скал, ФТТ **27**, 1407 (1985) [A. S. Skal, Sov. Phys. Sol. St. **27**, 849 (1985)].
11. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **93**, 1888 (1987) [B. Ya. Balagurov, Sov. Phys. JETP **66**, 1079 (1987)].
12. Б. Я. Балагуров, В. А. Кашин, ЖЭТФ **110**, 1001 (1996) [B. Ya. Balagurov and V. A. Kashin, JETP **83**, 553 (1996)].
13. A. L. Efros and B. I. Shklovskii, Phys. Stat. Sol. (b) **76**, 475 (1976).
14. J. P. Straley, J. Phys. C **9**, 783 (1976).
15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1992) [L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics*, Vol. 8, *Electrodynamics of Continuous Media*, Nauka, Moscow (1992); Butterworth–Heinemann, Oxford (1992)].
16. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 110 (1970) [A. M. Dykhne, Sov. Phys. JETP **32**, 63 (1971)].